

Παραμετρικές Καμπύλες & Επιφάνειες

- Ανάγκη Μαθηματικής Περιγραφής Πολύπλοκων Καμπυλών για επεξεργασία με υπολογιστή:
 - Αυτοκινητιστική & Αεροναυπηγική βιομηχανία από μέσα δεκαετίας 1960.
 - Διάδοση κατασκευαστικών μηχανών καθοδηγούμενων από Η/Υ.
- Λύση: παραμετρικές αναπαραστάσεις καμπυλών και επιφανειών
 - P. de Casteljau, Citroën.
 - P. Bézier, Renault.
- Καμπύλες Bézier:
 - Ορισμός καμπύλης οποιουδήποτε βαθμού με απλό μαθηματικό τρόπο.
 - Χρήση σημείων ελέγχου.
 - Σχήμα εξαρτάται από σημεία ελέγχου.

Παράσταση Καμπυλών

- Καμπύλη: σύνολο σημείων
 - Συνήθως δίνονται από μαθηματικές εξισώσεις.
- Αλγεβρική παράσταση καμπυλών με αλγεβρική εξίσωση:
 - Απλή μορφή $y=f(x)$ π.χ. ευθεία $y=mx+d$.
 - Πεπλεγμένη μορφή $g(x,y)=0$ π.χ. ευθεία $ax+by+c=0$.
- Κλίση επίπεδης καμπύλης: η παράγωγος του y ως προς x $\frac{dy}{dx}$.

Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

- Παραμετρική παράσταση: συντεταγμένες δίνονται με ξεχωριστές εξισώσεις με τη βοήθεια της ανεξάρτητης παραμέτρου t :

$$x=x(t)$$

$$y=y(t)$$

– $t \in (-\infty, +\infty)$ ή περιορίζεται $t \in [a, b]$.

– Για κάθε τιμή του t παίρνουμε ένα σημείο της καμπύλης: $\bar{P}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

- Π.χ. η ευθεία που διέρχεται από $\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ και $\bar{P}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ έχει παραμετρική εξίσωση:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)x_1 + tx_2 \\ y(t) &= (1-t)y_1 + ty_2 \end{aligned} \quad \text{με } t \in (-\infty, +\infty)$$

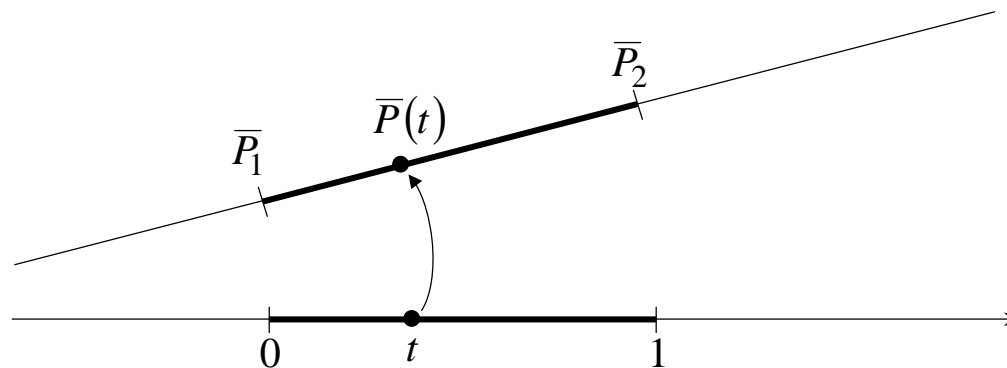
ή σε συνεπτυγμένη μορφή:

$$\bar{P}(t) = (1-t) \cdot \bar{P}_1 + t \cdot \bar{P}_2 \quad \text{με } t \in (-\infty, +\infty)$$

Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

- Ευθύγραμμο τμήμα $\bar{P}_1\bar{P}_2$:

$$\bar{P}(t) = (1-t) \cdot \bar{P}_1 + t \cdot \bar{P}_2 \text{ με } t \in [0, 1]$$
 - Για $t=0$ παίρνουμε \bar{P}_1 και για $t=1$ παίρνουμε \bar{P}_2 .
- Καθώς μεταβάλλεται η t , κινούμαστε πάνω στην ευθεία που ορίζεται από τα \bar{P}_1 και \bar{P}_2 .



- Αλγεβρική μορφή μπορεί να εξαχθεί από παραμετρική, αν απαλείψουμε t .
- Η κλίση δίνεται πάλι από $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

- Πλεονεκτήματα παραμετρικής παράστασης:
 - Περιγραφή κλειστών ή πλειότιμων καμπύλων.
 - Συντεταγμένες ανεξάρτητες μεταξύ τους \Rightarrow άμεση εφαρμογή συσχετισμένων μετασχηματισμών.
 - Εύκολη επέκταση σε περισσότερες διαστάσεις.
 - Ανεξάρτητη από σύστημα συντεταγμένων.

Καμπύλες Bézier

- Η παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος παρεμβάλλει γραμμικά τα \bar{P}_0 και \bar{P}_1

$$\bar{P}(t) = (1-t)\bar{P}_0 + t\bar{P}_1, \quad \text{με } t \in [0, 1]$$

- Κυρτός συνδυασμός των \bar{P}_0 και \bar{P}_1 ($(1-t) + t=1$).

- Τετραγωνικές καμπύλες Bézier μεταξύ $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$:

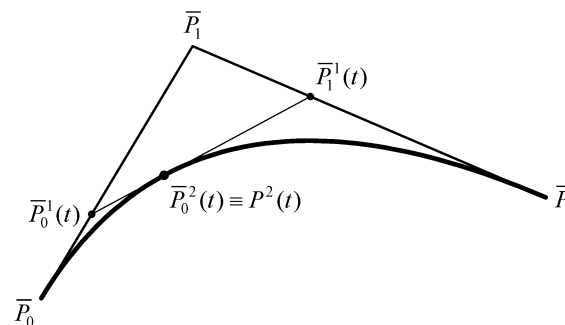
- Εστω γραμμικές παρεμβολές μεταξύ \bar{P}_0, \bar{P}_1 και \bar{P}_1, \bar{P}_2 .

$$\begin{aligned} \bar{P}_0^1(t) &= (1-t)\bar{P}_0 + t\bar{P}_1 \\ \bar{P}_1^1(t) &= (1-t)\bar{P}_1 + t\bar{P}_2 \end{aligned}, \quad t \in [0, 1].$$

- Η γραμμική παρεμβολή των $\bar{P}_0^1(t)$ και $\bar{P}_1^1(t)$ με τον ίδιο λόγο (t), δίνει τετραγωνική συνάρτηση των αρχικών σημείων:

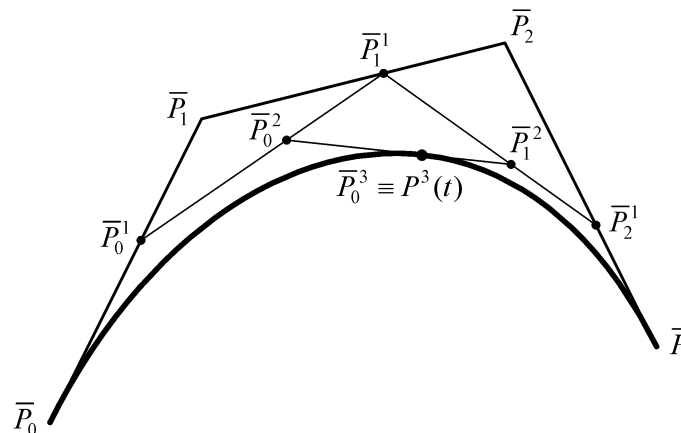
$$\begin{aligned} \bar{P}_0^2(t) &= (1-t)\bar{P}_0^1(t) + t\bar{P}_1^1(t) \\ &= (1-t)^2\bar{P}_0 + 2t(1-t)\bar{P}_1 + t^2\bar{P}_2 \\ &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i} \bar{P}_i \end{aligned}$$

- Τα αρχικά σημεία $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$ ονομάζονται σημεία ελέγχου.



Καμπύλες Bézier Βαθμού n

- Τρία διαδοχικά επίπεδα γραμμικής παρεμβολής τεσσάρων σημείων ελέγχου μας δίνουν καμπύλη Bézier βαθμού 3 $P^3(t)$.



- Γενικά, με $(n+1)$ σημεία ελέγχου $\bar{P}_0, \bar{P}_1 \dots \bar{P}_n$ μπορούμε να κατασκευάσουμε καμπύλη Bézier βαθμού n , $P^n(t)$.

$$P^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \bar{P}_i, \quad \text{με } t \in [0, 1]$$

Υπολογισμός Σημείου Καμπύλης Bézier - De Casteljau

- Παραπάνω ορισμός είναι υπολογιστικά ασύμφορος.
- Αντίθετα τα βήματα γραμμικής παρεμβολής συμφέρουν.
- Αλγόριθμος De Casteljau: εύρεση σημείου καμπύλης Bézier για παραμετρική τιμή t :

– Θέτουμε $\bar{P}_i^0(t) = \bar{P}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

– Επαναληπτική σχέση:

$$\bar{P}_i^r(t) = (1-t) \cdot \bar{P}_i^{r-1}(t) + t \cdot \bar{P}_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$i = 0, 1, \dots, n-r$$

– $\bar{P}_0^n(t) \equiv P^n(t)$ είναι το ζητούμενο σημείο.

