ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Τελεστών

Ενότητα: Τοπολογίες στον $\mathcal{B}(H)$

Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

8.1 Τοπολογίες στον $\mathcal{B}(H)$

Ο χώρος $\mathcal{B}(H)$, εφοδιασμένος με την νόρμα τελεστή, είναι βέβαια χώρος Banach. Όμως, επειδή αποτελείται από τελεστές που δρούν σ'έναν άλλον χώρο, εφοδιάζεται και με άλλες τοπολογίες, πιο στενά συνδεδεμένες με την δράση του στον χώρο H.

8.1.1 Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (SOT)

Ορισμός 8.1.1. *Έστω H χώρος Hilbert. Η **ισχυρή τοπολογία τελεστών (strong operator topology, SOT)** στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο στον H. Δηλαδή ένα δίκτυο (T_i) από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T ως προς την SOT αν και μόνον αν $\|T_i x - Tx\| \to 0$ για κάθε $x \in H$.*

Μια βάση περιοχών ενός $A \in \mathcal{B}(H)$ για την SOT είναι η οικογένεια

$$\mathcal{V} \equiv \{V(A, \epsilon, x_1, x_2, \ldots, x_n) : \epsilon > 0,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in H,\ n \in \mathbb{N}\}$$

όπου

$$V(A, \epsilon, x_1, \ldots, x_n) = \{T \in \mathcal{B}(H) : \|(T - A)x_k\| < \epsilon, k = 1, \ldots, n\}.$$

Για τεχνικούς λόγους, θα μας είναι επίσης χρήσιμη μια άλλη βάση περιοχών για την ίδια τοπολογία:

$$\mathcal{W} \equiv \{W(A, \epsilon, x_1, x_2, \ldots, x_n) : \epsilon > 0,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in H,\ n \in \mathbb{N}\}$$

όπου

$$W(A, \epsilon, x_1, \ldots, x_n) = \{T \in \mathcal{B}(H) : \sum_{k=1}^{n} \|(T - A)x_k\|^2 < \epsilon^2\}.$$

Οι δύο βάσεις ορίζουν την ίδια τοπολογία. Πράγματι, από τις ανισότητες

$$\max\{|a_k|^2 : k = 1, \ldots, n\} \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq n \max\{|a_k|^2 : k = 1, \ldots, n\}$$

έπεται άμεσα ότι

$$W(A, \epsilon, x_1, \ldots, x_n) \subseteq V(A, \epsilon, x_1, \ldots, x_n) \subseteq W(A, n^{1/2}\epsilon, x_1, \ldots, x_n)$$

επομένως οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται. Είναι προφανές ότι ένα δίκτυο (T_i) του $\mathcal{B}(H)$ συγκλίνει στον $A \in \mathcal{B}(H)$ ως προς την τοπολογία αυτή αν και μόνον αν $\|T_i x - Ax\| \to 0$ σε κάθε σημείο x του H.

Η SOT είναι ασθενέστερη από την τοπολογία της νόρμας (αν $\|T_i\| \to 0$ τότε $\|T_i x\| \to 0$ για κάθε $x \in H$). Μάλιστα είναι γνήσια ασθενέστερη αν (και μόνον αν) ο H είναι απειροδιάστατος. Πράγματι αν (e_n) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία και ορίσουμε τον τελεστή T_n από την σχέση $T_n x = \langle x, e_n \rangle e_1$ $(x \in H)$, τότε $\|T_n x\| = |\langle x, e_n \rangle| \to 0$ για κάθε x, άρα η (T_n) συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT, αλλά όχι ως προς την νόρμα γιατί $\|T_n\| = 1$ για κάθε n.

Η SOT είναι τοπολογία Hausdorff. Πράγματι, αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $A \neq B$, υπάρχει $x \in H$ ώστε $\|Ax - Bx\| \equiv 2\delta > 0$. Τότε τα σύνολα $V(A, \delta, x)$ και $V(B, \delta, x)$ είναι SOT-ανοικτά και διαχωρίζουν τα A και B.

Δεν είναι όμως μετρικοποιήσιμη (εκτός βέβαια αν $\dim H < \infty$):

Πρόταση 8.1.2. *Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert. Υπάρχει υποσύνολο $\mathcal{E}$ του $\mathcal{B}(H)$ ώστε $0 \in \overline{\mathcal{E}}^{SOT}$ αλλά καμμιά ακολουθία του $\mathcal{E}$ δεν συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT. Επομένως η SOT δεν είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία.* [1]

Απόδειξη. Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H και P_n η ορθή προβολή στον υπόχωρο $[e_n]$. Θέτουμε $\mathcal{E} = \{\sqrt{n}P_n : n \in N\}$. Εφόσον $\|\sqrt{n}P_n\| \to \infty$ δεν υπάρχει ακολουθία στο $\mathcal{E}$ που να συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT. Πράγματι, κάθε SOT-συγκλίνουσα ακολουθία είναι κατά σημείο φραγμένη και συνεπώς, από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος, είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Ισχυριζόμαστε όμως ότι $0 \in \overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{SOT}}$. Πράγματι, αν όχι, θα υπήρχε μια SOT-περιοχή V του 0 με $\mathcal{E} \cap V = \emptyset$. Η V περιέχει μια βασική περιοχή της μορφής

$$W = \{T \in \mathcal{B}(H) : \sum_{k=1}^{m} \|Tx_k\|^2 < \varepsilon^2\}$$

Αφού $\mathcal{E} \cap W = \emptyset$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο τελεστής $\sqrt{n}P_n$ δεν ανήκει στην W, άρα $\sum_{k=1}^{m} \|\sqrt{n}P_n x_k\|^2 \geq \varepsilon^2$, οπότε $\sum_{k=1}^{m} n|\langle x_k, e_n\rangle|^2 \geq \varepsilon^2$. Έπεται από την ανισότητα Bessel ότι

$$\sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_k, e_n\rangle|^2 \geq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

άτοπο. □

Είναι φανερό από τον ορισμό ότι η SOT είναι **τοπολογία γραμμικού χώρου** δηλαδή ότι οι γραμμικές πράξεις

$$(\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) \times (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) : \ (A, B) \longrightarrow A + B$$

και

$$(\mathbb{C}, |.|) \times (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) : \ (\lambda, A) \longrightarrow \lambda A$$

είναι συνεχείς. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τον πολλαπλασιασμό (την σύνθεση) τελεστών:

Πρόταση 8.1.3. *Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert.*

(i) Ο πολλαπλασιασμός

$$(\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) \times (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) : \ (A, B) \longrightarrow AB$$

δεν είναι συνεχής.

(ii) Όμως, για κάθε $r > 0$, ο περιορισμός του

$$(\mathcal{B}(H)_r, \mathrm{SOT}) \times (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) : \ (A, B) \longrightarrow AB$$

(όπου $\mathcal{B}(H)_r = \{T \in \mathcal{B}(H) : \|T\| \leq r\}$) είναι συνεχής.

*(iii) Ο πολλαπλασιασμός είναι **ακολουθιακά συνεχής**, δηλαδή αν $(A_n), (B_n)$ είναι ακολουθίες με $A_n \xrightarrow{\mathrm{SOT}} A$ και $B_n \xrightarrow{\mathrm{SOT}} B$ τότε $A_nB_n \xrightarrow{\mathrm{SOT}} AB$.*

*(iv) Ο πολλαπλασιασμός είναι **χωριστά συνεχής**, δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ οι απεικονίσεις*

$$L_A : (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) : B \longrightarrow AB$$

και

$$R_A : (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \mathrm{SOT}) : B \longrightarrow BA$$

είναι συνεχείς.

[1] ούτε καν πρώτη αριθμήσιμη, δηλαδή το 0 δεν έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών

Απόδειξη. (i) Θα κατασκευάσουμε δύο δίκτυα (A_F) και (B_F) που καθένα συγκλίνει SOT στο 0, αλλά το δίκτυο $(A_F B_F)$ δεν συγκλίνει SOT στο 0.

