

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργασία

Μέρος (I)

Δίνεται πίνακας $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$. Εφαρμόζουμε σ' αυτόν μετασχηματισμούς Gauss μέχρι να γίνει άνω τριγωνικός.

(i) Αποδείξτε ότι :

$$a_{ij}^{(r)} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & i \\ 1 & 2 & \dots & r & j \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix}}, 1 \leq r \leq n-1$$

όπου :

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1, j_1} & \dots & a_{i_1, j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p, j_1} & \dots & a_{i_p, j_p} \end{vmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix}$$

(ii) Ένας πίνακας λέγεται Completely Pivoted (CP) εάν κατά την διάρκεια των μετασχηματισμών Gauss με ολική οδήγηση δεν απαιτούνται εναλλαγές των γραμμών ή των στηλών του. Αποδείξτε ότι εάν ο A είναι CP κι εφαρμοσθούν σ' αυτόν μετασχηματισμοί Gauss τότε :

$$g(n, A) = \max \left\{ 1, \max_{1 \leq r \leq n-1} \left| \frac{A \begin{pmatrix} 1 & \dots & r+1 \end{pmatrix}}{a_{11} \cdot A \begin{pmatrix} 1 & \dots & r \end{pmatrix}} \right| \right\}$$

όπου $g(n, A)$ το growth του πίνακα A.

Μέρος (II)

Ορισμός :

Ένας πίνακας Hadamard τάξης n είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία ± 1 έτσι ώστε :

$$H \cdot H^T = n \cdot I$$

Η σχέση αυτή ισοδυναμεί με το γεγονός ότι οποιεσδήποτε δύο γραμμές (ή στήλες) του H είναι ορθογώνιες. Η ιδιότητα αυτή παραμένει αμετάβλητη εάν εναλλάξουμε τις γραμμές ή τις στήλες του καθώς κι εάν τις πολλαπλασιάσουμε με -1 . Οι πίνακες που προκύπτουν ονομάζονται ισοδύναμοι. Συγκεκριμένα δύο πίνακες Hadamard H_1 και H_2 λέγονται ισοδύναμοι εάν :

$$H_2 = P \cdot H_1 \cdot Q$$

όπου P, Q μεταθετικοί πίνακες με στοιχεία $0, \pm 1$.

Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ GROWTH ΓΙΑ HADAMARD ΠΙΝΑΚΕΣ

Έστω A ένας CP $n \times n$ Hadamard πίνακας. Εάν εφαρμόσουμε σ' αυτόν απαλοιφή Gauss τότε:

- (i) $g(n, A) = n$
- (ii) Τα τέσσερα τελευταία ρίνοτ είναι : $n/2$ ή $n/4$, $n/2$, $n/2$, n .
- (iii) Το πέμπτο από το τέλος ρίνοτ είναι $n/3$ ή $n/2$.
- (iv) Το έκτο από το τέλος ρίνοτ είναι $n/4$, $n/10/3$ ή $n/8/3$.
- (v) Κάθε ρίνοτ πριν από το τελευταίο έχει μέγεθος το πολύ $n/2$.
- (vi) Τα πρώτα 6 ρίνοτ είναι ίσα με 1, 2, 2, 4, 2 ή 3, 10/3 ή 8/3 ή 4.
- (vii) Το πέμπτο ρίνοτ μπορεί να είναι 2 σε τάξης 2^l και είναι 3 για όλες τις άλλες.
- (viii) Το έκτο ρίνοτ μπορεί να είναι 4 σε τάξης 2^l και είναι 10/3 ή 8/3 για όλες τις άλλες.

Εφαρμογή

- 1) Μελετήστε την δομή των οδηγών στοιχείων που προκύπτουν από την εφαρμογή Gauss με ολική οδήγηση σε πίνακες Hadamard τάξης $n = 20$.
- 2) Καταγράψτε τις διαφορετικές δομές που εντοπίζονται. Για κάθε διαφορετική δομή καταγράψτε τη μορφή από την οποία προέκυψε.
- 3) Τι συμπεράσματα προκύπτουν ;
- 4) Εξετάστε εάν ή επιλογή του μεγίστου επηρεάζει την προκύπτουσα δομή των οδηγών στοιχείων.
Προσδιορίστε εναλλακτικούς αλγορίθμους επιλογής του μεγίστου.