– Αυτός ο υπολογισμός καλείται και Τρίγωνο De Casteljau.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{P}_0 & \equiv & \bar{P}_0^0 & \xrightarrow{1-t} & \bar{P}_0^1 & \longrightarrow & \bar{P}_0^2 & \longrightarrow & \bar{P}_0^3 & \equiv & \bar{P}_3(t) \\
 & & & \nearrow t & & & & & & & \\
 \bar{P}_1 & \equiv & \bar{P}_1^0 & \longrightarrow & \bar{P}_1^1 & \longrightarrow & \bar{P}_1^2 & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & & & \\
 \bar{P}_2 & \equiv & \bar{P}_2^0 & \longrightarrow & \bar{P}_2^1 & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & & & \\
 \bar{P}_3 & \equiv & \bar{P}_3^0 & & & & & & & &
 \end{array}$$

Υπολογισμός Σημείου Καμπύλης Bézier - De Casteljau

- Αλγόριθμος De Casteljau: ψευδοκώδικας

```
point deCasteljauPoint (int n, point[] control_pts, float t)
{
  for (i=0; i<=n; i++)
    deCas_pts[i]=control_pts[i];

  for (r=1; r<=n; r++)
    for (i=0; i<=n-r; i++)
      deCas_pts[i]=(1-t)*deCas_pts[i]+t*deCas_pts[i+1];

  return deCas_pts[0];
}
```

- Για να σχεδιάσουμε ολόκληρη την καμπύλη, υπολογίζουμε ένα-ένα τα σημεία για $t = 0(\Delta t)1$ και τα ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα.

Πολυώνυμα Bernstein

- Οι συντελεστές των \bar{P}_i στην εξίσωση της καμπύλης Bézier είναι τα πολυώνυμα Bernstein:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Πολυώνυμα Bernstein βαθμού 2:

$$B_0^2(t) = (1-t)^2$$

$$B_1^2(t) = 2t(1-t)$$

$$B_2^2(t) = t^2$$

- Πολυώνυμα Bernstein βαθμού 3:

$$B_0^3(t) = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3^3(t) = t^3$$

- Καμπύλη Bézier βαθμού n με χρήση πολυωνύμων Bernstein:

$$P^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \bar{P}_i$$

Πολυώνυμα Bernstein - Χρήσιμες Ιδιότητες

- Αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων βαθμού n . Οποιοδήποτε πολυώνυμο $f(t)$ βαθμού n γράφεται:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) c_i$$

όπου c_i κατάλληλοι συντελεστές

- Αρα κάθε πολυωνυμική καμπύλη βαθμού n μπορεί να γραφεί σε μορφή καμπύλης Bézier.
- Για κάθε n ισχύει:

$$B_i^n(t) \geq 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

- Τα πολυώνυμα Bernstein είναι συμμετρικά ως προς t και $(1-t)$:

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t)$$

Ιδιότητες Καμπυλών Bézier

- Προκύπτουν από εξίσωση ορισμού και ιδιότητες πολυωνύμων Bernstein.
- Ιδιότητα κυρτής περιβάλλουσας:
 - Καμπύλη Bézier είναι συσχετισμένος κυρτός συνδυασμός των σημείων ελέγχου.
 - Αρα βρίσκεται μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των σημείων.
 - Χρήσιμη ιδιότητα για έλεγχο σχήματος καθώς και έλεγχο τομής με άλλα σχήματα.
- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς:
 - Αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.
 - Αρα για να μετασχηματίσουμε μια καμπύλη Bézier αρκεί να μετασχηματίσουμε τα σημεία ελέγχου της.
- Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς της παραμέτρου:
 - $t \in [0, 1] \rightarrow u \in [a, b]$
 - $u = a + (b - a)t$
 - $$\bar{P}_i^r(t) = \frac{b-u}{b-a} \bar{P}_i^{r-1}(t) + \frac{u-a}{b-a} \bar{P}_{i+1}^{r-1}(t)$$

Ιδιότητες Καμπυλών Bézier

- Συμμετρία: αν χρησιμοποιήσουμε τα σημεία ελέγχου με αντίστροφη σειρά $\bar{P}_n, \bar{P}_{n-1} \dots \bar{P}_0$ η καμπύλη δεν αλλάζει:
 - Αντιστρέφεται η φορά σχεδίασης.
- Γραμμική ακρίβεια: αν όλα τα σημεία ελέγχου είναι συνευθειακά, η καμπύλη Bézier γίνεται ευθύγραμμο τμήμα.
- Παρεμβολή ακραίων σημείων: η καμπύλη περνά από τα ακραία σημεία \bar{P}_0 και \bar{P}_n για $t = 0$ και $t = 1$.
- Εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα: είναι παράλληλα προς τις ακραίες πλευρές του πολυγώνου ελέγχου:

$$\frac{d}{dt} P^n(0) = n(\bar{P}_1 - \bar{P}_0)$$

$$\frac{d}{dt} P^n(1) = n(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1})$$

- Αν η καμπύλη ορίζεται σε τυχαίο διάστημα $u \in [a, b]$:

$$\frac{d}{du} P^n(a) = \frac{d}{dt} \frac{dt}{du} P^n(0) = \frac{1}{b-a} n(\bar{P}_1 - \bar{P}_0)$$

$$\frac{d}{du} P^n(b) = \frac{d}{dt} \frac{dt}{du} P^n(1) = \frac{1}{b-a} n(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1})$$

$$\text{καθώς } u = a + (b-a)t \Leftrightarrow t = (u-a)/(b-a).$$

Ιδιότητες Καμπυλών Bézier

- Δεύτερες παράγωγοι στα άκρα:

$$\frac{d^2}{dt^2} P^n(0) = n(n-1)(\bar{P}_2 - 2\bar{P}_1 + \bar{P}_0)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} P^n(1) = n(n-1)(\bar{P}_n - 2\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_{n-2})$$

- Αν η καμπύλη ορίζεται σε τυχαίο διάστημα $u \in [a, b]$:

$$\frac{d^2}{du^2} P^n(a) = \frac{1}{(b-a)^2} n(n-1)(\bar{P}_2 - 2\bar{P}_1 + \bar{P}_0)$$

$$\frac{d^2}{du^2} P^n(b) = \frac{1}{(b-a)^2} n(n-1)(\bar{P}_n - 2\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_{n-2})$$

- Ψευδο - τοπικός έλεγχος:

- Δεν υπάρχει τοπικός έλεγχος αφού τα $B_i^n(t)$, που είναι τα βάρη των σημείων ελέγχου, ορίζονται σε όλο το διάστημα της καμπύλης.
- Ομως το $B_i^n(t)$, και συνεπώς το \bar{P}_i , επηρεάζει μέγιστα το τμήμα της καμπύλης γύρω από $t = i/n$.

Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bézier

- Αύξηση “ευελιξίας” καμπύλης Bézier:
 - Με αύξηση βαθμού (αστάθεια, αύξηση πολυπλοκότητας).
 - Με ομαλή συνένωση καμπυλών μικρού βαθμού (συνήθως 3 ή 4).
- Οι πολυωνυμικές καμπύλες $F(t)$ με $t \in [t_0, t_1]$ και $G(t)$ με $t \in [t_1, t_2]$ ενώνονται με συνέχεια C^r στο t_1 αν οι παράγωγοι r τάξης είναι ίσες στο t_1 :

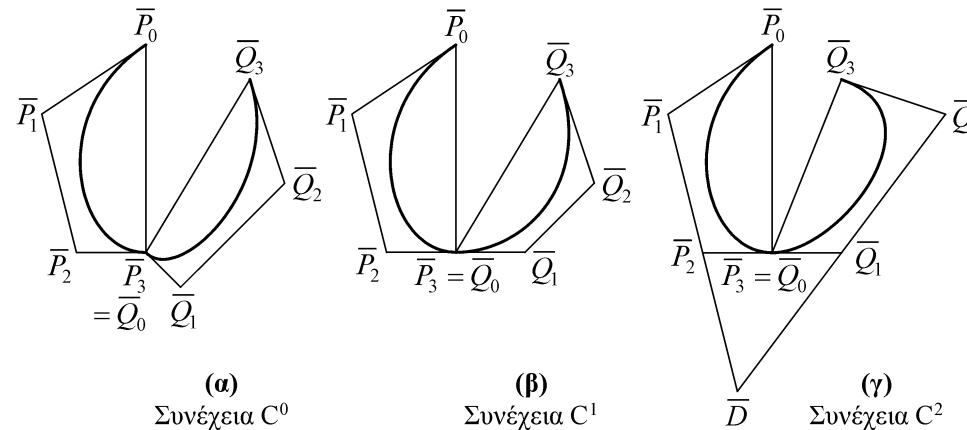
$$F^{(r)}(t_1) = G^{(r)}(t_1)$$
 - $C^r \Rightarrow C^m$ για $0 \leq m < r$
 - Για πολυώνυμο βαθμού k η k -οστή παράγωγος είναι σταθερά και οι μεγαλύτερες είναι 0.
 - Αρα, για πολυώνυμο βαθμού k μας ενδιαφέρει μέχρι C^{k-1} .
- Εστω καμπύλες Bézier $P^n(t), t \in [0, 1]$ και $Q^m(t), t \in [1, 2]$ με σημεία ελέγχου $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$ και $\bar{Q}_0 \dots \bar{Q}_m$ αντίστοιχα. Εστω ότι επιθυμούμε ένωση με C^2 :
 - $C^0 \Rightarrow \bar{P}_n = \bar{Q}_0$
 - $C^1 \Rightarrow n(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1}) = m(\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0) \Leftrightarrow \bar{Q}_1 - \bar{P}_n = \frac{n}{m}(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1})$