Το σύνολο δεικτών θα είναι το σύνολο $\mathcal{X}$ των υποχώρων F του H που έχουν πεπερασμένη διάσταση ($\dim F \equiv n_F$), διατεταγμένο από την σχέση του περιέχεσθαι. Για κάθε $F \in \mathcal{X}$, θέτουμε $A_F = n_F P_F^{\perp}$ (όπου $P_F^{\perp}$ η ορθή προβολή στον υπόχωρο $F^{\perp}$).

Επίσης, επιλέγουμε μια μερική ισομετρία U_F με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο έναν υπόχωρο[2] του $F^{\perp}$ και θέτουμε $B_F = \frac{1}{n_F} U_F$.

Ισχυριζόμαστε ότι $A_F \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} 0$. Πράγματι, έστω $x \in H$ και $\epsilon > 0$. Αν $F_o = [x] \in \mathcal{X}$, τότε για κάθε $F \in \mathcal{X}$ με $F \supseteq F_o$ έχουμε $P_F^{\perp} x = 0$ άρα $\|A_F x\| = 0 < \epsilon$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\|B_F\| \longrightarrow 0$ (άρα και $B_F \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} 0$). Πράγματι, αν $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $F_o \in \mathcal{X}$ με $\frac{1}{\dim F_o} < \epsilon$, οπότε για κάθε $F \in \mathcal{X}$ με $F \supseteq F_o$ έχουμε $\|B_F\| = \frac{1}{\dim F} < \epsilon$.

Όμως, αν $x \in H$, $x \neq 0$, τότε $A_F B_F x \nrightarrow 0$. Πράγματι, $A_F B_F = P_F^{\perp} U_F = U_F$ γιατί $U_F(H) \subseteq F^{\perp}$. Επομένως αν $F_o = [x]$ τότε για κάθε $F \in \mathcal{X}$ με $F \supseteq F_o$ έχουμε $\|U_F x\| = \|x\|$ άρα $\|U_F x\| \nrightarrow 0$.

(ii) Αν τα δίκτυα (A_i) και (B_i) τείνουν στο 0 ως προς την SOT και επιπλέον το πρώτο είναι φραγμένο[3], $\|A_i\| \leq r$ για κάθε i, τότε για κάθε $x \in H$

$$\|A_i B_i x\| \leq \|A_i\|.\|B_i x\| \leq r\|B_i x\| \longrightarrow 0,$$

άρα $A_i B_i \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} 0$.

(iii) Αν οι ακολουθίες (A_n) και (B_n) τείνουν στο 0 ως προς την SOT, τότε η A_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη (όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 8.1.2), άρα $A_n B_n \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} 0$ από το (ii).

(iv) Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και $B_i \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} B$ τότε από το (ii) έχουμε $AB_i \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} AB$. Επίσης για κάθε $x \in H$ έχουμε $B_i(Ax) \longrightarrow B(Ax)$ άρα $B_i A \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} BA$. □

Πρόταση 8.1.4. *Αν H είναι απειροδιάστατος χώρος Hilbert, η ενέλιξη*

$$(\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) : A \longrightarrow A^*$$

δεν είναι (ούτε ακολουθιακά) συνεχής.

Για την απόδειξη, αν $H = \ell^2$, ένα κατάλληλο παράδειγμα είναι η n-οστή δύναμη του τελεστή της μετατόπισης αριστερά. Το παράδειγμα μεταφέρεται εύκολα σε έναν αυθαίρετο χώρο Hilbert:

Παράδειγμα 8.1.5. *Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον H, ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$*

$$T_n x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_{k-n}.$$

Τότε $T_n \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} 0$, ενώ $T_n^* \stackrel{\text{SOT}}{\nrightarrow} 0$.

[2] επιλέγουμε μια ορθοκανονική βάση $x_1, \dots, x_{n_F}$ του F και ένα τυχαίο ορθοκανονικό σύνολο $\{y_1, \dots, y_{n_F}\} \subseteq F^{\perp}$ (αυτό είναι δυνατόν γιατί $\dim F \leq \dim F^{\perp}$) και ορίζουμε την U_F από τις σχέσεις $U_F x_k = y_k$, $k = 1, \dots, n_F$.

[3] Παρατηρούμε όμως ότι, όπως φαίνεται από το παράδειγμα από το (i), το συμπέρασμα δεν ισχύει αν το δεύτερο δίκτυο είναι φραγμένο, έστω και αν $\|B_i\| \to 0$.

Πράγματι,

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

και συνεπώς $\|T_n x\| \to 0$.

Ελέγχεται όμως εύκολα ότι $T_n^* e_1 = e_{n+1}$, άρα $\|T_n^* e_1\| = 1$ για κάθε n και συνεπώς $T_n^* e_1 \nrightarrow 0$.

8.1.2 Η ασθενής τοπολογία τελεστών (WOT)

Αν $x, y \in H$, θέτουμε

$$\omega_{x,y} : \mathcal{B}(H) \longrightarrow \mathbb{C} : T \longrightarrow \langle Tx, y\rangle.$$

Η ανισότητα $|\langle Tx, y\rangle| \le \|T\|\|x\|\|y\|$ δείχνει ότι η $\omega_{x,y}$ είναι $\|\cdot\|$-συνεχής στον $\mathcal{B}(H)$ και $\|\omega_{x,y}\| \le \|x\|\|y\|$. Μάλιστα ισχύει ισότητα, γιατί αν $y \otimes x^*$ είναι ο τελεστής $y \otimes x^* : z \longrightarrow \langle z, x\rangle y$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι $\|y \otimes x^*\| = \|x\|\|y\|$ και $\omega_{x,y}(y \otimes x^*) = \|x\|^2\|y\|^2$. Επομένως

$$\|\omega_{x,y}\| = \|x\|\|y\|.$$

Ορισμός 8.1.6. *Έστω H χώρος Hilbert. Η* ***ασθενής τοπολογία τελεστών (weak operator topology, WOT)*** *στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η ασθενέστερη τοπολογία ως προς την οποία όλες οι γραμμικές μορφές*

$$\omega_{x,y} \qquad (x, y \in H)$$

είναι συνεχείς.

Δηλαδή ένα δίκτυο (T_i) από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T ως προς την WOT αν και μόνον αν $\langle T_i x - Tx, y\rangle \to 0$ για κάθε $x, y \in H$.

Πρέπει να τονισθεί ότι η WOT **δεν ταυτίζεται** με την ασθενή τοπολογία $w = \sigma(\mathcal{B}(H), \mathcal{B}(H)^*)$ που επάγεται στον χώρο Banach $(\mathcal{B}(H), \|.\|)$ από τον τοπολογικό δυϊκό του $\mathcal{B}(H)^*$ (βλ. Παρατήρηση 8.1.9 (ii)).

Η ανισότητα $|\langle Tx, y\rangle| \le \|Tx\|\|y\|$ δείχνει ότι η WOT είναι ασθενέστερη από την SOT. Μάλιστα, είναι γνησίως ασθενέστερη (όταν $\dim H = +\infty$): Η ακολουθία (T_n^*) του Παραδείγματος 8.1.5 δεν συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT, αλλά συγκλίνει ως προς την WOT, γιατί $|\langle T_n^* x, y\rangle| = |\langle x, T_n y\rangle| \le \|x\|\|T_n y\| \to 0$ αφού $T_n \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} 0$. Θα δείξουμε ότι παρόλα αυτά, οι δύο αυτές τοπολογίες έχουν τις ίδιες συνεχείς γραμμικές μορφές.

Συμβολισμός : Έστω H^n το ευθύ άθροισμα n αντιγράφων του H (με το εσωτερικό γινόμενο $\langle (y_1, \ldots, y_n), (u_1, \ldots, u_n)\rangle_n = \sum_k \langle y_k, u_k\rangle$). Αν $T \in \mathcal{B}(H)$, συμβολίζουμε $T^{(n)}$ τον τελεστή στον H^n που ορίζεται από την σχέση

$$T^{(n)} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ty_1 \\ \vdots \\ Ty_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Η απεικόνιση $A \longrightarrow A^{(n)}$ είναι ισομετρικός *-μορφισμός, και είναι (SOT-SOT)-συνεχής. Αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι (αυτοσυζυγής) άλγεβρα, τότε η εικόνα της $\mathcal{A}^{(n)} \subseteq \mathcal{B}(H^n)$ είναι (αυτοσυζυγής) άλγεβρα (και περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή του H^n αν και μόνον αν η $\mathcal{A}$ περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή του H).

