ΝΟΗΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Ευγενία Κολέζα
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
ekoleza@cc.uoi.gr

Abstract

In the discipline of Mathematics Education, during the last fifty years, various learning theories concerning mathematical concepts have been proposed. Each theory employs a certain terminology, a fact making the formation of a unified approach, a difficult task. As far as the learning of geometrical concepts is concerned, on the one hand there is a trend for investigation independently of similar efforts in the fields of Algebra and Analysis and on the other hand most of the research concentrates on proof ignoring the very important stage of visualisation. This work analyses basic components of the geometrical way of thinking aiming in the formation of a unified approach in the learning of Mathematical concepts.

Περίληψη

Στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης , τα τελευταία 50 χρόνια, έχουν προταθεί διάφορες θεωρίες μάθησης των μαθηματικών εννοιών. Στα πλαίσια της κάθε θεωρίας χρησιμοποιείται και μια ιδιαίτερη ορολογία, γεγονός που καθιστά δύσκολο το σχηματισμό μιας σφαιρικής αντίληψης της όλης διαδικασίας. Ιδιαίτερα όσον αφορά τη διαδικασία μάθησης των γεωμετρικών εννοιών, αφ' ενός μεν υπάρχει μια τάση διερεύνησης του θέματος ανεξάρτητα από την αντίστοιχη διαδικασία μάθησης εννοιών από το χώρο της Αριθμητικής, Αλγεβρας και Ανάλυσης, αφ'ετέρου οι περισσότερες έρευνες εστιάζονται στο θέμα της απόδειξης, αγνοώντας ένα προηγούμενο εξαιρετικά σημαντικό στάδιο, εκείνο της οπτικοποίησης . Η συγκεκριμένη εργασία αναλύει βασικές συνιστώσες του γεωμετρικού τρόπου σκέψης, με στόχο την ανάδειξη ενός κοινού κορμού στη διαδικασία κατανόησης των Μαθηματικών.

Εισαγωγή

Στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης υπάρχει μια τάση για διάκριση της μαθηματικής γνώσης σε Αφηρημένη ή Αλγοριθμική (Halmos 1985), σε Δηλωτική ή Διαδικαστική (Anderson 1976), σε Προιόν ή Διαδικασία (Kaput 1979, Davis 1975, 1984), σε Αντικείμενο ή Διαδικασία (Dubinsky & Lewin 1976). Οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να λειτουργήσουν ως Εργαλεία ή/και ως Αντικείμενα (Douady 1987), και γενικά τα Μαθηματικά μπορεί να είναι Διαλεκτικά ή Αλγοριθμικά (Henrici 1974). Αντίστοιχα, η κατανόηση των Μαθηματικών μπορεί να είναι Εννοιολογική ή Διαδικαστική (Lesh & Landau 1983, Hiebert 1986), Συσχετιστική (relational) ή Εργαλειακή (instrumental) (Skemp1976).
Ο ίδιος ο Piaget (1970), διέκρινε δύο τρόπους μαθηματικής σκέψης: ένα σχηματικό (figurative), που αναφέρεται στη δυνατότητα να βλέπουμε τα πράγματα στατικά, ως μια ολότητα, και έναν λειτουργικό (operative) που σχετίζεται με νοητικούς μετασχηματισμούς.
Σε ένα ιδιαίτερα αξιόλογο θεωρητικό κείμενο, η Sfard (1991), επιχειρεί μια σύνθεση των προηγούμενων διχοτομήσεων, αποδεικνύοντας ότι η διαδικασία μάθησης και επίλυσης προβλημάτων στα Μαθηματικά, συνίσταται σε μια αλληλεπίδραση λειτουργικών και δομικών αντιλήψεων της ίδιας έννοιας.

