

ΘΕΜΑ 1 (30 μονάδες) Δίνονται τα σημεία ελέγχου P_0, P_1, P_2, P_3 ομοεπίπεδα, ανά τρία μη συγγραμμικά.

- Χρησιμοποιώντας γραμμική παρεμβολή κατασκευάστε μία κυβική καμπύλη Bezier τρίτου βαθμού $P^3(t)$, $t \in [0, 1]$.
- Στηριζόμενοι στην κατασκευή αυτή αποδείξτε ότι $\forall t \in [0, 1]$ η $P^3(t)$ βρίσκεται μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των σημείων ελέγχου.
- Να αποδειχθεί ότι η κυβική καμπύλη Bezier περιγράφεται από τη σχέση

$$P^3(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 2 (35 μονάδες) α) Εστω $A=(\chi_1, \psi_1)$, $B=(\chi_2, \psi_2)$, $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ και ευθεία EF παράλληλη με την AB.

Να αποδειχθεί ότι η επίδραση του M στο ζεύγος (AB, EF) διατηρεί την παραλληλία. (Υπόδειξη: Οι παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια κλίση)

β) Ο πίνακας $S_h = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ ορίζει ένα μετασχηματισμό που ονομάζεται shearing. Για $b = 0$ έχουμε shearing στην κατεύθυνση x, ενώ για $a = 0$ έχουμε shearing στην κατεύθυνση y. Μελετήστε το αποτέλεσμα που επιφέρει ο μετασχηματισμός S_h στο τετράγωνο $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ όταν i) $a = 2, b = 0$ ii) $a = 2, b = 3$. Τι παρατηρείτε;

γ) Με τη βοήθεια του β) να βρεθεί ο μετασχηματισμός M, που μετατρέπει το ρόμβο του σχήματος (1.α) στο παραλληλόγραμμο του σχήματος (1.β).

ΘΕΜΑ 3 (35 μονάδες) α) Εστω α το προτελευταίο και β το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των 3 πρώτων pixels του 2ου οκταμορίου που θα φωτισθούν στην οθόνη εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Bresenham για το σχεδιασμό κύκλου με κέντρο (α, β) και ακτίνα $r = 5$. Επίσης να δοθούν και τα συμμετρικά pixels που υπολογίζονται με βάση τα 3 προηγούμενα.

β) Εστω το δισδιάστατο παράθυρο που ορίζεται $X_{LEFT} = 10$, $X_{RIGHT} = 40$, $Y_{BOTTOM} = 10$, $Y_{TOP} = 40$. Να βρεθούν οι τομές των ευθυγράμμων τμημάτων $E1((45, 50), (60, 70))$ και $E2((50, 48), (5, 15))$ με το παράθυρο χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Cohen-Sutherland. Σημείωση: Να δικαιολογηθεί με συγκεκριμένα βήματα η απάντησή σας.