Σημειώνουμε ότι η $\mathcal{A}^{(n)}$ **δεν ταυτίζεται** με το ευθύ άθροισμα n αντιγράφων της $\mathcal{A}$. Παραδείγματος χάριν,

$$\mathcal{A}^{(2)} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} : A \in \mathcal{A} \right\} \qquad \text{ενώ} \quad \mathcal{A} \oplus \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} : A, B \in \mathcal{A} \right\}.$$

Ορισμός 8.1.7. *Ονομάζουμε $\mathcal{B}_\sim(H)$ την γραμμική θήκη*

$$\mathcal{B}_\sim(H) = [\omega_{x,y} : x, y \in H] = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \omega_{x_k,y_k} : x_k, y_k \in H, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(η δεύτερη ισότητα έπεται από την παρατήρηση ότι $\lambda\omega_{x,y} = \omega_{\lambda x,y}$).

Πρόταση 8.1.8. *Μία γραμμική μορφή $\omega : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ είναι WOT-συνεχής αν και μόνον αν είναι SOT-συνεχής, αν και μόνον αν $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$.*

Απόδειξη. (i) Είναι φανερό ότι, αν $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$, τότε η ω είναι WOT-συνεχής, εφόσον κάθε $\omega_{x,y}$ είναι WOT-συνεχής.

(ii) Αν η ω είναι WOT-συνεχής, τότε είναι SOT-συνεχής, αφού η SOT είναι ισχυρότερη από την WOT.

(iii) Έστω ότι μια γραμμική μορφή ω είναι SOT-συνεχής. Θα δείξουμε ότι $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$. Επειδή η ω είναι SOT-συνεχής, υπάρχει μια SOT-βασική περιοχή του 0, έστω

$$W = \{T \in \mathcal{B}(H) : \sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\|^2 < \epsilon^2\}$$

ώστε $|\omega(T)| < 1$ για κάθε $T \in W$. Ισχυριζόμαστε ότι

(*) $$|\omega(T)| \leq \frac{2}{\epsilon} \left(\sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{για κάθε } T \in \mathcal{B}(H).$$

Πράγματι: Αν $p(T) = \frac{2}{\epsilon}(\sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\|^2)^{1/2}$ τότε

$$W = \{T \in \mathcal{B}(H) : p(T) < 2\}.$$

Επομένως, αν $p(T) \neq 0$ τότε $\frac{T}{p(T)} \in W$ άρα $|\omega(\frac{T}{p(T)})| < 1$ δηλαδή $|\omega(T)| < p(T)$ και συνεπώς ισχύει η (*). Αν πάλι $p(T) = 0$ τότε $nT \in W$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρα $|\omega(nT)| < 1$ για κάθε n και συνεπώς $\omega(T) = 0$ άρα πάλι ισχύει η (*).

Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$K = \{(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) : T \in \mathcal{B}(H)\} \subseteq H^n.$$

Παρατηρούμε ότι αν $(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) = 0$ τότε $\omega(T) = 0$ από την (*). Συνεπώς η απεικόνιση

$$\phi : K \longrightarrow \mathbb{C} : (Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) \longrightarrow \omega(T)$$

είναι καλά ορισμένη και βεβαίως είναι γραμμική. Μάλιστα η (*) δείχνει ακριβώς ότι η ϕ είναι συνεχής (ως προς την νόρμα του H^n). Συνεπώς επεκτείνεται σε συνεχή γραμμική μορφή στον χώρο Hilbert H^n, άρα υπάρχει $(u_1, \dots, u_n) \in H^n$ ώστε

$$\begin{aligned}\phi(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) &= \langle (Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n), (u_1, \dots, u_n) \rangle_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle Tx_k, u_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \omega_{x_k,u_k}(T)\end{aligned}$$

για κάθε $(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) \in K$, δηλαδή

$$\omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{x_k,u_k}(T)$$

για κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$, άρα $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$. □

Παρατήρηση 8.1.9. *Κάθε* $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ *μπορεί να γραφεί στην μορφή* $\omega = \sum_{m=1}^{n} \omega_{x_m,y_m}$ *όπου η οικογένεια* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *είναι ορθοκανονική. Έπεται ότι οι γραμμικές μορφές* $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ *καθορίζονται από τον περιορισμό τους στον υπόχωρο* $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ *των τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός φαίνεται εύκολα: Αν $\omega = \sum_{k=1}^{l} \omega_{u_k,v_k}$, επιλέγοντας μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του χώρου $[u_1, \ldots, u_l]$ και γράφοντας $u_k = \sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m$ βρίσκουμε εύκολα ότι, για κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$,

$$\omega(T) = \sum_{m=1}^{n} \langle Tx_m, y_m \rangle$$

όπου $y_m = \sum_{k=1}^{l} \bar{a}_{km}v_k$.

Έχουμε τώρα, για κάθε $x, y \in H$,

(8.1.2.1) $$\omega(x \otimes y*) = \sum_{m=1}^{n} \langle \langle x_m, y \rangle x, y_m \rangle = \langle x, \sum_{m=1}^{n} \langle y, x_m \rangle y_m \rangle.$$

Επομένως αν $\omega(x \otimes y^*) = 0$ για κάθε $x, y \in H$ [4] τότε $\sum_{m=1}^{n} \langle y, x_m \rangle y_m = 0$ για κάθε $y \in H$, οπότε (αφού τα x_m είναι ορθοκανονικά) θέτοντας $y = x_m$ βρίσκουμε $y_m = 0$ για κάθε $m = 1, \ldots, n$, άρα $\omega = 0$. □

Πρόταση 8.1.10. *Κάθε* $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ *μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$\omega = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \omega_{e_m,f_m}$$

όπου οι οικογένειες $\{e_m : m = 1, \ldots M\}$ *και* $\{f_m : m = 1, \ldots M\}$ *είναι ορθοκανονικές,* $\lambda_m \in \mathbb{R}_+$ *και*

$$\|\omega\| = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m.$$

Απόδειξη. Έστω $\omega = \sum_{n=1}^{N} \omega_{x_n,y_n} \in \mathcal{B}_\sim(H)$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

(*) $$\big\langle (\xi \otimes \eta^*)x, y \big\rangle = \big\langle (x \otimes y^*)\xi, \eta \big\rangle$$

που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού, βρίσκουμε ότι, για κάθε $\xi, \eta \in H$,

$$\omega(\xi \otimes \eta^*) = \sum_{n=1}^{N} \big\langle ((\xi \otimes \eta^*))x_n, y_n \big\rangle = \sum_{n=1}^{N} \big\langle (x_n \otimes y_n^*)\xi, \eta \big\rangle = \langle T\xi, \eta \rangle$$

όπου $T := \sum_{n=1}^{N} x_n \otimes y_n^*$.

[4] Μάλιστα, αρκεί η σχέση $\omega(x \otimes y^*) = 0$ να ισχύει για κάθε $x \in [x_1, \ldots, x_n]$ και κάθε $y \in [y_1, \ldots, y_n]$

Έστω $T = V|T|$ η πολική αναπαράσταση του τελεστή T. Επειδή ο $|T|$ είναι πεπερασμένης τάξης και θετικός τελεστής, από το φασματικό θεώρημα (σε χώρους πεπερασμένης διάστασης) υπάρχουν ορθοκανονικά διανύσματα $\{e_1, \ldots, e_M\}$ και $\lambda_m > 0$ ώστε

$$|T| = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m e_m \otimes e_m^* \quad \text{άρα} \quad T = V|T| = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m f_m \otimes e_m^*$$

όπου $f_m = Ve_m$.

Χρησιμοποιώντας πάλι την ταυτότητα (*), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\langle T\xi, \eta\rangle &= \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle (f_m \otimes e_m^*)\xi, \eta\rangle = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle (\xi \otimes \eta^*) f_m, e_m\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \omega_{f_m, e_m}(\xi \otimes \eta^*).\end{aligned}$$

Επομένως οι γραμμικές μορφές ω και $\sum_{m=1}^{M} \lambda_m \omega_{f_m,e_m}$, που ανήκουν στο $\mathcal{B}_\sim(H)$, ταυτίζονται στο σύνολο $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης, άρα, από την προηγούμενη παρατήρηση, είναι ίσες: $\omega = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \omega_{f_m,e_m}$.