(\bar{Q}_1 πρέπει να ανήκει στην ευθεία των \bar{P}_{n-1} και $\bar{P}_n = \bar{Q}_0$ και να βρίσκεται στην απόσταση που ορίζεται)

 - $C^2 \Rightarrow n(n-1)(\bar{P}_n - 2\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_{n-2}) = m(m-1)(\bar{Q}_2 - 2\bar{Q}_1 + \bar{Q}_0)$ (καθορισμός \bar{Q}_2)

Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Βézier

- Παρατηρήσεις:
 - Αν $n=m$, η εξίσωση της C^1 γίνεται $\bar{Q}_1 - \bar{P}_n = \bar{P}_n - \bar{P}_{n-1}$
(δηλ. η απόσταση $|\bar{Q}_1 \bar{P}_n| = |\bar{P}_n \bar{P}_{n-1}|$)
 - Αν $n=m=3$, η εξίσωση της C^2 γίνεται $\bar{Q}_2 - 2\bar{Q}_1 = \bar{P}_1 - 2\bar{P}_2$ ($= \bar{D}$ έστω).
Ισχύει: $|\bar{D} \bar{P}_2| = |\bar{P}_2 \bar{P}_1|$ και $|\bar{D} \bar{Q}_1| = |\bar{Q}_1 \bar{Q}_2|$.



- Κάθε επιπλέον βαθμός συνέχειας που απαιτούμε καθορίζει τη θέση ενός σημείου ελέγχου της δεύτερης καμπύλης (περιορισμός).
 - » Για $n=m=3$ με C^2 η Q έχει ελεύθερο μόνο το \bar{Q}_3 .

Καμπύλες B-Spline

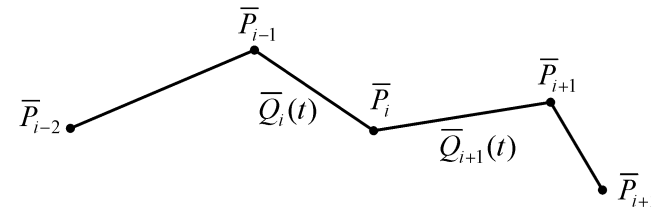
- Spline: καμπύλη που προκύπτει από ένωση επιμέρους καμπυλών με κατάλληλες συνθήκες συνέχειας:
 - Αν επιμέρους καμπύλες είναι βαθμού k , μπορεί να απαιτηθεί ως C^{k-1} .
 - Βαθμός B-Spline = βαθμός επιμέρους καμπυλών.
- B-Spline: ορισμός με $n+1$ σημεία ελέγχου $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$:
 - Πλήθος σημείων ελέγχου είναι ανεξάρτητο από βαθμό k .
 - Εξαρτάται από πλήθος τμημάτων καμπύλης
 - Ορισμός τμημάτων σε παραμετρικά υποδιαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$ που ενώνονται στο $[t_{\min}, t_{\max}]$.
 - Κόμβοι: τιμές t_i της παραμέτρου στα όρια των υποδιαστημάτων.
 - Είναι απαραίτητοι και κόμβοι εκτός διαστήματος $[t_{\min}, t_{\max}]$.

$$t_{\text{first}} \leq \dots \leq t_{\min} \leq \dots \leq t_{\max} \leq \dots \leq t_{\text{last}}$$

- Πλήθος κόμβων εξαρτάται από βαθμό k και από πλήθος σημείων ελέγχου.

Γραμμικές Καμπύλες B-Spline

- Αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα με συνέχεια C^0 .



- Το τμήμα $Q_i(t)$ στο υποδιάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ έχει άκρα τα \bar{P}_{i-1} και \bar{P}_i :

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \bar{P}_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \bar{P}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

- Αντίστοιχη γραμμική παρεμβολής \bar{P}_{i-1} \bar{P}_i για $t \in [t_i, t_{i+1}]$.
- Όχι εύχρηστη (γενική).

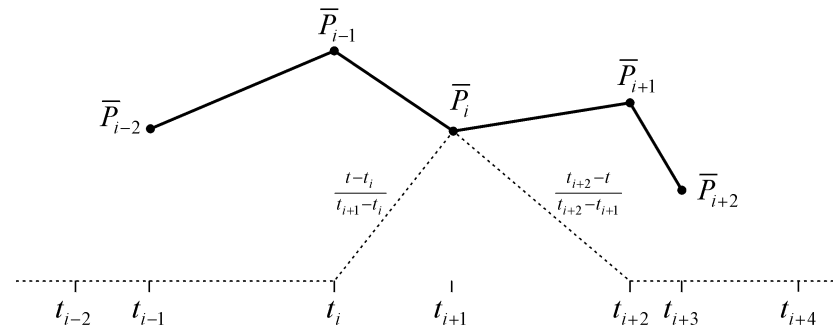
Γραμμικές Καμπύλες B-Spline

- Σημείο \bar{P}_i επηρεάζει 2 τμήματα, τα \bar{Q}_i και \bar{Q}_{i+1}

και

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \bar{P}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \bar{P}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$Q_{i+1}(t) = \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} \bar{P}_i + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} \bar{P}_{i+1}, \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$$



- Αν θέσουμε

$$N_i^1(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

τότε η επίδραση του \bar{P}_i στην καμπύλη είναι $N_i^1(t) \cdot \bar{P}_i$ (ο εκθέτης δηλώνει βαθμό καμπύλης).

Γραμμικές Καμπύλες B-Spline

- Αθροίζοντας τις επιδράσεις όλων των σημείων $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$ παίρνουμε την εξίσωση της γραμμικής B-Spline:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n N_i^1(t) \cdot \bar{P}_i$$

- Πόσοι κόμβοι για $n+1$ σημεία ελέγχου (δηλ. n τμήματα καμπύλης);
 - $Q_i(t) \mid i=1 \dots n$ ενώνει τα \bar{P}_{i-1} και \bar{P}_i για $t \in [t_i, t_{i+1}]$.
 - Αρα το διάστημα ορισμού είναι $[t_1, t_{n+1}]$.
 - Ομως από ορισμούς $N_i^1(t)$ παρατηρούμε ότι χρειάζονται δύο επιπλέον ακραίοι κόμβοι t_0 και t_{n+2} .
 - Έτσι τα \bar{P}_0 και \bar{P}_n επηρεάζουν και αυτά 2 τμήματα καμπύλης.
 - Η τιμή των ακραίων αυτών κόμβων δεν έχει σημασία.

Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline

- Εστω το τμήμα 2^{ου} βαθμού $Q_i(t)$ που ορίζεται στο $[t_i, t_{i+1}]$:
 - Ορίζεται από 3 σημεία ελέγχου: $\bar{P}_{i-2}, \bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i$ με 2 βήματα γραμμικής παρεμβολής.
 - Το πρώτο βήμα παρεμβάλλει τα $\bar{P}_{i-2}, \bar{P}_{i-1}$ και \bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i στα διαστήματα $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ και $[t_i, t_{i+2}]$ αντίστοιχα (και όχι στο $[t_i, t_{i+1}]$ όπως στις Bézier).

$$\bar{Q}_{i-1}^1(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_{i-1}} \bar{P}_{i-2} + \frac{t-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} \bar{P}_{i-1}, \quad t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$$

$$\bar{Q}_i^1(t) = \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_i} \bar{P}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} \bar{P}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+2}]$$

- Το δεύτερο βήμα παρεμβάλλει τα σημεία της πρώτης γραμμικής παρεμβολής $\bar{Q}_{i-1}^1(t)$ και $\bar{Q}_i^1(t)$ στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$.

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \bar{Q}_{i-1}^1(t) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \bar{Q}_i^1(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

- Με αντικατάσταση των \bar{Q}_{i-1}^1 και \bar{Q}_i^1 στην Q_i παίρνουμε έκφραση συναρτήσεων των σημείων ελέγχου (ορίζεται στο $[t_i, t_{i+1}]$).