Το ότι οι μαθηματικές έννοιες, δεν προσεγγίζονται μέσω των αισθήσεων -γεγονός που διαφοροποιεί τα Μαθηματικά από τις άλλες Θετικές Επιστήμες- είναι μια αδιαμφισβήτητη θέση. Το σημαντικό είναι ότι στα Μαθηματικά μπορεί κάποιος να χειρίζεται έννοιες μέσω

των αναπαραστάσεών τους και να αναφέρεται σε ιδιότητές τους, χωρίς να χρειάζεται να πάρει θέση στο φιλοσοφικό ερώτημα της ύπαρξης ή μη των μαθηματικών αντικειμένων.
Οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων είναι κυρίως σημειωτικές αναπαραστάσεις. Σημειωτικές αναπαραστάσεις είναι οι αναπαραστάσεις που εκφέρονται με χρήση σημείων (signes), (εκφωνήσεις στη φυσική γλώσσα, αλγεβρικοί τύποι, γραφικές παραστάσεις, γεωμετρικά σχήματα) και αποτελούν το μέσο που διαθέτει το άτομο για να εξωτερικεύσει τις νοητικές του αναπαραστάσεις. Είναι, επομένως, εξαρτώμενες από τις νοητικές αναπαραστάσεις και δεν εξυπηρετούν παρά την ανάγκη επικοινωνίας.
Η δυνατότητα χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων, εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο σημειωτικό σύστημα. Οι μαθηματικές επεξεργασίες δεν μπορούν να γίνουν παρά μέσω σημειωτικών αναπαραστάσεων και όχι μέσω νοητικών αναπαραστάσεων.

Η εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης δεν νοείται ανεξάρτητα από την εξέλιξη ιδιαίτερων συμβολισμών για την αναπαράσταση αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων.
Η ιστορία δείχνει ότι η εξέλιξη των Μαθηματικών συνδέεται με την εξέλιξη διαφόρων σημειωτικών συστημάτων που είχαν ως απαρχή τα δυο βασικά αντιληπτικά συστήματα: Γλώσσα και Εικόνα (Μιλάω και Βλέπω).
Για παράδειγμα:

- Από τη γραπτή γλώσσα, προέκυψαν τα συμβολικά συστήματα, από αυτά η αλγεβρική γραφή και από αυτή, από τον $19^{ο}$ αιώνα και μετά, οι τυπικές γλώσσες
- Από την εικόνα, προέκυψαν τα γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση εργαλείων, στη συνέχεια τα σχήματα σε προοπτική, μετά οι γραφικές παραστάσεις με στόχο να μεταφραστούν οι γραμμές σε εξισώσεις. Κάθε σημειωτικό σύστημα εξασφάλιζε ιδιαίτερους τρόπους αναπαράστασης και τρόπους μαθηματικής σκέψης.