Έπεται τώρα ότι, για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$,

$$|\omega(A)| \le \sum_{m=1}^{M} \lambda_m |\omega_{f_m,e_m}(A)| \le \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \|f_m\| \, \|e_m\| \, \|A\| = \left(\sum_{m=1}^{M} \lambda_m\right) \|A\|$$

άρα $\|\omega\| \le \sum_{m=1}^{M} \lambda_m$, και από την άλλη μεριά

$$\|\omega\| \ge |\omega(V)| = \left|\sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle V f_m, e_m\rangle\right| = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle e_m, e_m\rangle = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m$$

οπότε ισχύει ισότητα. □

Παρατήρηση 8.1.11. *(i) Εύκολα φαίνεται ότι η WOT είναι τοπολογία γραμμικού χώρου και ότι είναι Hausdorff (οι γραμμικές μορφές $\omega_{x,y}$ χωρίζουν τα σημεία του $\mathcal{B}(H)$).*

*(ii) Η WOT δεν ταυτίζεται με την ασθενή τοπολογία $w = \sigma(\mathcal{B}(H), \mathcal{B}(H)^*)$ που επάγεται στον χώρο Banach $(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$ από τον τοπολογικό δυϊκό του $\mathcal{B}(H)^*$. Η w είναι (γνήσια) ισχυρότερη από την WOT (όταν $\dim H = \infty$): είναι η ασθενέστερη τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ ως προς την οποία **όλες** οι $\|\cdot\|$-συνεχείς γραμμικές μορφές είναι συνεχείς, ενώ για την WOT απαιτούνται «μόνον» οι γραμμικές μορφές $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\|\cdot\|$-συνεχής γραμμική μορφή $\psi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ που δεν ανήκει στον $\mathcal{B}_\sim(H)$. Από την Παρατήρηση 8.1.9, οι γραμμικές μορφές του $\mathcal{B}_\sim(H)$ καθορίζονται από τον περιορισμό τους στον υπόχωρο $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης. Όμως ο ταυτοτικός τελεστής I δεν ανήκει στην $\|\cdot\|$-κλειστή θήκη του $\mathcal{F}(H)$. [5] Έπεται από το Θεώρημα Hahn - Banach ότι υπάρχει μια $\|\cdot\|$-συνεχής γραμμική μορφή $\psi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ που μηδενίζει τον $\mathcal{F}(H)$ αλλά $\psi(I) \neq 0$. Επομένως η ψ δεν μπορεί να ανήκει στον $\mathcal{B}_\sim(H)$. □

[5] Το ανοικτό σύνολο $\{T : \|T - I\| < 1\}$ δεν τέμνει τον $\mathcal{F}(H)$, γιατί αν $\|T - I\| < 1$ τότε ο T είναι αντιστρέψιμος (άρα $T \notin \mathcal{F}(H)$), αφού η «γεωμετρική» σειρά $\sum_{n\ge 0} (I - T)^n$ συγκλίνει στον T^{-1}

Πρόταση 8.1.12. *(i) Η ενέλιξη είναι WOT-WOT συνεχής στον $\mathcal{B}(H)$, και ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά WOT-WOT συνεχής.*

(ii) Ο πολλαπλασιασμός

$$(\mathcal{B}(H), \text{WOT}) \times (\mathcal{B}(H), \text{WOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \text{WOT}) : \ (A, B) \longrightarrow AB$$

δεν είναι *συνεχής, ούτε καν ακολουθιακά (άρα ούτε περιορισμένος σε φραγμένα σύνολα).*

Απόδειξη. (i) Έστω $A_i \xrightarrow{\text{WOT}} A$ και $B, C \in \mathcal{B}(H)$. Τότε για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\langle A_i^* x, y\rangle = \langle x, A_i y\rangle \to \langle x, Ay\rangle = \langle A^* x, y\rangle$$

πράγμα που δείχνει ότι η ενέλιξη είναι WOT-WOT συνεχής. Επίσης

$$\langle BA_iCx, y\rangle = \langle A_i(Cx), (B^*y)\rangle \to \langle A(Cx), (B^*y)\rangle = \langle BACx, y\rangle$$

πράγμα που δείχνει ότι οι απεικονίσεις $L_B : A \to BA$ και $R_C : A \to AC$ είναι WOT-WOT συνεχείς.

(ii) Θεωρούμε την ακολουθία (T_n) του Παραδείγματος 8.1.5: είναι φραγμένη και συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT, άρα και ως προς την WOT. Συνεπώς από το (i) έχουμε $T_n^* \xrightarrow{\text{WOT}} 0$. Όμως $T_nT_n^*e_1 = e_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $T_nT_n^* \overset{\text{WOT}}{\nrightarrow} 0$. □

Πόρισμα 8.1.13. *Ένα κυρτό υποσύνολο (ειδικότερα, ένας γραμμικός υπόχωρος) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι SOT-κλειστός αν και μόνον αν είναι WOT-κλειστός.*

Απόδειξη. Εφόσον η WOT είναι ασθενέστερη τοπολογία από την SOT, έχουμε $\overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}} \subseteq \overline{\mathcal{S}}^{\text{WOT}}$. Αν όμως $A \notin \overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}}$, από το διαχωριστικό Θεώρημα Hahn-Banach έπεται [6] ότι υπάρχει SOT-συνεχής γραμμική μορφή ω και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\operatorname{Re}\omega(A) > \lambda$ αλλά $\operatorname{Re}\omega(S) < \lambda$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$. Όμως η ω είναι WOT-συνεχής (Πρόταση 8.1.8), και συνεπώς $A \notin \overline{\mathcal{S}}^{\text{WOT}}$. □

Θα δώσουμε στην συνέχεια έναν «γεωμετρικό» χαρακτηρισμό της SOT-κλειστής θήκης υποχώρων του $\mathcal{B}(H)$. Θα χρειασθούμε την ακόλουθη έννοια:

Ορισμός 8.1.14. *Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμικός υπόχωρος, η* ***ανακλαστική θήκη (reflexive cover)*** $\operatorname{Ref}\mathcal{S}$ *του $\mathcal{S}$ είναι ο υπόχωρος*

$$\operatorname{Ref}\mathcal{S} = \{T \in \mathcal{B}(H) : Tx \in \overline{\mathcal{S}x} \text{ για κάθε } x \in H\}.$$

Παρατήρηση 8.1.15. *Είναι φανερό ότι ο $\operatorname{Ref}\mathcal{S}$ είναι SOT-κλειστός υπόχωρος και περιέχει τον $\mathcal{S}$, άρα περιέχει και την SOT-κλειστή θήκη $\overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}}$ του $\mathcal{S}$. Δεν είναι όμως εν γένει ίσος με την $\overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}}$:*

Αν $T \in \operatorname{Ref}\mathcal{S}$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ και $x \in H$ υπάρχει $S \in \mathcal{S}$ ώστε $\|(T - S)x\| < \epsilon$. Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ και $x_1, \ldots, x_n \in H$ υπάρχουν $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ ώστε $\|(T - S_i)x_i\| < \epsilon$ για $i = 1, \ldots, n$. Αυτό δεν αποδεικνύει ότι $T \in \overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}}$. Πρέπει να υπάρχει ***ένα κοινό*** *$S \in \mathcal{S}$ που να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλες αυτές τις ανισότητες.*

Η διαφορά μεταξύ ανακλαστικής και SOT-κλειστής θήκης φαίνεται και ως εξής: Ένας τελεστής T ανήκει στην ανακλαστική θήκη $\operatorname{Ref}\mathcal{S}$ του $\mathcal{S}$ αν και μόνον αν για κάθε $x \in H$ υπάρχει δίκτυο (S_i) στον $\mathcal{S}$ που εξαρτάται από το x ώστε $S_ix \to Tx$. Ένας τελεστής T ανήκει στην SOT-κλειστή θήκη του $\mathcal{S}$ αν και μόνον αν υπάρχει ένα δίκτυο (S_i) στον $\mathcal{S}$ ώστε $S_ix \to Tx$ για όλα τα $x \in H$.

