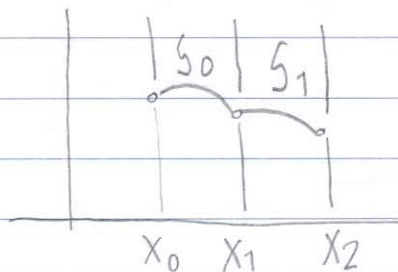


Άσκηση: Να προσδιορίσει με τη βοήθεια των κυβικών spline
 προεξοχιστική τιμή για την $f(2.5)$
 με τη βοήθεια του ακόλουθου πίνακα.

x	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.5207843	0.5104147	0.4813306



Λύση:

x	x_0	x_1	x_2	$n=2$
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

Κάθε $S_i(x)$ $i=0,1$ είναι κυβικό πολυώνυμο στο $[x_i, x_{i+1}]$
 S_{i-1}, S_i παρεμβάλλουν το x_i , $i=1$

$$S_0(x_1) = S_1(x_1) = y_1 \quad (\text{Από συνέχεια κ συνθήκη παρεμβολής})$$

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \quad (\text{Από συνέχεια παραγώγων})$$

$$Z_i = S''(x_i) \quad 0 \leq i \leq 2$$

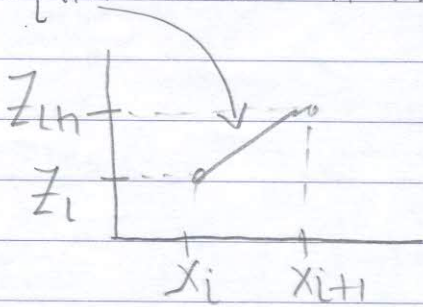
$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} S''(x) = Z_1 = \lim_{x \rightarrow x_1^+} S''(x)$$

$$S''(x_i) = z_i$$

$$S''(x_{i+1}) = z_{i+1}$$

Η μορφή της $S''_i(x) = \frac{z_i}{h_i} (x_{i+1} - x) + \frac{z_{i+1}}{h_i} (x - x_i)$

η $S''_i(x)$ είναι η εξίσωση ευθείας γιατί z_i, z_{i+1}



Στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$S''_0(x)$ η ευθεία γιατί z_0, z_1

$S''_1(x)$ η ευθεία γιατί z_1, z_2

$$S''_0(x) = \frac{z_0}{h_0} (x_1 - x) + \frac{z_1}{h_0} (x - x_0) \quad (1)$$

$$S''_1(x) = \frac{z_1}{h_1} (x_2 - x) + \frac{z_2}{h_1} (x - x_1) \quad (2)$$

Ολοκληρώνουμε 2 φορές την (1)

$$S_0(x) = \frac{z_0}{6h_0} (x_1 - x)^3 + \frac{z_1}{6h_0} (x - x_0)^3 + c(x - x_0) + D(x_1 - x) \quad (3)$$

Από συνθήκες παρεμβολής $S_0(x_0) = y_0 \quad (4)$

$$S_0(x_1) = y_1 \quad (5)$$

Από έχω $(3) \xrightarrow{(4)} y_0 = \frac{z_0}{6h_0} (x_1 - x_0)^3 + D(x_1 - x_0) \quad (6)$

και (3) $\stackrel{(5)}{\Rightarrow}$ $y_1 = \frac{z_1}{6h_0} (x_1 - x_0)^3 + C (x_1 - x_0)$ (7)

$$\left. \begin{aligned} (6) \Rightarrow y_0 &= \frac{z_0}{6h_0} h_0^3 + D h_0 \\ (7) \Rightarrow y_1 &= \frac{z_1}{6h_0} h_0^3 + C h_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} D &= \frac{y_0}{h_0} - \frac{z_0 h_0}{6} \\ C &= \frac{y_1}{h_0} - \frac{z_1 h_0}{6} \end{aligned}$$

Άρα

$$(3) \Rightarrow S_0(x) = \frac{z_0}{6h_0} (x_1 - x)^3 + \frac{z_1}{6h_0} (x - x_0)^3 + \left(\frac{y_1}{h_0} - \frac{z_1 h_0}{6} \right) (x - x_0) + \left(\frac{y_0}{h_0} - \frac{z_0 h_0}{6} \right) (x_1 - x)$$