Η εσωτερίκευση αυτών των σημειωτικών αναπαραστάσεων ως νοητικές αναπαραστάσεις δημιουργεί νοητικές εικόνες (mental images).
Επομένως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε μονομερώς ότι οι σημειωτικές αναπαραστάσεις είναι προϊόντα νοητικών αναπαραστάσεων. Το αντίστροφο ισχύει επίσης.
Σύμφωνα με τον Duval (1995α, σελ. 3-4):
«η νοητική επεξεργασία των μαθηματικών αντικειμένων (εννοιών), εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο σημειωτικό σύστημα αναπαράστασης. Αρκεί να εξετάσει κάποιος την περίπτωση της Αριθμητικής για να το καταλάβει: δεν παρατηρείται το ίδιο επίπεδο δυσκολίας στην περίπτωση της δεκαδικής γραφής και στη περίπτωση της κλασματικής γραφής ενός αριθμού…Αν δούμε το θέμα σφαιρικά, η πρόοδος στα Μαθηματικά συνοδεύεται πάντα από την εμφάνιση και εξέλιξη νέων σημειωτικών συστημάτων που συνυπάρχουν με το πρώτο και βασικότερο σύστημα, εκείνο της φυσικής γλώσσας…Η ποικιλία των σημειωτικών συστημάτων επιτρέπει την ύπαρξη διαφόρων μορφών αναπαράστασης του ίδιου αντικειμένου αυξάνοντας έτσι τις γνωστικές δυνατότητες του υποκειμένου και κατά συνέπεια τις νοητικές του αναπαραστάσεις…»
Ένα άτομο μπορεί να έχει πρόσβαση σε μια μαθηματική έννοια, μόνον αν διαθέτει τουλάχιστον δύο σημειωτικά συστήματα γι' αυτή την έννοια, και αν μπορεί να περνά χωρίς δυσκολία από το ένα σύστημα στο άλλο (Duval 1995α, σελ. 22).
Μια μαθηματική έννοια (το «αναπαριστώμενο»: represente) μπορεί να θεωρηθεί ως το «περιεχόμενο» μιας σημειωτικής αναπαράστασης, η οποία ως εκ τούτου συνιστά την «εικόνα» (το «αναπαριστόν»: representant) της έννοιας. Το «περιεχόμενο» μπορεί να εκφράζεται μέσα από διαφορετικές «εικόνες» (για παράδειγμα, μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω του αλγεβρικού της τύπου, μέσω μιας γραφικής παράστασης ή μέσω ενός πίνακα τιμών). Το σημαντικό είναι να μπορεί κάποιος να διακρίνει την έννοια μέσα από τις διαφορετικές της αναπαραστάσεις.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η Sfard (1991) υποστηρίζει ότι οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να προσεγγιστούν δομικά και λειτουργικά. Η δομική προσέγγιση έγκειται σε μια σφαιρική αντίληψη της έννοιας σε αντίθεση με τη λειτουργική που συνεπάγεται την ερμηνεία της έννοιας ως διαδικασία, ως «μια δυναμική μάλλον, παρά ως μια ενεργή οντότητα η οποία αρχίζει να υπάρχει όταν οι συνθήκες το επιβάλλουν σε μια ακολουθία δράσεων» (σελ. 4).

Όλες όμως οι (σημειωτικές) αναπαραστάσεις μιας έννοιας δεν ερμηνεύονται με την ίδια ευκολία δομικά και λειτουργικά. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τη Sfard, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης προσφέρει μια δομική αντίληψη, ενώ ο αλγεβρικός τύπος της συνάρτησης προσφέρεται συγχρόνως για λειτουργική και δομική προσέγγιση. Το σύμβολο της ισότητας μπορεί να ερμηνευθεί ως εντολή εκτέλεσης πράξεων, αλλά και ως σύμβολο ταύτισης των δύο μερών.
Η δυνατότητα αντίληψης μιας έννοιας από ένα υποκείμενο λειτουργικά και δομικά είναι απαραίτητη για την πλήρη κατανόηση αυτής της έννοιας.
Αν και *«..στη διαδικασία σχηματισμού μιας έννοιας η λειτουργική αντίληψη προηγείται της δομικής»* (Sfard 1991, σελ.10), στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η ικανότητα για δομική προσέγγιση θεωρείται ως ο απώτερος στόχος της μαθησιακής διαδικασίας. Αυτός είναι και ο λόγος που η διαδικασία δομικής συγκρότησης των μαθηματικών εννοιών αποτέλεσε το αντικείμενο πολλών ερευνών, τόσο από το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όσο και από το χώρο της ψυχολογίας τα τελευταία σαράντα χρόνια.