[6] βλέπε π.χ. το Πόρισμα IV.3.10 του J.B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

Παράδειγμα 8.1.16. *Έστω*

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Η $\mathcal{A}$ είναι SOT-κλειστή άλγεβρα τελεστών στον χώρο Hilbert $\mathbb{C}^2$ και περιέχει τον ταυτοτικό. Αν $T = \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right]$ όπου $x \neq z$, τότε φαίνεται εύκολα ότι $T\xi \in \mathcal{A}\xi$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^2$, άρα $T \in \mathrm{Ref}\,\mathcal{A}$, ενώ $T \notin \mathcal{A}$.

Για παράδειγμα, υπάρχουν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ώστε $Te_i = A_i e_i$ για $i = 1, 2$: μπορούμε να βάλουμε $A_1 = \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right]$ και $A_2 = \left[\begin{smallmatrix} z & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right]$ αλλά δεν υπάρχει κοινό $A \in \mathcal{A}$ ώστε $Te_1 = Ae_1$ και $Te_2 = Ae_2$.

Με άλλα λόγια, $T^{(2)} \notin \mathrm{Ref}\,\mathcal{A}^{(2)}$:

$$T^{(2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textit{ενώ} \qquad \overline{\mathcal{A}^{(2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Πρόταση 8.1.17. *Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμικός υπόχωρος, ένας τελεστής T ανήκει στην SOT-κλειστή θήκη του $\mathcal{S}$ αν και μόνον αν $T^{(n)} \in \mathrm{Ref}\,\mathcal{S}^{(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει δίκτυο (S_i) στον $\mathcal{S}$ ώστε $S_i \xrightarrow{\text{SOT}} T$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $S_i^{(n)} \in \mathcal{S}^{(n)}$ και $S_i^{(n)} \xrightarrow{\text{SOT}} T^{(n)}$, συνεπώς $T^{(n)} \in \mathrm{Ref}\,\mathcal{S}^{(n)}$.

Έστω αντίστροφα ότι $T^{(n)} \in \mathrm{Ref}\,\mathcal{S}^{(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και έστω

$$W = \{A \in \mathcal{B}(H) : \sum_{k=1}^{m} \|Tx_k - Ax_k\|^2 < \epsilon^2\}$$

μια βασική SOT-περιοχή του T. Επειδή $T^{(m)} \in \mathrm{Ref}\,\mathcal{S}^{(m)}$, αν συμβολίσουμε με $\vec{x} \in H^m$ το διάνυσμα-στήλη με συντεταγμένες $(x_1, \ldots, x_m)$, θα ισχύει η σχέση

$$T^{(m)}\vec{x} \in \overline{\mathcal{S}^{(m)}\vec{x}},$$

επομένως θα υπάρχει $S^{(m)} \in \mathcal{S}^{(m)}$ ώστε $\|T^{(m)}\vec{x} - S^{(m)}\vec{x}\| < \epsilon$. Μα αυτή η ανισότητα σημαίνει ακριβώς ότι $S \in W$, άρα ο T ανήκει στην SOT-κλειστή θήκη του $\mathcal{S}$. □

8.1.3 Ο $\mathcal{B}(H)$ ως δυϊκός χώρος Banach. Η ασθενής* τοπολογία

Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{B}_\sim(H)$ των WOT-συνεχών γραμμικών μορφών στον $\mathcal{B}(H)$, εφοδιασμένο με την νόρμα του δυϊκού χώρου του $\mathcal{B}(H)$.

Θα αποδείξουμε ότι ο δυϊκός χώρος του $(\mathcal{B}_\sim(H), \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(H)$.

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi_A : \mathcal{B}_\sim(H) \longrightarrow \mathbb{C}$$

από τον τύπο

$$\phi_A(\omega) = \omega(A), \qquad \omega \in \mathcal{B}_\sim(H).$$

Ειδικότερα

$$\phi_A(\omega_{x,y}) = \omega_{x,y}(A) = \langle Ax, y \rangle.$$

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση ϕ_A είναι γραμμική, και είναι συνεχής διότι

$$|\phi_A(\omega)| = |\omega(A)| \leq \|\omega\|\|A\|$$

για κάθε $\omega \in \mathcal{B}_{\sim}(H)$, από τον ορισμό της $\|\omega\|$. Επομένως $\phi_A \in (\mathcal{B}_{\sim}(H), \|\cdot\|)^*$ και $\|\phi_A\| \leq \|A\|$.

Έστω αντίστροφα $\psi \in (\mathcal{B}_{\sim}(H), \|\cdot\|)^*$. Θα βρουμε $A \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $\psi = \phi_A$. Κάθε ζεύγος $x, y \in H$ ορίζει έναν αριθμό $\psi(\omega_{x,y}) \in \mathbb{C}$. Δημιουργείται λοιπόν μια απεικόνιση

$$b : H \times H \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \longrightarrow \psi(\omega_{x,y}).$$

Επειδή η απεικόνιση $(x, y) \to \omega_{x,y}$ είναι sesquilinear και η ψ είναι γραμμική, η b είναι sesquilinear. Επίσης,

$$|b(x, y)| = |\psi(\omega_{x,y})| \leq \|\psi\|\|\omega_{x,y}\| \leq \|\psi\|\|x\|\|y\|$$

άρα η b είναι φραγμένη (από $\|\psi\|$). Συνεπώς από το Θεώρημα Riesz (Πρόταση 2.1.2) υπάρχει $A_\psi \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

$$b(x, y) = \langle A_\psi x, y\rangle$$

δηλαδή

$$\psi(\omega_{x,y}) = \langle A_\psi x, y\rangle = \omega_{x,y}(A_\psi)$$

και

$$|\langle A_\psi x, y\rangle| = |\psi(\omega_{x,y})| \leq \|\psi\|\|\omega_{x,y}\| = \|\psi\|\|x\|\|y\|$$

για κάθε $x, y \in H$, άρα

$$\|A_\psi\| \leq \|\psi\|.$$

Επειδή ο χώρος $\mathcal{B}_{\sim}(H)$ είναι η γραμμική θήκη του συνόλου $\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$ και οι απεικονίσεις ψ και ϕ_{A_ψ} είναι γραμμικές, οι σχέσεις

$$\psi(\omega_{x,y}) = \omega_{x,y}(A) = \phi_{A_\psi}(\omega_{x,y})$$

για κάθε $x, y \in H$ δείχνουν ότι $\psi = \phi_{A_\psi}$. Δείξαμε λοιπόν ότι η $A \to \phi_A$ απεικονίζει τον $\mathcal{B}(H)$ *επί* του δυικού του $\mathcal{B}_{\sim}(H)$.

Τέλος παρατηρούμε ότι, αν $\psi = \phi_A$, τότε

$$\left\langle A_\psi x, y\right\rangle = \phi_A(\omega_{x,y})) = \langle Ax, y\rangle$$

για κάθε $x, y \in H$ (ορισμός του A_ψ), άρα $A_\psi = A$. Επομένως η ανισότητα $\|A_\psi\| \leq \|\psi\|$ δείχνει ότι $\|A\| \leq \|\phi_A\|$. Ειχαμε όμως δείξει ότι $\|\phi_A\| \leq \|A\|$, συνεπώς ισχύει ισότητα.