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_{i-1}} \bar{P}_{i-2} + \left(\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_i} \right) \bar{P}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} \bar{P}_i$$

Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline

- Αν εξετάσουμε 2 διαδοχικά τμήματα B-Spline $Q_i(t)$ με $t \in [t_i, t_{i+1}]$ και $Q_{i+1}(t)$ με $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$ στην κοινή τιμή παραμέτρου $t=t_{i+1}$ παρατηρούμε ότι:

$$Q_i(t_{i+1}) = Q_{i+1}(t_{i+1})$$

$$Q'_i(t_{i+1}) = Q'_{i+1}(t_{i+1}) \quad \text{δηλαδή έχουμε συνέχεια } C^0 \text{ και } C^1.$$

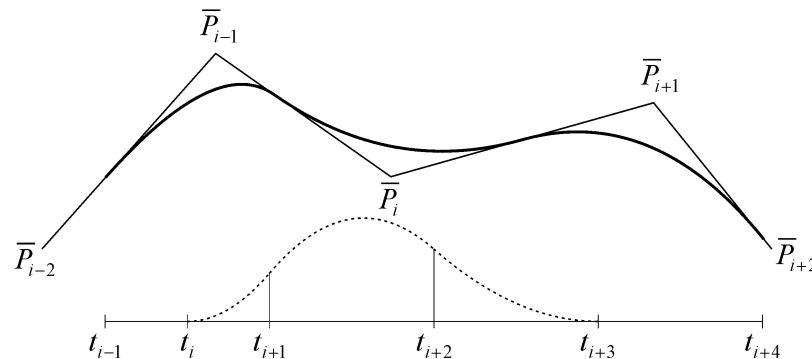
- Θα δώσουμε έκφραση ολόκληρης της τετραγωνικής B-Spline συναρτήσεως των σημείων ελέγχου της:

- Το \bar{P}_i επηρεάζει τα τμήματα $Q_i(t)$, $Q_{i+1}(t)$ και $Q_{i+2}(t)$.

$$Q_i(t) = a_i \bar{P}_{i-2} + b_i \bar{P}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} \bar{P}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$Q_{i+1}(t) = a_{i+1} \bar{P}_{i-1} + \left(\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}} \right) \bar{P}_i + c_{i+1} \bar{P}_{i+1}, \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$$

$$Q_{i+2}(t) = \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}} \bar{P}_i + b_{i+2} \bar{P}_{i+1} + c_{i+2} \bar{P}_{i+2}, \quad t \in [t_{i+2}, t_{i+3}]$$



Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline

– Ορίζουμε:

$$N_i^2(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}, & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

– Οπότε η B-Spline με σημεία ελέγχου τα $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$ γράφεται: $Q(t) = \sum_{i=0}^n N_i^2(t) \cdot \bar{P}_i$

- Πρώτα σημεία ελέγχου είναι τα $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$. Αρα πρώτο τμήμα καμπύλης είναι το $Q_2(t)$ με κόμβους t_1, t_2, t_3, t_4 .
- Αντίστοιχα τελευταίο τμήμα είναι το $Q_n(t)$ που απαιτεί τα $\bar{P}_{n-2}, \bar{P}_{n-1}, \bar{P}_n$ και τους κόμβους $t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}$.
- Γενικά μια τετραγωνική B-Spline με $(n+1)$ σημεία ελέγχου $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$ χρειάζεται $(n+2)$ κόμβους $t_1 \dots t_{n+2}$:
 - Για ικανοποίηση των παραπάνω σχέσεων χρειάζονται και 2 πλασματικοί κόμβοι t_0 και t_{n+3} που δεν επηρεάζουν την καμπύλη.
 - Διάστημα ορισμού της καμπύλης είναι το $[t_2, t_{n+1}]$.

Καμπύλες B-Spline βαθμού k

- Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$N_i^2(t) = \frac{t-t_1}{t_{i+2}-t_i} N_i^1(t) + \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}} N_{i+1}^1(t)$$

- Γενικεύοντας, οι συναρτήσεις B-Spline βαθμού k ορίζονται αναδρομικά:

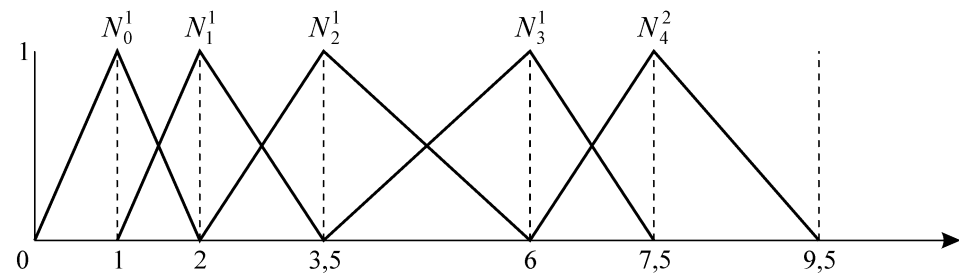
$$N_i^r(t) = \frac{t-t_1}{t_{i+r}-t_i} N_i^{r-1}(t) + \frac{t_{i+r+1}-t}{t_{i+r+1}-t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, k \\ i = 0, 1, \dots, n+k-r \end{array}$$

θέτοντας σαν συνθήκη διακοπής της αναδρομής τις B-Spline βαθμού 0:

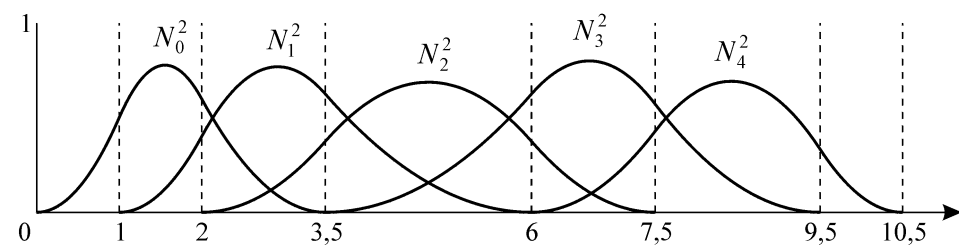
$$N_i^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n+k \quad \text{με αντιμετάθεση του 0 και 1}$$

Καμπύλες B-Spline βαθμού k

- Το $N_i^r(t)$ είναι πολυώνυμο βαθμού r ως προς t :
 - Έχει “τοπική στήριξη” στο διάστημα $[t_i, t_{i+r+1})$ δηλ. είναι μηδενικό εκτός αυτού του διαστήματος.
 - Διαδοχικά $N_i^r(t)$ $[i = 0 \dots n + k - r]$ ενώνονται με συνέχεια C^{r-1} στα σημεία που η παράμετρος t παίρνει τις τιμές των κόμβων.
 - Π.χ. γραμμικές B-Spline ($k=1$) για $n=4$:



- Π.χ. τετραγωνικές B-Spline ($k=2$) για $n=4$:



Καμπύλες B-Spline βαθμού k

- Η κατασκευή ενός τμήματος $Q_i(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ της B-Spline βαθμού k γίνεται με k επίπεδα γραμμικής παρεμβολής:
 - Το πρώτο επίπεδο χρησιμοποιεί $k+1$ σημεία ελέγχου $\bar{P}_{i-k} \dots \bar{P}_i$.
 - Παρεμβολή των σημείων αυτών κατά ζεύγη μας δίνει ευθύγραμμα τμήματα, ένα σημείο των οποίων ορίζεται ως $\bar{Q}_j^1(t)$, $j = i-k+1 \dots i$ με διάστημα ορισμού $[t_j, t_{j+k}]$.
 - Κάθε επόμενο επίπεδο $r=2, 3, \dots, k$ χρησιμοποιεί σημεία του προηγούμενου επιπέδου για την κατασκευή του $\bar{Q}_j^r(t)$, $j = i-k+r \dots i$ με διάστημα ορισμού $[t_j, t_{j+k-r+1}]$.
 - Μετά από k βήματα καταλήγουμε στο $\bar{Q}_i^k = Q_i(t)$ βαθμού k και ορισμένο στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$.
 - Διαδοχικά $Q_i(t)$ ενώνονται με συνέχεια C^{k-1} .
- Μία καμπύλη B-Spline βαθμού k με $(n+1)$ σημεία ελέγχου $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$ γράφεται:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) \cdot \bar{P}_i$$
 - Αποτελείται από $(n-k+1)$ πολυωνυμικά τμήματα βαθμού k ($Q_i(t)$, $i=k \dots n$) καθένα ορισμένο στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$.
 - Συνολικό πεδίο ορισμού είναι το $[t_k, t_{n+1}]$.
 - Συνολικά απαιτούνται $(n+k)$ κόμβοι $t_1 \dots t_{n+k}$ (συν δύο πλασματικοί στα άκρα t_0, t_{n+k+1}).
 - Πρέπει να ισχύουν $t_i \leq t_{i+1}$ και $t_i < t_{i+k}$.

Καμπύλες B-Spline βαθμού k

- Υπολογισμός σημείων B-Spline - Αλγόριθμος de Boor:
 - Επαναληπτική μέθοδος αντίστοιχη de Casteljau για Bézier
 - Βασίζεται στα βήματα γραμμικής παρεμβολής.
- Εστω ότι θέλουμε το σημείο $Q(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ για B-Spline βαθμού k με σημεία ελέγχου $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$

– Θέτουμε: $\bar{Q}_j^0(t) = \bar{P}_j$, $j = i - k, i - k + 1, \dots, i$

$$\text{και } \bar{Q}_j^r(t) = \left(\frac{t_{k-r+1+j} - t}{t_{k-r+1+j} - t_j} \right) \bar{Q}_{j-1}^{r-1}(t) + \left(\frac{t - t_j}{t_{k-r+1+j} - t_j} \right) \bar{Q}_j^{r-1}(t), \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, k \\ j = i - k + r, i - k + r + 1, \dots, i \end{matrix}$$

– Οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $Q(t) = \bar{Q}_i^k(t)$.

- Π.χ. τρίγωνο de Boor για $k=3$.

