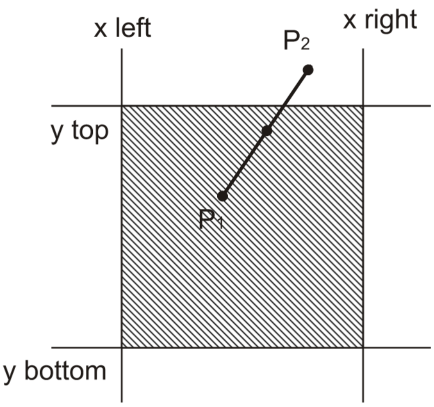
Αποκοπή ευθυγράμμων τμημάτων

Αλγόριθμος των Cohen-Sutherland



Χαρακτηριστικά (Attributes)

- LEFT : P_i αριστερά της ευθείας $x = x_{LEFT}$
- RIGHT: P_i δεξιά της ευθείας $x = x_{RIGHT}$
- TOP : P_i άνω της ευθείας $y = y_{TOP}$
- BOTTOM: P_i κάτω της ευθείας $y = y_{BOTTOM}$

ATTR(P_i): Το σύνολο των χαρακτηριστικών του σημείου P_i

Στο σχήμα 4.5 τα σημεία P_1 , P_2 έχουν τα εξής attributes :

$ATTR(P_1) = \varnothing$
$ATTR(P_2) = TOP$
$ATTR(P_1) = \varnothing$
$ATTR(P_1) \cap ATTR(P_2) = \varnothing$

- Το τμήμα $P_1 P_2$ είναι 'εμφανές' εάν $ATTR(P_1) \cup ATTR(P_2) = \varnothing$
- Το τμήμα $P_1 P_2$ είναι πλήρως 'μη εμφανές' εάν $ATTR(P_1) \cap ATTR(P_2) = \varnothing$
- Όλες οι άλλες περιπτώσεις οδηγούν σε πιθανά επιμέρους εμφανή ευθύγραμμα τμήματα.

Αλγόριθμος

Υπολογισμός $ATTR(P_1), ATTR(P_2)$
if $ATTR(P_1) \cap ATTR(P_2) \neq \varnothing$
Αφανές το $P_1 P_2$
quit
while $R, L, T, B \in ATTR(P_1) \cup ATTR(P_2)$
M:= μέσο του $P_1 P_2$
Υπολογισμός ATTR(M)

if R ή T $\in$ ATTR(M)

$P_2 := M$

else if L ή B $\in$ ATTR(M)

$P_1 := M$

else if $P_1 M$, MP_2 πιθανώς εμφανή

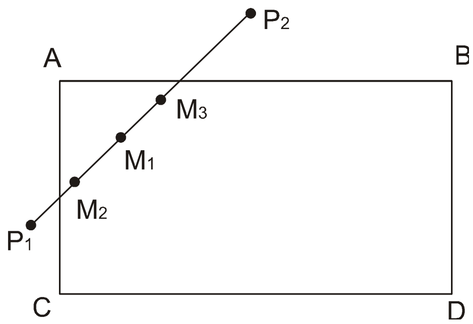
επανέλαβε τον αλγόριθμο για τα $P_1 M$, MP_2

else if $P_1 M$ εμφανές επανέλαβε για MP_2

else if MP_2 εμφανές επανέλαβε για $P_1 M$

end

Εφαρμογή: Δίνεται το παράθυρο



Να αποκοπεί ως προς αυτό το ευθύγραμμο τμήμα $P_1 P_2$ εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των Cohen-Sutherland

$ATTR\,(P_1) = L$

$ATTR\,(P_2) = T$

$ATTR(P_1) \cap ATTR(P_2) \neq \varnothing \Rightarrow \exists$ πιθανό επιμέρους εμφανές ευθύγραμμο τμήμα.

$M_1 :=$ μέσο του $P_1 P_2$

$ATTR\,(M_1) = \varnothing$

$P_1 M_1$, $M_1 P_2$ έχουν πιθανά επιμέρους εμφανή ευθύγραμμα τμήματα.

Επανέλαβε τον αλγόριθμο για τα $P_1 M_1$, $M_1 P_2$

Ευθύγραμμο Τμήμα $P_1 M_1$

$M_2 :=$ μέσο του $P_1 M_1$

$ATTR\,(M_1) = \varnothing$

$ATTR\,(M_2) = \varnothing$

Εκτύπωσε το $M_2 M_1$ και επανέλαβε για το $P_1 M_2$

Ευθύγραμμο Τμήμα $M_1 P_2$

$M_3 :=$ μέσο του $M_1 P_2$

$ATTR\,(M_1) = \varnothing$

$ATTR\,(M_3) = \varnothing$

Εκτύπωσε το $M_1 M_3$ και επανέλαβε για το $M_3 P_2$

Σχόλιο:

Μπορούν να υπολογίζονται και τα σημεία τομής των προς αποκοπή ευθειών με τις πλευρές του παράθυρου ως εξής:
Ευθεία με άκρα $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
Τομή με κάθετη πλευρά
$y = y_1 + m(x - x_1), \qquad x = xw_{\min} or \quad xw_{\max}$

Σημείο τομής $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Πιο πολλές πράξεις (πραγματικές))
Τομή με οριζόντια πλευρά
$x = x_1 + \dfrac{y - y_1}{m}, \qquad y = yw_{\min} or \quad yw_{\max}$

Εάν αντί για σημεία τομής χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του μέσου σημείου τότε οι συντεταγμένες του μέσου υπολογίζονται από
$x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

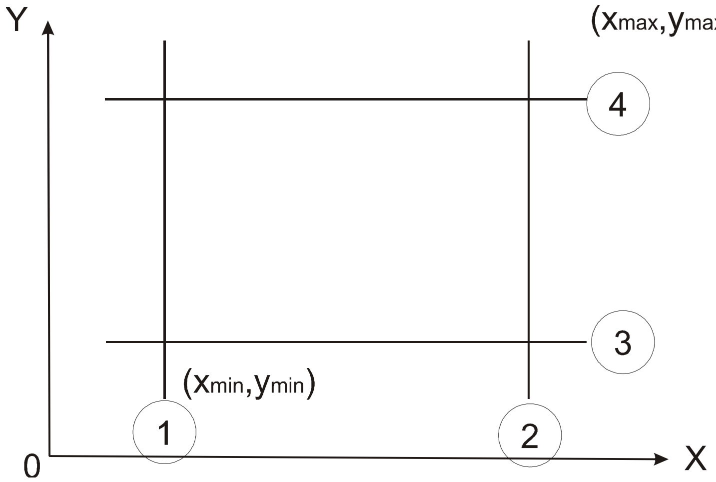
Αλγόριθμος Liang-Barsky

Θέτουμε το P_1P_2 σε παραμετρική μορφή: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$
$P = P_1 + t(P_2 - P_1), t \in [0,1]$
$x = x_1 + \Delta x \cdot t, y = y_1 + \Delta y \cdot t$

με $\Delta x = x_2 - x_1$ και $\Delta y = y_2 - y_1$

Για $t \in [0,1] \Rightarrow P_1P_2$ ευθύγραμμο τμήμα και για $t \in [-\infty, +\infty] \Rightarrow$ ευθεία των δύο σημείων P_1 και P_2
Με δοσμένο παράθυρο : $x_{\min}$, $x_{\max}$, $y_{\min}$, $y_{\max}$ και εάν το P_1P_2 βρίσκεται μέσα στο παράθυρο έχουμε :

$x_{\min} \le x_1 + \Delta x \cdot t, \quad y_{\min} \le y_1 + \Delta y \cdot t$
$x_1 + \Delta x \cdot t \le x_{\max}, \quad y_1 + \Delta y \cdot t \le y_{\max}$



ή αλλιώς:
$-\Delta x \cdot t \le x_1 - x_{\min}, \quad -\Delta y \cdot t \le y_1 - y_{\min}$
$\Delta x \cdot t \le x_{\max} - x_1, \quad \Delta y \cdot t \le y_{\max} - y_1$

Σε κοινό τύπο της μορφής $p_i \cdot t \le q_i, i = 1(1)4$ έχουμε:
$p_1 = -\Delta x \qquad , q_1 = x_1 - x_{\min}$
$p_2 = \Delta x \qquad , q_2 = x_{\max} - x_1$
$p_3 = -\Delta y \qquad , q_3 = y_1 - y_{\min}$
$p_4 = \Delta y \qquad , q_4 = y_{\max} - y_1$

- Οι ακμές του ορθογώνιου παράθυρου προεκτεινόμενες χωρίζουν το εκάστοτε επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα.
- Κάθε ημιεπίπεδο στο οποίο βρίσκεται το παράθυρο θεωρείτε 'ορατό'. Τότε το παράθυρο προκύπτει σαν τομή των τεσσάρων ορατών ημιεπιπέδων.
- Οι παραπάνω τέσσερεις ανισότητες καθορίζουν ανά μία και ένα τέτοιο ορατό ημιεπίπεδο.

- Από γεωμετρική άποψη ο αλγόριθμος επεξεργάζεται την ευθεία που καθορίζεται από τα σημεία P_1 και P_2 .
- Κάθε ανισότητα (από τις 4 παραπάνω) παρέχει για την ευθεία αυτή την περιοχή τιμών του t, η οποία παριστά το ορατό τμήμα της ευθείας αναφορικά με την αντίστοιχη ακμή (ευθεία) του παράθυρου.

Για $p_i \neq 0$ το σημείο τομής της ευθείας με την ακμή (του παράθυρου) έχει τιμή $t = \dfrac{q_i}{p_i}, i = 1(1)4$ και το πρόσημο του q_i καθορίζει σε πια πλευρά της ακμής του παράθυρου βρίσκεται το σημείο P_1 .