Δείξαμε δηλαδή ότι η απεικόνιση

$$(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|) \longrightarrow ((\mathcal{B}_{\sim}(H))^*, \|\cdot\|) : A \longrightarrow \phi_A$$

που είναι προφανώς γραμμική, είναι ισομετρία και επί:

Πρόταση 8.1.18. *Ο χώρος $\mathcal{B}(H)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρου $(\mathcal{B}_{\sim}(H), \|\cdot\|)$ μέσω της απεικόνισης*

$$A \to \phi_A, \quad \textit{όπου} \quad \phi_A(\omega) = \omega(A),\ (A \in \mathcal{B}(H),\ \omega \in \mathcal{B}_{\sim}(H)).$$

Ο χώρος $\mathcal{B}_{\sim}(H)$ δεν είναι κλειστός υπόχωρος του δυϊκού $\mathcal{B}(H)^*$, δεν είναι λοιπόν χώρος Banach (όταν $\dim H = \infty$). Παραδείγματος χάριν, αν $\{e_n\} \subseteq H$ είναι μια άπειρη ορθοκανονική ακολουθία, η γραμμική απεικόνιση ϕ όπου

$$\phi(T) = \sum_k \frac{1}{k^2}\omega_{e_k,e_k}(T)$$

ανήκει στην $\|\cdot\|$-κλειστή θήκη του $\mathcal{B}_\sim(H)$ (διότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα). Δεν ανήκει όμως στον $\mathcal{B}_\sim(H)$. Πράγματι, αν $\phi = \omega$ όπου $\omega = \sum\limits_{m=1}^{n} \omega_{x_m, y_m}$, τότε θα έχουμε $\phi(x \otimes e_k^*) = \omega(x \otimes e_k^*)$ για κάθε $x \in H$ και $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\frac{1}{k^2}\langle x, e_k \rangle = \sum_{m=1}^{n} \langle x_m, e_k \rangle \langle x, y_m \rangle = \langle x, \sum_{m=1}^{n} \langle e_k, x_m \rangle y_m \rangle$$

για κάθε $x \in H$ και $k \in \mathbb{N}$, το οποίο σημαίνει ότι $\frac{1}{k^2} e_k = \sum\limits_{m=1}^{n} \langle e_k, x_m \rangle y_m$, δηλαδή ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το διάνυσμα e_k ανήκει στον χώρο $[y_1, \dots, y_m]$, πράγμα αδύνατο.

Ορισμός 8.1.19. *Ο* ***προδυϊκός*** $\mathcal{B}_*(H) \subseteq \mathcal{B}(H)^*$ *είναι η $\|\cdot\|$-κλειστή θήκη του $\mathcal{B}_\sim(H)$.*

Η ονομασία οφείλεται στο γεγονός ότι ο δυϊκός του $\mathcal{B}_*(H)$ ταυτίζεται [7] με τον δυϊκό του $\mathcal{B}_\sim(H)$, δηλαδή με τον $\mathcal{B}(H)$. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι ο $\mathcal{B}_*(H)$ είναι ο μοναδικός χώρος Banach που έχει ως δυϊκό τον $\mathcal{B}(H)$ (πράγμα που δεν αληθεύει εν γένει για τους προδυϊκούς άλλων δυϊκών χώρων Banach).

Ορισμός 8.1.20. *Η* ***ασθενής-* τοπολογία (w*) στον*** $\mathcal{B}(H)$ *είναι η ασθενέστερη τοπολογία ως προς την οποία κάθε $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$ είναι συνεχής, είναι δηλαδή η ασθενής-* τοπολογία $\sigma(\mathcal{B}(H), \mathcal{B}_*(H))$ που έχει ο $\mathcal{B}(H)$ ως δυϊκός του χώρου Banach $\mathcal{B}_*(H)$. Η τοπολογία αυτή ονομάζεται πολλές φορές και* ***υπερασθενής (ultraweak)****.*

Αφού ο $\mathcal{B}(H)$ είναι ο δυϊκός του χώρου Banach $\mathcal{B}_*(H)$, εφαρμόζεται το Θεώρημα Αλάογλου (βλ. π.χ. Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδ. Συμμετρία, 1988., Θεώρημα 17.1), σύμφωνα με το οποίο η κλειστή μοναδιαία μπάλα ενός δυϊκού χώρου Banach είναι ασθενώς-* συμπαγής:

Θεώρημα 8.1.21. *Η κλειστή μοναδιαία μπάλα (και γενικότερα, κάθε ασθενώς-* κλειστό και φραγμένο υποσύνολο) του $\mathcal{B}(H)$ είναι ασθενώς-* συμπαγής.*

Όταν $\dim H = \infty$, η ασθενής* τοπολογία είναι **γνήσια ισχυρότερη** από την WOT, εφόσον $\mathcal{B}_\sim(H) \subsetneq \mathcal{B}_*(H)$. Δεν είναι όμως συγκρίσιμη με την SOT. Πράγματι: αν $\phi \in \mathcal{B}_*(H) \setminus \mathcal{B}_\sim(H)$, τότε ο γραμμικός χώρος $\ker \phi$ είναι ασθενώς-* κλειστός (αφού η ϕ είναι ασθενώς-* συνεχής), αλλά δεν είναι WOT κλειστός (διότι η ϕ δεν είναι WOT συνεχής), άρα ούτε SOT κλειστός (Πόρισμα 8.1.13). Συνεπώς η ασθενής* τοπολογία δεν είναι ασθενέστερη από την SOT. Αλλά δεν είναι ούτε ισχυρότερη: αν (T_n) είναι η ακολουθία του Παραδείγματος 8.1.5, τότε, όπως δείξαμε, η (T_n^*) δεν συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT, αλλά συγκλίνει στο 0 ως προς την w*. Πράγματι, η (T_n^*) συγκλίνει στο 0 ως προς την WOT, και είναι $\|\cdot\|$-φραγμένη. Όπως θα δείξουμε αμέσως, η w* συμπίπτει με την WOT **στα φραγμένα υποσύνολα** του $\mathcal{B}(H)$.

Πρόταση 8.1.22. *Οι τοπολογίες w* και WOT συμπίπτουν στα $\|\cdot\|$-φραγμένα υποσύνολα του $\mathcal{B}(H)$.*

Επομένως η μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{B}(H)$ είναι WOT-συμπαγής.

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι αν ένα φραγμένο δίκτυο (T_i) συγκλίνει στο 0 ως προς την WOT, τότε $T_i \xrightarrow{\text{w*}} 0$. Έστω λοιπόν $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\omega_1 \in \mathcal{B}_\sim(H)$ ώστε $\|\omega - \omega_1\| < \epsilon$. Αφού $T_i \xrightarrow{\text{WOT}} 0$, υπάρχει i_o ώστε $|\omega_1(T_i)| < \epsilon$ για κάθε $i \geq i_o$. Αν $M = \sup\limits_i \|T_i\|$, τότε

$$|\omega(T_i)| \leq |(\omega - \omega_1)(T_i)| + |\omega_1(T_i)| < M\epsilon + \epsilon$$

για κάθε $i \geq i_o$. Συνεπώς $\lim\limits_i \omega(T_i) = 0$, άρα, αφού η ω είναι αυθαίρετη, $T_i \xrightarrow{\text{w*}} 0$. ◻

[7] κάθε συνεχής γραμμική μορφή στον $\mathcal{B}_\sim(H)$ επεκτείνεται (λόγω συνέχειας) σε μια μοναδική συνεχή γραμμική μορφή στον $\mathcal{B}_*(H)$, και με την ίδια νόρμα.

Πόρισμα 8.1.23. *Ο χώρος $\mathcal{F}(H)$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης είναι πυκνός στον $\mathcal{B}(H)$ ως προς την SOT, την WOT και την ασθενή-*, όχι όμως ως προς την τοπολογία της νόρμας (όταν $\dim H = \infty$).*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X}$ το σύνολο των υποχώρων του H που έχουν πεπερασμένη διάσταση (όπως στη απόδειξη της Πρότασης 8.1.3), διατεταγμένο με τη σχέση του περιέχεσθαι. Για κάθε $F \in \mathcal{X}$ ονομάζουμε P_F την ορθή προβολή στον υπόχωρο F. Ισχυριζόμαστε ότι $P_F \xrightarrow{\text{SOT}} I$ δηλαδή ότι $\|P_F x - x\| \to 0$ για κάθε $x \in H$. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Αν $F_0 := [x]$, για κάθε $F \in \mathcal{X}$ με $F \supseteq F_0$ ισχύει ότι $x \in F$ και συνεπώς $\|P_F x - x\| = 0 < \epsilon$.

Αν τώρα $A \in \mathcal{B}(H)$, τότε $AP_F \in \mathcal{F}(H)$ και $AP_F \xrightarrow{\text{SOT}} A$, επομένως ο $\mathcal{F}(H)$ είναι SOT-πυκνός στον $\mathcal{B}(H)$, άρα και WOT-πυκνός, αφού η WOT είναι ασθενέστερη από την SOT. Επίσης όμως $AP_F \xrightarrow{w*} A$ από την προηγούμενη Πρόταση, διότι $AP_F \xrightarrow{\text{WOT}} A$ και το δίκτυο (AP_F) είναι φραγμένο. Άρα ο $\mathcal{F}(H)$ είναι w*-πυκνός στον $\mathcal{B}(H)$.