Αναζήτηση ενός θεωρητικού μοντέλου (νοητικής) κατασκευής των μαθηματικών εννοιών

Ήδη από το 1960 ο Piaget εστίασε την έρευνά του στην διερεύνηση του πως οι δράσεις και οι λειτουργίες γίνονται θεματοποιημένα αντικείμενα σκέψης ή αφομοίωσης (thematized objects of thought or assimilation). O Dienes (1960), ακολουθώντας τον Piaget, χρησιμοποίησε μια γραμματική μεταφορά για να περιγράψει πως ένα κατηγόρημα (ή δράση) γίνεται το υποκείμενο ενός περαιτέρω κατηγορήματος, το οποίο με τη σειρά του γίνεται το υποκείμενο ενός άλλου. O Bruner (1966), στο έργο του "Patterns of Growth", περιέγραψε τα στάδια της γνωστικής εξέλιξης του ατόμου ως μια εξελισσόμενη ικανότητα έκφρασής του μέσω τριών ειδών αναπαραστάσεων: την πραξιακή (enactive), την εικονική (iconic) και την συμβολική (symbolic). O Davis (1984, σελ.29-30), είκοσι περίπου χρόνια αργότερα, κινήθηκε προς την ίδια κατεύθυνση, διατυπώνοντας την άποψη ότι "όταν μια διαδικασία μαθαίνεται για πρώτη φορά, το υποκείμενο τη βιώνει βήμα-βήμα. Δεν είναι ικανό να αντιληφθεί ακόμα τη συνέχεια, τη ροή, την ολότητα της δραστηριότητας. Μέσα όμως από την πρακτική, η διαδικασία (procedure) αποκτάει οντότητα, γίνεται ένα «πράγμα» («thing»). Γίνεται το αντικείμενο μιας λεπτομερούς εξέτασης…επισημαίνονται οι ομοιότητες και οι διαφορές της με άλλες διαδικασίες. Και ενώ η διαδικασία αρχικά ήταν ρήμα που δηλώνει ενέργεια, τελικά γίνεται ουσιαστικό που απαιτεί διερεύνηση». O Davis χρησιμοποιεί τον όρο διαδικασία («procedure») για να δηλώσει έναν αλγόριθμο (με την έννοια των διαδοχικών βημάτων) που χρησιμοποιείται για την εκτέλεση μιας επεξεργασίας ("process")(Davis 1983, σελ.257). Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, στο τέλος της διαδικασίας βρίσκεται η κατανόηση της διαδικασίας ως «μαθηματική οντότητα» ("thing"), με την έννοια της «εννοιακής ολότητας» («conceptual entity») (Greeno 1983).
Στη δεκαετία του '90, οι έρευνες στράφηκαν σε μια πιο λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας μετασχηματισμού μιας «γνωστικής επεξεργασίας» («process»), σε μαθηματική «έννοια» («concept»).
Η Sfard (1992 p.64) περιγράφει τη μετάβαση από την «λειτουργική» («operational») στη «δομική» («structural») αντίληψη ως μια δομή τριών βημάτων:
«Πρώτα πρέπει να υπάρξει μια διαδικασία που θα εκτελεστεί σε ήδη οικεία αντικείμενα, έπειτα θα προκύψει η θεώρηση αυτής της διαδικασίας σαν ένα συμπαγές και ανεξάρτητο όλο, και τελικά θα αποκτηθεί η ικανότητα αντίληψης αυτής της νέας οντότητας σαν ένα συνεχές αυτοτελές αντικείμενο».
Η Sfard αναφέρεται σε αυτά τα βήματα με τους όρους Εσωτερίκευση (Interiorization), Συμπύκνωση (Condensation) και Πραγμοποίηση (Reification) αντίστοιχα. Η Συμπύκνωση είναι μια τεχνική διαδικασία και αναφέρεται στην ικανότητα παράλειψης κάποιων ενδιάμεσων βημάτων, ενώ η Αντικειμενοποίηση καθιστά την όλη διαδικασία μια ανεξάρτητη