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{P}_{i-3} & = & \bar{Q}_{i-3}^0 & & & & \\ \bar{P}_{i-2} & = & \bar{Q}_{i-2}^0 & \bar{Q}_{i-2}^1 & & & \\ \bar{P}_{i-1} & = & \bar{Q}_{i-1}^0 & \bar{Q}_{i-1}^1 & \bar{Q}_{i-1}^2 & & \\ \bar{P}_i & = & \bar{Q}_i^0 & \bar{Q}_i^1 & \bar{Q}_i^2 & \bar{Q}_i^3 & = Q(t) \end{array}$$

Καμπύλες B-Spline βαθμού k

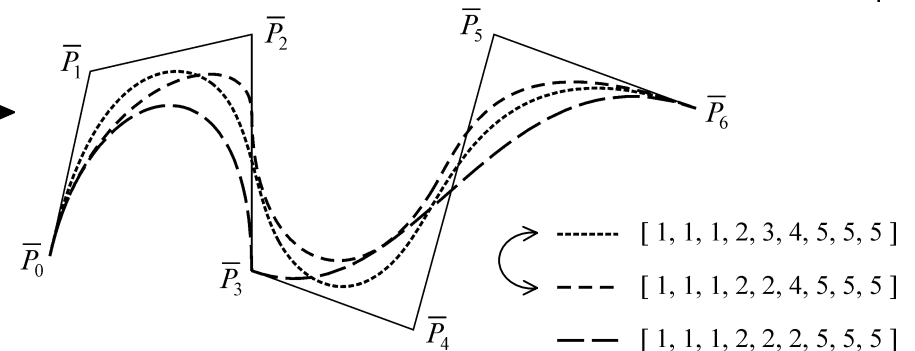
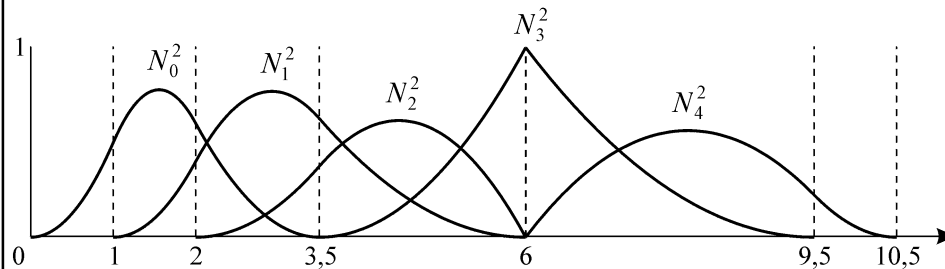
- Αλγόριθμος de Boor:
 - Υλοποίηση με 1Δ πίνακα $k+1$ στοιχείων.
 - Αντίθετα από de Casteljau, τα βάρη συνδυασμού σημείων δεν είναι σταθερά.
- Ψευδοκώδικας υπολογισμού $Q(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ με δείκτες πίνακα από 0 (θέτουμε $m=j-i+k$, οπότε $m: 0 \dots k-r$).
 - Για σχεδιασμό ολόκληρης B-Spline, αρκεί η εύρεση διαδοχικών σημείων με κάποιο βήμα Δt .

```
for (j=i-k; j<=i; j++) {
    m=j-i+k;
    deBoor_pts[m]=control_pts[j];
}

for (r=1; r<=k; r++) {
    for (j=i; j>=i-k+r; j--) {
        m=j-i+k;
        coeff=(t-knots[j])/(knots[k-r+1+j]-knots[j]);
        deBoor_pts[m]=(1-coeff)*deBoor_pts[m-1]+coeff*deBoor_pts[m];
    }
}
```

Ιδιότητες Κόμβων B-Spline

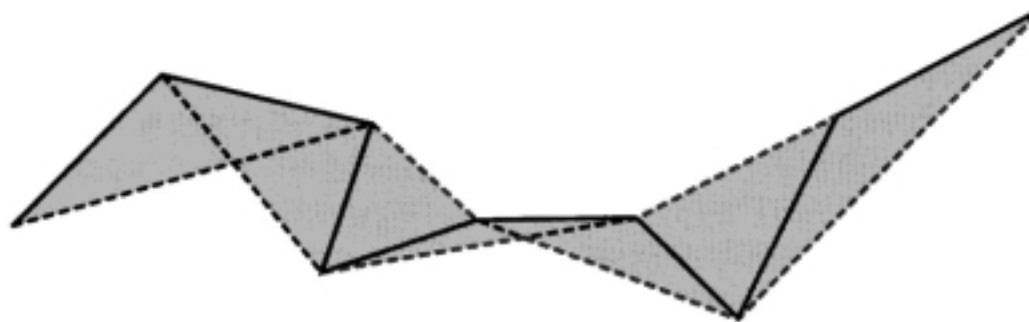
- Εστω B-Spline βαθμού k με τους k πρώτους κόμβους ίσους, $t_1=t_2=\dots=t_k$, (ο πρώτος κόμβος έχει “πολλαπλότητα” k):
 - Αποδεικνύεται τότε ότι $Q(t_1)=Q(t_k)=\bar{P}_0$ δηλ. η B-Spline (που ορίζεται στο $[t_k, t_{n+1}]$) παρεμβάλλει το \bar{P}_0 .
 - Αντίθετα με τις Bézier, οι B-Spline δεν παρεμβάλλουν ακραία σημεία, εκτός αν έχουμε κόμβους πολλαπλότητας k στην αρχή ή στο τέλος.
 - Γενικότερα αν $t_i=t_{i+1}$ η $Q(t_i)$ χάνει μια τάξη συνέχειας.
 - Αν ένας κόμβος έχει πολλαπλότητα r η καμπύλη είναι C^{k-r} στο αντίστοιχο σημείο.
 - Π.χ. τετραγωνικές συναρτήσεις B-Spline με $t_i=t_{i+1}=6$.



- Μέγιστη πολλαπλότητα είναι k αφού διαφορετικά θα έχουμε συνέχεια μικρότερη από C^0 . Άρα $t_i < t_{i+k}$.

Ιδιότητες Καμπυλών B-Spline

- Τοπικός Έλεγχος: το \bar{P}_i επηρεάζει μόνο το διάστημα καμπύλης $[t_i, t_{i+k+1})$ όπου η $N_i^k(t)$ είναι μη μηδενική.
 - Η Bézier έχει μόνο ψευδο-τοπικό έλεγχο.
- Ιδιότητα Κυρτής Περιβάλλουσας: η καμπύλη βρίσκεται μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των σημείων ελέγχου αφού είναι κυρτός συνδυασμός τους:
 - Η συνθήκη αυτή είναι πιο ισχυρή στις B-Spline: η καμπύλη βρίσκεται μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των $(k+1)$ σημείων ελέγχου που ορίζουν κάθε τμήμα της.
 - Π.χ. για $k=2$.

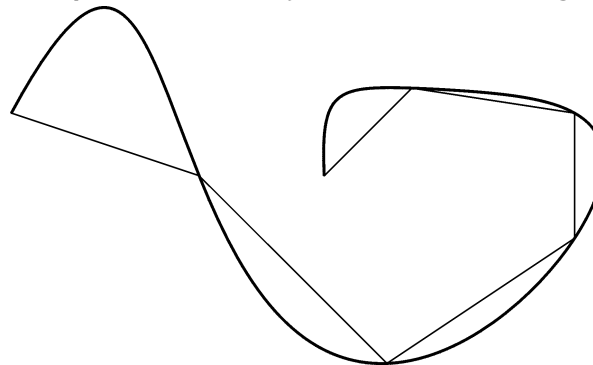


Ιδιότητες Καμπυλών B-Spline

- Αναλλοίωτη σε Συσχετισμένους Μετασχηματισμούς: εφόσον η καμπύλη είναι συσχετισμένος συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.
 - Αρα για να μετασχηματίσουμε μια B-Spline αρκεί να μετασχηματίσουμε τα σημεία ελέγχου της.
- Αναλλοίωτη σε Συσχετισμένους Μετασχηματισμούς της Παραμέτρου της,
 $u = a + (b - a) \cdot t$
- Γραμμική Ακρίβεια: αν τα \bar{P}_i είναι συνευθειακά, τότε η B-Spline γίνεται ευθύγραμμο τμήμα.
- Παρεμβολή Ακραίων Σημείων: με πολλαπλότητα k στους ακραίους κόμβους.
- Αποτελούν Γενίκευση των Καμπυλών Bézier.
- Πρακτικά, συνήθως χρησιμοποιούνται B-Spline χαμηλού βαθμού π.χ. 3.

Καμπύλες Παρεμβολής

- Καμπύλες παρεμβολής: διέρχονται από δοσμένα σημεία $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$:
 - Συγκεκριμένα για δοσμένες τιμές της παραμέτρου t_0, t_1, \dots, t_n έχουμε $P(t_i) = \bar{P}_i, i = 0, 1, \dots, n$
 - (Οι καμπύλες προσέγγισης δεν διέρχονται απαραίτητα από τα \bar{P}_i)
- Παραδοσιακές μέθοδοι παρεμβολής: κατασκευή $P(t)$ σαν πολυωνυμική καμπύλη βαθμού n :
 - Είναι μοναδική.
 - Πρέπει να προσδιορισθούν οι $(n+1)$ συντελεστές του αντίστοιχου πολυωνύμου.
 - Λύση συστήματος εξισώσεων όχι πρακτική.
 - Αλγόριθμοι Aitken και Lagrange προτιμούνται.
- Μειονεκτήματα ύπαρξης ενός υψηλόβαθμου πολυωνύμου:
 - Πολύπλοκοι και αριθμητικά ασταθείς υπολογισμοί.
 - Υψηλόβαθμη καμπύλη παρουσιάζει ταλαντώσεις (σχήμα).