Τέλος, ο $\mathcal{F}(H)$ δεν είναι $\|\cdot\|$-πυκνός στον $\mathcal{B}(H)$, γιατί, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, ο ταυτοτικός τελεστής δεν είναι $\|\cdot\|$-όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης, όταν $\dim H = \infty$. □

Αποδεικνύεται [8] ότι όταν $\dim H = \infty$, οι WOT και w* δεν είναι μετρικοποιήσιμες τοπολογίες στον $\mathcal{B}(H)$. Οι περιορισμοί όμως των τοπολογιών αυτών στα φραγμένα υποσύνολα του $\mathcal{B}(H)$ είναι μετρικοποιήσιμες τοπολογίες, όταν ο H είναι διαχωρίσιμος:

Πρόταση 8.1.24. *Αν ο H είναι διαχωρίσιμος, τότε*

(i) Ο προδυϊκός $\mathcal{B}_*(H)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

(ii) Ο περιορισμός της ασθενούς- τοπολογίας (ισοδύναμα, της WOT) στην μοναδιαία μπάλα $\mathcal{B}(H)_1$ είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία, άρα διαχωρίσιμη (εφόσον είναι συμπαγής).*

Απόδειξη. Έστω Ξ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του H. Τότε το σύνολο

$$\Omega = \{\omega_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in \Xi\} \subseteq \mathcal{B}_\sim(H)$$

είναι αριθμήσιμο.

(i) Η ανισότητα

$$\|\omega_{x,y} - \omega_{\xi,\eta}\| = \|\omega_{x-\xi,y} + \omega_{\xi,y-\eta}\| \le \|x - \xi\|\|y\| + \|\xi\|\|y - \eta\|$$

δείχνει ότι η $\|\cdot\|$-κλειστή γραμμική θήκη του Ω περιέχει το σύνολο $\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$, άρα και την $\|\cdot\|$-κλειστή γραμμική του θήκη, που είναι όλος ο $\mathcal{B}_*(H)$. Επομένως ο $\mathcal{B}_*(H)$ είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Έστω $\Omega = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του Ω. Ορίζουμε

$$d(T, S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\omega_n(T - S)|}{\|\omega_n\|} \qquad (T, S \in \mathcal{B}(H)_1).$$

[8] **Παράδειγμα (von Neumann)** Έστω $\mathcal{E} = \{P_n + nP_m : m > n\}$, όπου P_n μονοδιάστατες κάθετες ανά δύο προβολές. Όπως στην Πρόταση 8.1.2 φαίνεται ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο $\mathcal{E}$ που να συγκλίνει στο 0 ως προς την w* (ή την WOT). Ισχυριζόμαστε όμως ότι το 0 ανήκει στην w*-κλειστή θήκη του $\mathcal{E}$. Πράγματι, αν όχι, τότε θα υπήρχαν $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathcal{B}_*(H)$ και $\epsilon > 0$ ώστε

$$\max_{1 \le i \le k} |\omega_i(P_n + nP_m)| \ge \epsilon \ \text{ για κάθε } m > n.$$

Αλλά τότε, επειδή $\lim_m \omega(P_m) = 0$ για κάθε $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$ θα είχαμε $\max_i |\omega_i(P_n)| = \lim_m \max_i |\omega_i(P_n + nP_m)| \ge \epsilon$ για κάθε n, άτοπο.

Ο αναγνώστης μπορεί να ελέγξει ότι η d ορίζει μία μετρική στην $\mathcal{B}(H)_1$ (το γεγονός ότι $T = S$ αν $d(T,S) = 0$ έπεται από την πυκνότητα του Ξ στον H). Αν ένα δίκτυο (T_i) στην $\mathcal{B}(H)_1$ συγκλίνει στον $T \in \mathcal{B}(H)_1$ ως προς την WOT, τότε $\omega_n(T_i - T) \to 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, χρησιμοποιώντας ότι $|\omega_n(T_i - T)| \le 2\|\omega_n\|$, αποδεικνύεται εύκολα ότι $d(T_i, T) \to 0$. Επομένως η WOT είναι ισχυρότερη από την τοπολογία που ορίζει η d. Αλλά η πρώτη είναι συμπαγής, άρα οι δύο τοπολογίες συμπίπτουν. (Στην πραγματικότητα δεν είναι δύσκολο να δειχθεί απευθείας ότι αν $d(T_i, T) \to 0$ τότε $T_i \to T$ ως προς την WOT). Εφόσον η WOT και η w* συμπίπτουν στην $\mathcal{B}(H)_1$, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ο προδυϊκός $\mathcal{B}_*(H)$ του $\mathcal{B}(H)$ αποκαλείται καμμιά φορά «μη μεταθετικός ℓ^1». Η ονομασία αυτή οφείλεται εν μέρει στην επόμενη

Πρόταση 8.1.25. *Ο προδυϊκός $\mathcal{B}_*(H)$ του $\mathcal{B}(H)$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών μορφών ω της μορφής*

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \omega_{x_n, y_n}$$

όπου[9] $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ *και* $\sum\limits_n |\lambda_n| < +\infty$.

Απόδειξη. Αν $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ είναι ακολουθίες μοναδιαίων διανυσμάτων και $\lambda_n \in \mathbb{C}$ με $\sum_n |\lambda_n| < +\infty$, τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ η σειρά $\sum\limits_n \lambda_n \langle Ax_n, y_n\rangle$ συγκλίνει απόλυτα: $\sum\limits_n |\lambda_n \langle Ax_n, y_n\rangle| \le \sum\limits_n |\lambda_n| \|A\| \|x_n\| \|y_n\| = \|A\| \sum\limits_n |\lambda_n|$, επομένως ορίζει μια γραμμική μορφή στον $\mathcal{B}(H)$:

$$A \to \omega(A) = \sum_n \lambda_n \langle Ax_n, y_n\rangle \quad (A \in \mathcal{B}(H))$$

που είναι $\|\cdot\|$-συνεχής και μάλιστα $\|\omega\| \le \sum\limits_n |\lambda_n|$. Αν θέσουμε

$$\omega_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \omega_{x_n, y_n}$$

τότε $\omega_m \in \mathcal{B}_\sim(H)$ και $\|\omega - \omega_m\| \le \sum\limits_{n>m} |\lambda_n| \to 0$, άρα $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$.

Έστω, αντίστροφα, $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$. Ο χώρος $\mathcal{B}_*(H)$ αποτελείται από τα $\|\cdot\|$-όρια ακολουθιών από τον $\mathcal{B}_\sim(H)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\omega_n \in \mathcal{B}_\sim(H)$ ώστε $\|\omega - \omega_n\| < \frac{1}{2^{n+1}}$. Γράφουμε $\omega_0 = 0$ οπότε

$$\omega_n = (\omega_n - \omega_{n-1}) + \cdots + (\omega_1 - \omega_0)$$
$$\text{άρα} \quad \omega = \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_k - \omega_{k-1})$$

όπου η σειρά συγκλίνει απόλυτα, καθώς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\omega_k - \omega_{k-1}\| \le \|\omega_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Από την Πρόταση 8.1.10, κάθε $\omega_k - \omega_{k-1}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός

$$\omega_k - \omega_{k-1} = \sum_{m=1}^{M_k} \omega_{m,k}$$

[9] μάλιστα, αποδεικνύεται (δες την δεύτερη απόδειξη ή το Θεώρημα II.1.6 από το M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, 1979. Second printing, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 124, Springer, 2002.) ότι οι $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ μπορούν να επιλεγούν ορθοκανονικές.

