

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Δίνεται το $n \times n$ σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ όπου τα στοιχεία του πίνακα $A = (a_{ij})$ προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$a_{ii} = 1$, $a_{in} = 1$, $1 \leq i \leq n$, $a_{ij} = -1$ για $i > j$
και $a_{ij} = 0$ διαφορετικά

- (i) Τριγωνοποιήστε τον A με απαλοιφή *Gauss* με μερική οδήγηση
- (ii) Δείξτε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος
- (iii) Αποδείξτε ότι $|a_{ij}^{(k)}| \leq 2^{k-1}$ και $a_{ij}^{(k)} = 2^{k-1}$ για $k = n$
- (iv) Υπολογίστε το συντελεστή μεγέθυνσης

$$\rho = \frac{\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|}$$

Τι συμπεραίνετε για την ευστάθεια της απαλοιφής *Gauss* με μερική οδήγηση για ένα τέτοιο σύστημα;

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Να προσδιοριστεί αριθμητικά η λύση του συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$, όπου A ο παραπάνω πίνακας για διάφορες τιμές του n και διάφορα \underline{b} .

Για $n = 60$ πώς επηρεάζει τη λύση ο μεγάλος συντελεστής μεγέθυνσης $\rho = 2^{60}$;

Να μελετήσετε τις μεταβολές στη λύση του συστήματος που επέρχονται αν διαταράξουμε ελαφρά τα αρχικά δεδομένα.

Είναι η λύση του συστήματος ευσταθής;