Όμοια προκύπτει, ότι

$$(8) \uparrow S_1(x) = \frac{z_1}{6h_1} (x_2 - x)^3 + \frac{z_2}{6h_1} (x - x_1)^3 + \left(\frac{y_2}{h_1} - \frac{z_2 h_1}{6} \right) (x - x_1) + \left(\frac{y_1}{h_1} - \frac{z_1 h_1}{6} \right) (x_2 - x)$$

Από συνθήκη συνέχειας παραγωγίου ισχύει το εξής:

$$S'_{l-1}(x_i) = S'_l(x_i) \quad (l=1, \dots, n-1)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε μόνο τη σχέση

$$S'_0(x_1) = S'_1(x_1).$$

Επομένως παραγωγίζουμε τις (3) και (8) θέτοντας στον $x \rightarrow x_1$ και τις εφιστάμε:

$$S'_1(x_1) = \frac{-h_1 z_1}{3} - \frac{z_2 h_1}{6} + \frac{y_2}{h_1} - \frac{y_1}{h_1}$$

$$S'_0(x_1) = \frac{z_1 h_0}{3} + \frac{z_0 h_0}{6} - \frac{y_0}{h_0} + \frac{y_1}{h_0}$$

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \Rightarrow$$

$$-\frac{h_1 z_1}{3} - \frac{z_2 h_1}{6} + \frac{y_2}{h_1} - \frac{y_1}{h_1} = \frac{z_1 h_0}{3} + \frac{z_0 h_0}{6} - \frac{y_0}{h_0} + \frac{y_1}{h_0}$$

$$-2h_1 z_1 - z_2 h_1 + \frac{6}{h_1} (y_2 - y_1) = 2z_1 h_0 + z_0 h_0 + \frac{6}{h_0} (y_1 - y_0)$$

$$-2(h_0 + h_1)z_1 - h_1 z_2 - h_0 z_0 = \frac{6}{h_0} (y_1 - y_0) + \frac{6}{h_1} (y_2 - y_1) \quad (9)$$

Τα z_0, z_2 λόγω των ομογενικών συνθηκών

$$(S''(x_0) = S''(x_2) = 0) \text{ είναι } \begin{matrix} z_0 = 0 \\ z_2 = 0 \end{matrix}$$

Αρα η παραπάνω ισοτιμία καταλήγει ως εξής :

$$2(h_0 + h_1)z_1 = \frac{6}{h_1} (y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0} (y_1 - y_0)$$

$$h_0 = h_1 = 0.2$$

$$y_2 = 0.4813306$$

$$y_1 = 0.5104147$$

$$y_0 = 0.5207843$$

$$\text{Επομένως } z_1 = \frac{1}{0.8} \left(\frac{6}{0.2} (-0.0290841) - \frac{6}{0.2} (-0.010... \right)$$

$$\dots 3696) = 1.25 \cdot 30 (-0.0187145) = -0.7017937$$

$$S_0(x) = \frac{z_1}{6h_0} (x-x_0)^3 + \left(\frac{y_1 - z_1 h_0}{h_0} - \frac{z_1 h_0}{6} \right) (x-x_0) + \frac{y_0}{h_0} (x_1 - x)$$

$$= \frac{-0.7017937}{6 \cdot 0.2} (x-x_0)^3 + \left(\frac{0.5104147 - (-0.7017937 \cdot 0.2)}{0.2} - \frac{-0.7017937 \cdot 0.2}{6} \right) (x-x_0)$$

$$+ \frac{0.5207843}{0.2} (x_1 - x) = -0.584828 (x-x_0)^3 + (2.5520735 + 0.0233931)$$

$$\cdot (x-x_0) + 2.6039215 (x_1 - x) = (-0.584828)(x-x_0)^3 + (2.5754666)(x-x_0) + (2.6039215)(x_1 - x)$$

$$S_1(x) = \frac{-0.7017937}{6 \cdot 0,2} (x_2 - x)^3 + \left(\frac{0.4813306}{0,2} \right) (x - x_1) + \left(\frac{0.5104147}{0,2} + \frac{0.7017937 \cdot 0,2}{6} \right)$$

$(x_2 - x)$

$$S_0(x) = (-0,584828)(x - 2,2)^3 + (2,5754666)(x - 2,2) + (2,6039215)(2,4 - x)$$

$$S_1(x) = (-0,584828)(2,6 - x)^3 + (2,406653)(x - 2,4) + (2,5754666)(2,6 - x)$$

Apα

$f(2,5)$

$$S_1(2,5) = (-0,0005848) + (0,2406653) + (0,2575466) = 0,4976271$$

$$\boxed{f(2,5) \approx 0,497}$$