Αλγόριθμος Aitken

- Αναδρομική μέθοδος κατασκευής πολυωνύμου βαθμού n από $(n+1)$ σημεία:
 - Για $n=1$ η παρεμβολή γίνεται με ευθύγραμμο τμήμα.
 - Για $n>1$ χρησιμοποιούνται διαδοχικά βήματα γραμμικής παρεμβολής.

Θέτουμε $\bar{P}_i^0 = \bar{P}_i$ και

$$\bar{P}_i^r(t) = \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i} \bar{P}_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} \bar{P}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, n \\ i = 0, 1, \dots, n - r \end{array}$$

- Το $\bar{P}_0^n(t)$ είναι το σημείο της καμπύλης για την τιμή $t \in [t_0, t_n]$ της παραμέτρου.

Αλγόριθμος Aitken

- Απόδειξη ότι $\bar{P}_0^n(t_i) = \bar{P}_i$ με επαγωγή:

- Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n-1$ σημεία.
- Για n σημεία η $\bar{P}_0^n(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{P}_0^n(t) = \frac{t_n - t}{t_n - t_0} \bar{P}_0^{n-1}(t) + \frac{t - t_0}{t_n - t_0} \bar{P}_1^{n-1}(t)$$

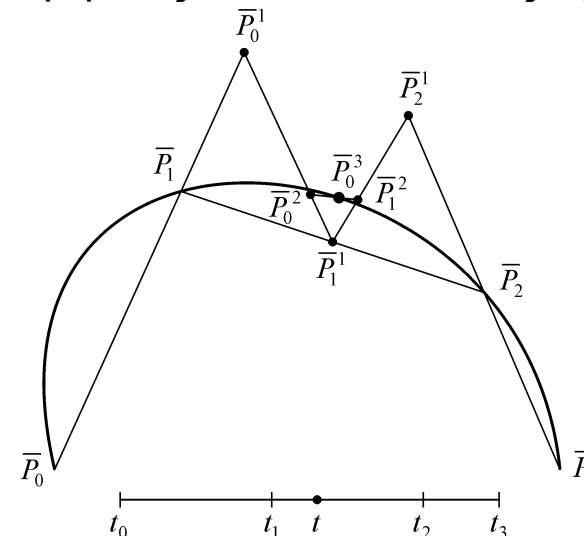
- Από την υπόθεση, οι $\bar{P}_0^{n-1}(t)$ και $\bar{P}_1^{n-1}(t)$ παρεμβάλλουν τα $(n-1)$ σημεία $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_{n-1}$ και $\bar{P}_1 \dots \bar{P}_n$ αντίστοιχα. Άρα:

$$\bar{P}_0^n(t_0) = 1 \cdot \bar{P}_0^{n-1}(t_0) + 0 \cdot \bar{P}_1^{n-1}(t_0) = \bar{P}_0^{n-1}(t_0) = \bar{P}_0$$

$$\bar{P}_0^n(t_n) = 0 \cdot \bar{P}_0^{n-1}(t_n) + 1 \cdot \bar{P}_1^{n-1}(t_n) = \bar{P}_1^{n-1}(t_n) = \bar{P}_n$$

- Για τα υπόλοιπα $t_i, i=1, 2, \dots, n-1$ χρησιμοποιούμε την υπόθεση της επαγωγής $\bar{P}_0^{n-1}(t_i) = \bar{P}_1^{n-1}(t_i) = \bar{P}_i, i=1 \dots n-1$ και το γεγονός ότι οι συντελεστές της $\bar{P}_0^n(t)$ αθροίζουν στη μονάδα.

$$\begin{aligned} \bar{P}_0^n(t_i) &= \frac{t_n - t_i}{t_n - t_0} \bar{P}_0^{n-1}(t_i) + \frac{t_i - t_0}{t_n - t_0} \bar{P}_1^{n-1}(t_i) \\ &= \frac{t_n - t_i}{t_n - t_0} \bar{P}_i + \frac{t_i - t_0}{t_n - t_0} \bar{P}_i = \bar{P}_i \end{aligned}$$



Ιδιότητες Παρεμβολής Aitken

- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς:
 - Αφού όλα τα βήματα του αλγορίθμου είναι γραμμικές παρεμβολές (συσχετισμένες απεικονίσεις).
- Απουσία ιδιότητας κυρτής περιβάλλουσας:
 - Η παράμετρος t δεν ανήκει πάντα στο διάστημα $[t_i, t_{i+r}]$ άρα οι συντελεστές μπορεί να είναι και αρνητικοί (βλέπε προηγούμενο σχήμα).
 - Η καμπύλη δεν βρίσκεται συνολικά μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των σημείων παρεμβολής.
 - Αυτό ισχύει γενικά για λείες καμπύλες παρεμβολής.
- Γραμμική ακρίβεια:
 - Αν τα \bar{P}_i είναι συνευθειακά η καμπύλη παρεμβολής είναι ευθύγραμμο τμήμα.

Πολυώνυμα Lagrange

- Απ' ευθείας υπολογισμός πολυωνύμου παρεμβολής βαθμού n για $(n+1)$ σημεία:

- Τα πολυώνυμα Lagrange $L_i^n(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$, $i = 0, 1, \dots, n$

χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της καμπύλης παρεμβολής: $P(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) \bar{P}_i$

- Τα πολυώνυμα Lagrange ικανοποιούν τη σχέση $L_i^n(t_j) = \delta_{i,j}$

όπου $\delta_{i,j}$ το δέλτα του Kronecker $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

- Δηλαδή το L_i^n μηδενίζεται σε όλους τους κόμβους εκτός από τον t_i για τον οποίο παίρνει τιμή 1.
- Τα πολυώνυμα Lagrange αθροίζουν στην μονάδα \Rightarrow βαρυκεντρικός συνδυασμός σημείων άρα αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετ/μούς.
- Τα πολυώνυμα Lagrange δεν είναι παντού θετικά, άρα δεν ισχύει η ιδιότητα της κυρτής περιβάλλουσας.

Παρεμβολή κατά Τμήματα

- Aitken και Lagrange κατασκευάζουν πολυώνυμα βαθμού n για $(n+1)$ σημεία παρεμβολής:
 - Υπολογιστικά ακριβό.
 - Ταλαντώσεις.
- Μέθοδοι κατά - τμήματα - παρεμβολής χρησιμοποιούν ακολουθία χαμηλόβαθμων παρεμβολών:
 - Υπολογιστικά φθηνό.
 - Μεγάλος έλεγχος μορφής καμπύλης (π.χ. εφαπτόμενης σε κάθε σημείο).
- Κατά - τμήματα - παρεμβολή, εξετάζουμε τριτοβάθμιες:
 - Hermite.
 - B-Spline.

Παρεμβολή Hermite

- Κυβική παρεμβολή Hermite: τριτοβάθμια καμπύλη $P(t)$ μεταξύ \bar{P}_0 και \bar{P}_1 με εφαπτομενικά διανύσματα στα άκρα m_0 και m_1 :

$$P(0) = \bar{P}_0 \quad P'(0) = m_0$$

$$P(1) = \bar{P}_1 \quad P'(1) = m_1$$

- 4 άγνωστοι (κυβική) και 4 δεδομένα, άρα λύνεται.
- Κάθε τριτοβάθμια καμπύλη μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των πολυωνύμων Bernstein, στη μορφή Bézier. Άρα:

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \bar{Q}_i$$

- όπου \bar{Q}_i , $i = 0 \dots 3$ τα σημεία ελέγχου που πρέπει να βρούμε.
- Η καμπύλη Bézier διέρχεται από τα ακραία σημεία της, άρα:

$$\bar{Q}_0 = P(0) = \bar{P}_0$$

$$\bar{Q}_3 = P(1) = \bar{P}_1$$

Παρεμβολή Hermite

- Γνωρίζουμε ότι για τα εφαπτόμενα στα άκρα διανύσματα της καμπύλης Bézier ισχύει:

$$m_0 = P'(0) = 3(\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0) \Leftrightarrow \bar{Q}_1 = \bar{P}_0 + \frac{1}{3}m_0$$

$$m_1 = P'(1) = 3(\bar{Q}_3 - \bar{Q}_2) \Leftrightarrow \bar{Q}_2 = \bar{P}_1 - \frac{1}{3}m_1$$

- Η ζητούμενη καμπύλη είναι:

$$P(t) = (1-t)^3 \bar{P}_0 + 3t(1-t)^2 \left(\bar{P}_0 + \frac{1}{3}m_0 \right) + 3t^2(1-t) \left(\bar{P}_1 - \frac{1}{3}m_1 \right) + t^3 \bar{P}_1$$