όπου $\omega_{m,k} := \omega_{x_m^k, y_m^k}$, με $\sum\limits_{m=1}^{M_k} \|\omega_{m,k}\| = \|\omega_k - \omega_{k-1}\|$. Έτσι έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_k} \|\omega_{m,k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\omega_k - \omega_{k-1}\| < \infty$$

οπότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{M_k} \omega_{m,k}$ συγκλίνει απόλυτα, συνεπώς μπορεί να γραφεί, ως προς μια αρίθμηση $\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ του συνόλου $\{\omega_{m,k} : m = 1, \ldots, M_k, k \in \mathbb{N}\}$, στη μορφή

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$$

όπου κάθε ω_n είναι κάποιο $\omega_{m,k}$, άρα της μορφής $\omega_n = \lambda_n \omega_{x_n, y_n}$ με $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ και $\|\omega_n\| = \lambda_n$, οπότε $\sum\limits_n \lambda_n = \sum\limits_n \|\omega_n\| < \infty$. □

Δεύτερη Απόδειξη[10] **:** Έστω $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$. Η απεικόνιση $H \times H \to \mathbb{C} : (\xi, \eta) \to \omega(\xi \otimes \eta^*)$ είναι sesquilinear και φράσσεται από την $\|\omega\|$, άρα (Πρόταση 2.1.2) υπάρχει $T_\omega \in \mathcal{B}(H)$ (με $\|T_\omega\| \leq \|\omega\|$) ώστε

(*) $$\omega(\xi \otimes \eta^*) = \langle T_\omega \xi, \eta \rangle.$$

Έστω $\{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική βάση του H.

Ισχυρισμός : Για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ έχουμε $\sum\limits_i |\langle A T_\omega e_i, e_i \rangle| < +\infty$.

Πράγματι, έστω $a_i \in \mathbb{C}$ ώστε $|\langle A T_\omega e_i, e_i \rangle| = a_i \langle A T_\omega e_i, e_i \rangle$. Αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $J \subseteq I$ θέσουμε

$$B_J = \sum_{i \in J} a_i e_i \otimes e_i^*,$$

τότε, εφόσον $\langle T_\omega e_i, A^* e_i \rangle = \omega((e_i \otimes (A^* e_i)^*)$ από την $(*)$,

$$\sum_{i \in J} |\langle A T_\omega e_i, e_i \rangle| = \sum_{i \in J} a_i \langle T_\omega e_i, A^* e_i \rangle = \sum_{i \in J} a_i \omega((e_i \otimes (A e_i)^*) = \omega(B_J A).$$

Αλλά $\|B_J\| = \max |a_i| = 1$ (διότι οι $e_i \otimes e_i^*$ είναι κάθετες ανά δύο προβολές), επομένως

$$\sum_{i \in J} |\langle A T_\omega e_i, e_i \rangle| = |\omega(B_J A)| \leq \|\omega\| \|B_J A\| \leq \|\omega\| \|A\|$$

για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $J \subseteq I$, και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Έστω $T_\omega = V|T_\omega|$ η πολική αναπαράσταση (Θεώρημα 5.1.16) του τελεστή T_ω. Τότε $V^* T_\omega = |T_\omega|$. Θέτοντας $A = V^*$ στον Ισχυρισμό, έχουμε [11]

(**) $$\sum_i \langle |T_\omega| e_i, e_i \rangle = \sum_i \langle V^* T_\omega e_i, e_i \rangle < +\infty.$$

Έστω

$$|T_\omega| = \int_0^K \lambda dE_\lambda \qquad (K = \||T_\omega|\|)$$

[10] Χωρίς χρήση της Πρότασης 8.1.10

[11] Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί τη σχέση $\sum\limits_i \langle |T| e_i, e_i \rangle < +\infty$ για μια ορθοκανονική βάση του H ονομάζεται trace class operator. Δες πχ. M. Reed & B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I. Functional analysis.* Second edition. Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), New York, 1980. VI.6).

η φασματική ανάλυση του θετικού τελεστή $|T_\omega|$. Τότε αν $0 < a < K$ έχουμε

$$|T_\omega| \geq |T_\omega| E([a, K]) = \int_a^K \lambda dE_\lambda \geq a \int_a^K dE_\lambda = aE([a, K])$$

και συνεπώς

$$a \sum_i \|E([a, K])e_i\|^2 = \sum_i a \langle E([a, K])e_i, e_i \rangle \leq \sum_i \langle |T_\omega| e_i, e_i \rangle < +\infty.$$

Έπεται ότι για κάθε $a \in (0, K)$ ο χώρος $E([a, K])(H)$ έχει πεπερασμένη διάσταση, γιατί αν κάποιος $E([a, K])(H)$ ήταν απειροδιάστατος, θεωρώντας μια ορθοκανονική του βάση $\{e_i : i \in I_0\}$ και επεκτείνοντας σε μια ορθοκανονική βάση του H, θα είχαμε $\sum_i \|E([a, K])e_i\|^2 = \infty$. Από το Φασματικό θεώρημα (σε χώρους πεπερασμένης διάστασης) υπάρχει ορθοκανονική βάση του $E([a, K])(H)$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του θετικού τελεστή $|T_\omega| E([a, K])$.

Γράφουμε λοιπόν

$$(0, K] = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \cup \Omega_0$$

και για κάθε n επιλέγουμε μια (πεπερασμένη) ορθοκανονική βάση $\{e_m^n : m = 1, \ldots, m_n\}$ του $E(\Omega_n)(H)$ από ιδιοδιανύσματα του $|T_\omega| E(\Omega_n)$. Έτσι η οικογένεια $\{e_m^n : m = 1, \ldots, m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου

$$(E((0, K])(H) = (E(\{0\})H)^\perp = (\ker |T_\omega|)^\perp.$$

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ της οικογένειας $\{e_m^n : m = 1, \ldots, m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ και την επεκτείνουμε σε ορθοκανονική βάση όλου του H. Ως προς αυτή τη βάση, η σχέση (**) δίνει [12]

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle |T_\omega| y_n, y_n \rangle < +\infty\,.$$

Επειδή κάθε y_n είναι ιδιοδιάνυσμα του θετικού τελεστή $|T_\omega|$, υπάρχει $\lambda_n \geq 0$ (μάλιστα $\lambda_n > 0$ αφού $y_n \perp \ker |T_\omega|$) ώστε $|T_\omega| y_n = \lambda_n y_n$, οπότε $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n < \infty$. Έχουμε $T_\omega y_n = V|T_\omega| y_n = \lambda_n V y_n$. Γράφουμε $x_n := V y_n$ (η $\{x_n\}$ είναι ορθοκανονική γιατί η V δρα ισομετρικά στον χώρο $(\ker |T_\omega|)^\perp$). Ορίζουμε

$$\phi(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle AT_\omega y_n, y_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle Ax_n, y_n \rangle \qquad (A \in \mathcal{B}(H)).$$

Επειδή η (λ_n) είναι αθροίσιμη και $|\langle Ax_n, y_n \rangle| \leq \|A\|$, η σειρά συγκλίνει απόλυτα, άρα (όπως δείξαμε προηγουμένως) $\phi \in \mathcal{B}_*(H)$. Επειδή η $\{y_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $E(\{0\})H^\perp$, για κάθε $\xi \in H$ έχουμε $\xi = E(\{0\})\xi + \sum_n \langle \xi, y_n \rangle y_n$, άρα $T_\omega \xi = \sum_n \langle \xi, y_n \rangle T_\omega y_n$ και συνεπώς για κάθε $\eta \in H$,

$$\begin{aligned}
\omega(\xi \otimes \eta^*) &= \langle T_\omega \xi, \eta \rangle \\
&= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \xi, y_n \rangle T_\omega y_n, \eta \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \xi, y_n \rangle \langle T_\omega y_n, \eta \rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \langle T_\omega y_n, \eta \rangle \xi, y_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle (\xi \otimes \eta^*) T_\omega y_n, y_n \rangle \\
&= \phi(\xi \otimes \eta^*).
\end{aligned}$$

Επομένως οι ϕ και ω ταυτίζονται στο σύνολο $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης. Επειδή είναι και οι δύο ασθενώς-* συνεχείς, και το $\mathcal{F}(H)$ είναι ασθενώς-* πυκνό στον $\mathcal{B}(H)$ (Πόρισμα 8.1.23), έπεται ότι $\phi = \omega$, δηλαδή

$$\omega(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle Ax_n, y_n \rangle\,. \qquad \square$$

[12] εφόσον $\langle |T_\omega| x, x \rangle = 0$ για κάθε $x \in E(\{0\})H$