πλαισίου και αποδεσμευμένη από συγκεκριμένους αλγόριθμους οντότητα. Ένα ανεξάρτητο γνωστικό αντικείμενο:
«Χωρίς την Πραγμοποίηση οι ικανότητες του ατόμου περιορίζονται σε ένα επίπεδο καθαρά λειτουργικό» («operational") (Sfard 1992 σελ.64-65).
Ο Dubinsky (1991) και οι συνεργάτες του (Cottrill et al. 1996), εκφράζουν την ίδια άποψη μέσω της θεωρίας APOS: (Action→Process→Object. Τα τρία βήματα της θεωρίας APOS: Δράση-Επεξεργασία-Αντικείμενο, οδηγούν τελικά στην συγκρότηση του νοητικού Αντικειμένου (Object), που δεν είναι παρά μια συμπυκνωμένη Επεξεργασία ενσωματωμένη σε ένα αντικείμενο (Ενσωμάτωση:Process Encapsulated into an Object), η οποία στη συνέχεια θα αποτελέσει μέρος ενός πληρέστερου Σχήματος (**S**chema).
Στη θεωρία του Dubinsky, Δράση είναι οποιοσδήποτε φυσικός ή νοητός μετασχηματισμός αντικειμένων, σε άλλα αντικείμενα. Ένα άτομο βρίσκεται στο Επίπεδο κατανόησης της Δράσης (Level of an Action Conception) όταν η κατανόησή του περιορίζεται στο να εκτελεί έναν μετασχηματισμό ακολουθώντας συγκεκριμένα- εξωτερικά καθορισμένα – βήματα. Για παράδειγμα όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης και ένα σημείο, να μπορεί το άτομο να υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης σε εκείνο το σημείο.
Μια Επεξεργασία είναι μια εσωτερική γνωστική κατασκευή που προκύπτει από Εσωτερίκευση της Δράσης (Interiorization of an Action**)**. Ένα άτομο βρίσκεται στο Επίπεδο κατανόησης της Επεξεργασίας (Level of a Process Conception) όταν μπορεί να εκτελεί βήματα ευθέως ή αντίστροφα ή συνεπτυγμένα σε νοητικό πλέον επίπεδο. Για παράδειγμα, όταν θεωρεί την συνάρτηση σαν «μηχανή» που δέχεται εισόδους(inputs) και «επιστρέφει» εξόδους(outputs), ή όταν μπορεί μεν να παραγωγίσει μια συνάρτηση, αλλά δεν είναι ικανό να μετατρέψει μια συνάρτηση σε αλγεβρικό συνδυασμό συναρτήσεων, ώστε να απλουστεύσει την παραγώγιση.
Ένα άτομο έχει κατασκευάσει μια μαθηματική έννοια ως νοητικό Αντικείμενο, όταν έχει την ικανότητα να αντιλαμβάνεται την Επεξεργασία ως ένα συνεκτικό όλο (Επεξεργασία ενσωματωμένη σε ένα αντικείμενο :Process Encapsulated into an Object). Για παράδειγμα, το άτομο έχει κατασκευάσει την έννοια της συνάρτησης, αν μπορεί να σκεφτεί μια συνάρτηση ως άθροισμα δύο συναρτήσεων, χωρίς να αισθάνεται την ανάγκη να αναφερθεί σε συγκεκριμένα παραδείγματα.
Ένα άτομο έχει διαμορφώσει το Σχήμα μιας μαθηματικής έννοιας όταν μπορεί να συνδυάσει Δράσεις, Επεξεργασίες και Αντικείμενα συνειδητά ή ασυνείδητα για να αντιμετωπίσει προβληματικές καταστάσεις στα πλαίσια μιας συγκεκριμένης μαθηματικής περιοχής. Για παράδειγμα, διαθέτει το «Σχήμα της εξίσωσης», όταν μπορεί να εφαρμόσει διάφορες μεθόδους επίλυσης και μπορεί να αντιληφθεί τι σημαίνει το να επιλύεις μια εξίσωση. Στα πλαίσια μιας διαρκούς διαδικασίας εξέλιξης, τα Σχήματα με τη σειρά τους «συμπυκνώνονται» ως Αντικείμενα (Schema Thematized into an Object).
Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ένα άτομο είναι ικανό για μαθηματικούς (κυρίως αριθμητικούς και αλγεβρικούς) συλλογισμούς, όταν μπορεί να χρησιμοποιεί νοητικές δομές, που είναι μίγμα επεξεργασιών (process) και εννοιών (concept), με την παρουσία ενός συμβόλου που λειτουργεί διπλά (Tall 1994). Γι' αυτές τις νοητικές δομές που εμπεριέχουν διαδικασία και προϊόν, ο Tall και οι συνεργάτες του επινοούν τον όρο "procept".
Το "procept, είναι δηλαδή το αποτέλεσμα μιάς διαδικασίας Πραγμοποίησης (κατά Sfard), ή μιάς διαδικασίας Ενσωμάτωσης (κατά τη θεωρία APOS). Για τους Gray και Tall (1993, 1994),ένα στοιχειώδες procept, είναι σύνθεση τριών συνιστωσών: μιας επεξεργασίας(process) που παράγει μια μαθηματική έννοια (concept), και ενός συμβόλου που χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει είτε την επεξεργασία είτε την έννοια.
Οι συγκεκριμένοι ερευνητές χρησιμοποιούν τον όρο Διαδικασία(Procedure), αντί του όρου Δράση(Action), της θεωρίας APOS, και υιοθετούν τη διάκριση του Davis (1984) μεταξύ Διαδικασίας(Procedure) και Επεξεργασίας(Process).
Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του «4+2», μπορούμε να ακολουθήσουμε διάφορες διαδικασίες(procedures). Όλες αυτές οι διαδικασίες αναφέρονται στη πράξη της πρόσθεσης (process), που καταλήγει στην αντίληψη ενός μαθηματικού αντικειμένου:της έννοιας (object/concept) του ακέραιου αριθμού.