ή αναδιατάσσοντάς την συναρτήσει των στοιχείων ορισμού της

$$P(t) = H_0^3(t)\bar{P}_0 + H_1^3(t)m_0 + H_2^3(t)m_1 + H_3^3(t)\bar{P}_1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα πολυώνυμα Hermite 3^{ου} βαθμού

$$H_0^3(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1^3(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_2^3(t) = t^3 - t^2$$

$$H_3^3(t) = -2t^3 + 3t^2$$

Παρεμβολή Hermite

- Αλλαγή παραμετρικού διαστήματος από $t \in [0, 1]$ σε $u \in [a, b]$:
 - Συσχετισμένη αλλαγή παραμέτρου σε $u = (1-t) \cdot a + t \cdot b$.
 - Οι Hermite, αντίθετα από τις Bézier, δεν παραμένουν αναλλοίωτες επειδή συμμετέχει η εφαπτομένη στον ορισμό τους.
 - Για να παραμένει αναλλοίωτη μια καμπύλη Hermite, αποδεικνύεται ότι πρέπει να διαιρέσουμε τα m_0 και m_1 με το $(b-a)$:

$$m_0 = P'(a) = \frac{3(\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0)}{b-a}$$

$$m_1 = P'(b) = \frac{3(\bar{Q}_3 - \bar{Q}_2)}{b-a}$$

- Η Hermite παίρνει τη μορφή:

$$P(u) = \hat{H}_0^3(u)\bar{P}_0 + \hat{H}_1^3(u)m_0 + \hat{H}_2^3(u)m_1 + \hat{H}_3^3(u)\bar{P}_1$$

όπου χρησιμοποιούμε τα μετασχηματισμένα πολυώνυμα Hermite 3^{ου} βαθμού:

$$\hat{H}_0^3(u) = \hat{H}_0^3(t)$$

$$\hat{H}_1^3(u) = (b-a)H_1^3(t)$$

$$\hat{H}_2^3(u) = (b-a)H_2^3(t)$$

$$\hat{H}_3^3(u) = H_3^3(t)$$

Κατά - Τμήματα Παρεμβολή Hermite

- Εστω παρεμβολή μεταξύ $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$ με αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα m_0, m_1, \dots, m_n και τιμές παραμέτρου t_0, t_1, \dots, t_n :

– Αν $P(u), u \in [t_0, t_n]$ η ζητούμενη καμπύλη, θα ισχύει:

$$P(t_i) = \bar{P}_i \text{ και } P'(t_i) = m_i, i = 0, 1, \dots, n$$

- Για κάθε τμήμα παρεμβολής $P_i(u), u \in [t_i, t_{i+1}]$ έχουμε παρεμβολή μεταξύ \bar{P}_i και \bar{P}_{i+1} με ακραία εφαπτομενικά διανύσματα m_i και m_{i+1} άρα η τριτοβάθμια καμπύλη παρεμβολής Hermite είναι:

$$P_i(u) \equiv P(u) = \hat{H}_0^3(u)\bar{P}_i + \hat{H}_1^3(u)m_i + \hat{H}_2^3(u)m_{i+1} + \hat{H}_3^3(u)\bar{P}_{i+1}, u \in [t_i, t_{i+1}]$$

όπου

$$\hat{H}_0^3(u) = H_0^3(t)$$

$$\hat{H}_1^3(u) = (t_{i+1} - t_i)H_1^3(t)$$

$$\hat{H}_2^3(u) = (t_{i+1} - t_i)H_2^3(t)$$

$$\hat{H}_3^3(u) = H_3^3(t)$$

με $t = (u - t_i)/(t_{i+1} - t_i)$ την τοπική παράμετρο.

Κατά - Τμήματα Παρεμβολή Hermite

- Εφαπτόμενα διανύσματα δεν δίνονται πάντα στην πράξη:
 - Ανάγκη χρήσης “λογικών” εφαπτόμενων διανυσμάτων και δυνατότητα μεταβολής τους από χρήστη.
- Μέθοδος FMILL θέτει m_i στο \bar{P}_i παράλληλο στην ευθεία που ορίζεται από τα \bar{P}_{i-1} και \bar{P}_{i+1} :

$$m_i = \bar{P}_{i+1} - \bar{P}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

- Εξασφαλίζει C^1 συνέχεια στις ενώσεις.
- Δεν μπορεί να υπολογίσει τα m_0 και m_n .
- Η καμπύλη που δημιουργείται ονομάζεται Catmull - Rom spline.

Κατά - Τμήματα Παρεμβολή B-Spline

- Ζητείται τριτοβάθμια B-Spline καμπύλη $Q(t)$ που να παρεμβάλλει τα σημεία $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$ στις αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου $t_0 \dots t_n$:

$$Q(t_i) = \bar{P}_i, \quad i = 0 \dots n$$

- Αν τα \bar{P}_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για τα t_i (αύξουσα σειρά).
- Για να περνά η $Q(t)$ από τα \bar{P}_0 και \bar{P}_n πρέπει να έχουμε πολλαπλότητα 3 στους ακραίους κόμβους: $t_{-2} = t_{-1} (= t_0)$ και $(t_n =) t_{n+1} = t_{n+2}$.
- Πρέπει να προσδιοριστούν τα σημεία ελέγχου της $Q(t)$ δηλ. τα $\bar{Q}_i, i = -3, -2, \dots, (n-1)$.
 - Η τριτοβάθμια B-Spline με $n+1$ σημεία ελέγχου $\bar{Q}_0 \dots \bar{Q}_n$ έχει $n+3$ κόμβους $t_1 \dots t_{n+3}$.
 - Άρα αφού έχουμε τους $n+5$ κόμβους $t_{-2} \dots t_{n+2}$, απαιτούνται τα $n+3$ παραπάνω σημεία ελέγχου.
- Από την εξίσωση ορισμού B-Spline έχουμε:
$$\bar{P}_j = Q(t_j) = \sum_{i=-3}^{n-1} N_i^3(t_j) \cdot \bar{Q}_i$$

(για τα ακραία σημεία η σχέση απλοποιείται κατευθείαν αφού γνωρίζουμε ότι $\bar{Q}_{-3} = \bar{P}_0$ και $\bar{Q}_{n-1} = \bar{P}_n$).

- Τελικά έχουμε $n+1$ εξισώσεις με $n+3$ αγνώστους (τα \bar{Q}_i).
- Προσθέτουμε 2 ακόμα περιορισμούς στα 2 ακραία άγνωστα σημεία (τα \bar{Q}_{-2} και \bar{Q}_{n-2}) και λύνουμε το σύστημα.

Παραμετροποίηση Καμπύλων Παρεμβολής

- Ως τώρα υποθέσαμε ότι δίνονται τα σημεία παρεμβολής \bar{P}_i και οι κόμβοι t_i :
 - Συνήθως ο χρήστης απαιτεί μια ομαλή καμπύλη που να περνά από τα \bar{P}_i και δεν ενδιαφέρεται για τα t_i .
- Μια απλή λύση είναι η χρήση ισαπέχοντων κόμβων.
- Αν λάβουμε όμως υπ' όψη τη γεωμετρία των σημείων παίρνουμε καλύτερα αποτελέσματα.
 - Π.χ. παραμετροποίηση μήκους χορδής (απόσταση μεταξύ t_i εξαρτάται από απόσταση μεταξύ \bar{P}_i).

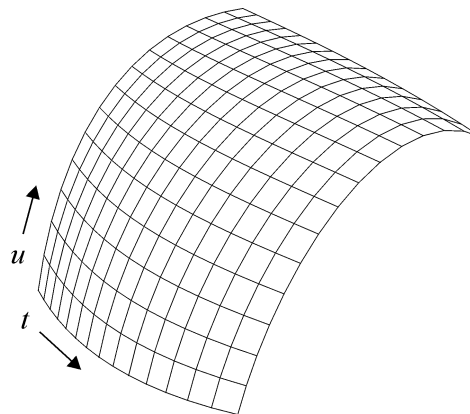
$$\frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} = \frac{|\bar{P}_{i+2} - \bar{P}_{i+1}|}{|\bar{P}_{i+1} - \bar{P}_i|}$$

Παραμετρικές Επιφάνειες

- Παραμετρική μορφή επιφάνειας:
 - Περιλαμβάνει 2 παραμέτρους:

$$\begin{cases} x = x(t, u) \\ y = y(t, u) \\ z = z(t, u) \end{cases}$$

- Η μία παράμετρος διαγράφει μία καμπύλη ενώ η δεύτερη μετακινεί αυτή την καμπύλη στο χώρο.
- Η καμπύλη που αντιστοιχεί σε σταθερό u ή t ονομάζεται ισοπαραμετρική καμπύλη (ισοϋψείς).