$q_i \geq 0 \Rightarrow P_1$ στην ορατή περιοχή

$q_i < 0 \Rightarrow P_1$ εκτός ορατής περιοχής

$p_i = 0 \Rightarrow$ η ευθεία είναι παράλληλη προς την i-ακμή όπου i=1,2,3,4 αντίστοιχα αριστερά, δεξιά, κάτω και πάνω.

Εάν $p_i < 0$ τότε η προσανατολισμένη ευθεία $P_1 P_2$ περνάει από την μη ορατή στην ορατή περιοχή ενώ για $p_i > 0$ εγκαταλείπει την ορατή περιοχή.

Ο αλγόριθμος υπολογίζει για κάθε γραμμή τις τιμές των παραμέτρων t_1 και t_2 οι οποίες καθορίζουν το τμήμα της ευθείας $P_1 P_2$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του παραθύρου , με τις εξισώσεις:

Υπολογισμός Παραμέτρων t_1 και t_2

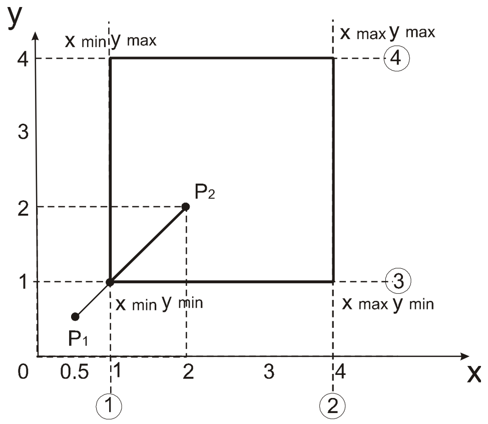
$$t_1 = \max\left(\left\{\frac{q_i}{p_i} : p_i < 0, i = 1(1)4\right\} \cup \{0\}\right)$$

$$t_2 = \min\left(\left\{\frac{q_i}{p_i} : p_i > 0, i = 1(1)4\right\} \cup \{1\}\right)$$

Προτερήματα Αλγόριθμου Liang-Barsky

Μειώνει σημαντικά την απαιτούμενη υπολογιστική δουλειά. Για κάθε υπολογισμό καινούριων τιμών για τα t_1 και t_2 απαιτείται μόνο μια διαίρεση και τα σημεία τομής υπολογίζονται μόνο μια φορά.

Παράδειγμα



Δίνεται το $P_1(0.5, 0.5)$, $P_2(2,2)$. Να αποκοπεί ως προς το παράθυρο με χρήση της τεχνικής Liang-Barsky.

$x_{\min} = y_{\min} = 1$

$x_{\max} = y_{\max} = 4$

$\Delta x = 1.5 = \Delta y$

$p_1 = -1.5 \Rightarrow$ το $P_1 P_2$ περνάει από τη μη ορατή περιοχή που καθορίζεται από την ακμή (1) στην ορατή περιοχή.
$q_1 = -0.5 \Rightarrow P_1$ εκτός περιοχής

$p_2 = 1.5 \Rightarrow$ το $P_1 P_2$ περνάει από τη μη ορατή περιοχή που καθορίζεται από την ακμή (2) στην ορατή περιοχή.
$q_2 = 3.5 \Rightarrow P_1$ εντός ορατής (που καθορίζεται από την ακμή (2))

$p_3 = -1.5 \Rightarrow$ το $P_1 P_2$ περνάει από τη μη ορατή περιοχή που καθορίζεται από την ακμή (3) στην ορατή περιοχή.
$q_3 = -0.5 \Rightarrow P_1$ εκτός περιοχής

$p_4 = 1.5 \Rightarrow$ το $P_1 P_2$ περνάει από τη μη ορατή περιοχή που καθορίζεται από την ακμή (4) στην ορατή περιοχή.
$q_4 = 3.5 \Rightarrow P_1$ εντός ορατής (που καθορίζεται από την ακμή (4))

Καθορισμός των σημείων τομής και παραμέτρων t_1 και t_2

$$t_1 = \max\left(\left\{\frac{q_i}{p_i} : p_i < 0, i = 1(1)4\right\} \cup \{0\}\right)$$

$$= \max\left(\left\{\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_3}{p_3}\right\} \cup \{0\}\right) \approx 0.33$$

Επειδή $t_1 < t_2$ υπολογίζουμε τα άκρα του ορατού τμήματος

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_1 + \Delta x \cdot t_1 = 0.5 + 1.5\frac{0.5}{1.5} = 1 \\ y' &= y_1 + \Delta y \cdot t_1 = \qquad\qquad\quad 1 \end{aligned}\right\} P$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x_1 + \Delta x \cdot t_2 = 0.5 + 1.5 = 2 \\ y'' &= y_1 + \Delta y \cdot t_2 = 0.5 + 1.5 = 2 \end{aligned}\right\} P'$$

Το P’P’’ είναι η αποκοπή του $P_1 P_2$