Επιφάνειες Bézier Τανυστικό Γινόμενο

- Εστω αρχική καμπύλη βαθμού m ως προς t με $(m+1)$ σημεία ελέγχου $\bar{P}_i, i = 0 \dots m$:

$$P^m(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \bar{P}_i, \quad t \in [0, 1]$$

- Εστω ότι το κάθε \bar{P}_i διαγράφει καμπύλη βαθμού n ως προς u με σημεία ελέγχου $\bar{P}_{ij}, j = 0 \dots n$:

$$P_i^n(u) = \sum_{j=0}^n B_j^n(u) \bar{P}_{ij}, \quad u \in [0, 1]$$

- Τότε κάθε σημείο της αρχικής καμπύλης διαγράφει καμπύλη βαθμού n και παράγεται η επιφάνεια Bézier τανυστικό γινόμενο:
 - Η εξίσωση της επιφάνειας λαμβάνεται με αντικατάσταση του \bar{P}_i από το $P_i^n(u)$ στην εξίσωση της αρχικής καμπύλης:

$$\begin{aligned} P^{m,n}(t,u) &= \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \left(\sum_{j=0}^n B_j^n(u) \bar{P}_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(t) B_j^n(u) \bar{P}_{ij}, \quad t \in [0, 1], \quad u \in [0, 1] \end{aligned}$$

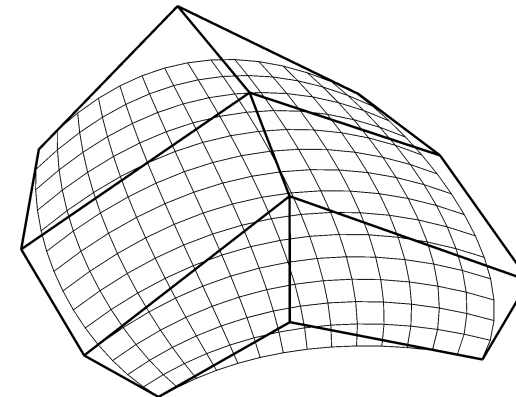
- Η αρχική καμπύλη είναι η ισοπαραμετρική καμπύλη για $u=0$ με σημεία ελέγχου τα $\bar{P}_i = \bar{P}_{i0}, i = 0 \dots m$

Επιφάνειες Bézier Τανυστικό Γινόμενο

- Οι καμπύλες Bézier που χρησιμοποιήθηκαν για τον ορισμό της επιφάνειας έχουν συνολικά $(m+1) \times (n+1)$ σημεία ελέγχου \bar{P}_{ij} , $i = 0 \dots m$, $j = 0 \dots n$:
 - Αυτά ονομάζονται σημεία ελέγχου της επιφάνειας Bézier:

		$u \rightarrow$			\dots	
t	\downarrow	\bar{P}_{00}	\bar{P}_{01}	\dots	\bar{P}_{0n}	
		\bar{P}_{10}	\bar{P}_{11}	\dots	\bar{P}_{1n}	
		\vdots	\vdots	\dots	\vdots	
		\bar{P}_{m0}	\bar{P}_{m1}	\dots	\bar{P}_{mn}	

- Οι ισοπαραμετρικές καμπύλες για $u=0$, $u=1$, $t=0$ και $t=1$ ονομάζονται συνοριακές καμπύλες της επιφάνειας.
- Παράδειγμα επιφάνειας Bézier βαθμών 2 και 3.



Υπολογισμός Σημείου Επιφάνειας Bézier

- Αλγόριθμος de Casteljau για υπολογισμό $P^{m,n}(t, u)$
 - Εφαρμογή de Casteljau σε κάθε γραμμή του πίνακα σημείων ελέγχου για το δεδομένο u δίνει $(m+1)$ σημεία.
 - Εφαρμογή de Casteljau στα $(m+1)$ νέα σημεία για το δεδομένο t δίνει το σημείο της επιφάνειας.

```
point deCasteljauSurfacePoint(int m, int n,  
                             point[][] control_pts float t, float u)  
{  
    point[] temp_pts;  
    point[] bez_pts;  
  
    for (i=0; i<=m; i++) {  
        for (j=0; j<=n; j++)  
            temp_pts[j]=control_pts[i][j];  
        bez_pts[i]=deCasteljauPoint(n, temp_pts, u);  
    }  
    return deCasteljauPoint(m, bez_pts, t);  
}
```


Ιδιότητες Επιφανειών Bézier

- Προκύπτουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες των καμπύλων Bézier.
- Ιδιότητα κυρτής περιβάλλουσας.
 - Αφού είναι κυρτός συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(t) B_j^n(u) = 1$$

- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς.
- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς παραμέτρων.
- Συνοριακές καμπύλες: λαμβάνονται από τις ακραίες γραμμές και στήλες του πίνακα των σημείων ελέγχου.
 - Τα 4 γωνιακά σημεία ελέγχου βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια.
- Υπάρχουν συναρτήσεις παραγώγων και κανονικού διανύσματος για κάθε σημείο (t, u) της επιφάνειας.
- Ψευδο-τοπικός έλεγχος: μέγιστη επιροή \bar{P}_{ij} στις τιμές $(t, u) = (i/m, j/n)$ των παραμέτρων.

Επιφάνειες B-Spline Τανυστικό Γινόμενο

- Επιφάνειες Bézier έχουν ανάλογες ιδιότητες (άρα και μειονεκτήματα) με καμπύλες Bézier.
- Επιφάνειες B-Spline τανυστικό γινόμενο βαθμού k ως προς t και l ως προς u ορίζονται ανάλογα με επιφάνειες Bézier:
 - Συνενώνονται με C^{k-1} ως προς t και C^{l-1} ως προς u .
 - Χρήση πίνακα $(m+1) \times (n+1)$ σημείων ελέγχου \bar{P}_{ij} , $i = 0 \dots m$, $j = 0 \dots n$ (τα m και n είναι ανεξάρτητα από τα k και l).

$$Q^{m,n}(t,u) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_i^k(t) N_j^l(u) \bar{P}_{ij}$$

- Ακολουθίες $(m+k)$ κόμβων ως προς t και $(n+l)$ κόμβων ως προς u (ανεξάρτητες μεταξύ τους) t_1, t_2, \dots, t_{m+k} u_1, u_2, \dots, u_{n+l}
- Ανάγκη πλασματικών κόμβων $t_0, t_{m+k+1}, u_0, u_{n+l+1}$ για ορισμούς.
- Πεδίο ορισμού $[t_k, t_{m+1}] \times [u_l, u_{n+1}]$.

- Στοιχεία ελέγχου επιφάνειας B-Spline:

	u_1	\dots	u_n	\dots	u_{n+l}
	\bar{P}_{00}	\bar{P}_{01}	\dots	\bar{P}_{0n}	
t_1	\bar{P}_{10}	\bar{P}_{11}	\dots	\bar{P}_{1n}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
t_m	\bar{P}_{m0}	\bar{P}_{m1}	\dots	\bar{P}_{mn}	
\vdots					
t_{m+k}					

- Υπολογισμός σημείου επιφάνειας $Q^{m,n}(t,u)$ με διπλή εφαρμογή αλγορίθμου de Boor.

Ιδιότητες Επιφανειών B-Spline

- Ιδιότητες κόμβων: αντίστοιχες με καμπύλες B-Spline.
 - Π.χ. αν οι k πρώτοι κόμβοι ως προς t είναι ίσοι, η επιφάνεια παρεμβάλλει την ισοπαραμετρική καμπύλη του $t = t_0 = t_k$.
- Παραμετροποίηση πολύ πιο δύσκολη από καμπύλες B-Spline:
 - Επειδή υπάρχουν μόνο 2 ακολουθίες κόμβων t και u .
 - Π.χ. για παραμετροποίηση μήκους χορδής, ποια από όλες τις καμπύλες θα επιλέξουμε;
 - Μέσος όρος δεν δίνει καλά αποτελέσματα αν διαδοχικές καμπύλες έχουν μεγάλη διαφορά.
- Τοπικός έλεγχος: \bar{P}_{ij} επηρεάζει το τμήμα καμπύλης $[t_i, t_{i+k+1}) \times [u_j, u_{j+l+1})$.
- Ιδιότητα κυρτής περιβάλλουσας:
 - Αφού η επιφάνεια B-Spline είναι κυρτός συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.
 - Στις B-Spline η ιδιότητα αυτή είναι πιο ισχυρή: ένα σημείο της επιφάνειας βρίσκεται μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των $(k+1) \times (l+1)$ σημείων υπολογισμού του.
 - Αρα η επιφάνεια βρίσκεται μέσα στην ένωση αυτών των κυρτών περιβαλλουσών.
- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς.
- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς των παραμέτρων της.

Παρεμβολή με Επιφάνειες B-Spline

- Εστω παρεμβολή πλέγματος σημείων του τρισδιάστατου χώρου με δικυβικές επιφάνειες B-Spline τανυστικό γινόμενο:
 - $(m+1) \times (n+1)$ σημεία \bar{P}_{ij} , $i = 0 \dots m$, $j = 0 \dots n$ προς παρεμβολή με τις ακολουθίες παραμέτρων t_i , $i = 0 \dots m$, u_j , $j = 0 \dots n$.
 - Ζητείται B-Spline επιφάνεια $Q(t, u)$:

$$Q(t_i, u_j) = \bar{P}_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, m \\ j = 0, 1, \dots, n \end{array}$$

- Παρεμβολή επιτυγχάνεται με γενίκευση μεθόδου παρεμβολής B-Spline καμπύλης.

Επιφάνειες Τανυστικό Γινόμενο - Γενικά

- Έχουν απλή μαθηματική μορφή και προκύπτουν εύκολα σαν γενίκευση των αντίστοιχων καμπύλων.
- Κύριο μειονέκτημα: ανάγκη τετραγωνικής διάταξης σημείων ελέγχου.
 - Ειδικά για τις B-Spline πρέπει να έχουν και σχετικά ομοιόμορφη κατανομή, λόγω της μοναδικής παραμετροποίησης σε κάθε κατεύθυνση.