Η πράξη της πρόσθεσης, και γενικά μια επεξεργασία(process), γίνεται νοητικό αντικείμενο (object/concept), όταν το υποκείμενο

- δε δεσμεύεται από τις ιδιαιτερότητες του πλαισίου του προβλήματος,
- μπορεί να επιχειρηματολογήσει για τις επιλογές του σε ένα περιβάλλον επικοινωνίας, και κυρίως όταν
- είναι ικανό να επανεξετάσει, και ενδεχομένως να αναθεωρήσει κάποιες επιλογές του, και να τις προσαρμόσει στις ιδιαιτερότητες της εκάστοτε κατάστασης

Είναι εντυπωσιακό ότι ήδη από το 1972, στις «Αρχές της Γενετικής Επιστημολογίας» ο Piaget είχε εκφράσει την άποψη ότι η κατασκευή της μαθηματικής γνώσης, δεν είναι παρά κατασκευή δομών, άποψη που αποτέλεσε 20 χρόνια αργότερα τον πυρήνα της θεωρίας APOS, αλλά και της έννοιας του procept:
«το σύνολο των Μαθηματικών μπορεί να εκφραστεί με όρους κατασκευής δομών,…οι μαθηματικές οντότητες κινούνται από το ένα επίπεδο στο άλλο. Μια «λειτουργία» (operation) πάνω σ' αυτές τις οντότητες, γίνεται με τη σειρά της «αντικείμενο» της θεωρίας, και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να φτάσουμε σε δομές που δομούνται από «ισχυρότερες» δομές…(«structures, being structured by "stronger" structures») (σελ.70).

Η Γεωμετρία ως ιδιαίτερο(;) πεδίο διατύπωσης θεωριών κατασκευής μαθηματικών εννοιών

Σύμφωνα με τους Tall et al. (2000), η γνωστική εξέλιξη στη Γεωμετρία διαφέρει ουσιαστικά από εκείνη στους άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Η φύση των εννοιών της Αριθμητικής, της Άλγεβρας, ή της Ανάλυσης, είναι διαφορετική από τη φύση των εννοιών στη Γεωμετρία. Και στις δύο περιπτώσεις, κοινό σημείο αφετηρίας είναι ο πραγματικός κόσμος. Ενώ όμως η πρώτη επαφή του παιδιού με τη Γεωμετρία αφορά διαμόρφωση αντίληψης για τα αντικείμενα που το περιβάλλουν, η πρώτη επαφή με την Αριθμητική αφορά ενέργειες πάνω σε αντικείμενα.

Σε πρόσφατη εισήγησή του (1999), ο David Tall, αμφισβητεί την εφαρμογή της θεωρίας APOS, στην περίπτωση των γεωμετρικών εννοιών, δεδομένου ότι στο εμπειρικό στάδιο, τα σχήματα συνδέονται με πραγματικά αντίστοιχά τους (real-world prototypes), και αναγνωρίζονται ως ολότητες (μορφές-gestalts). Ως εκ τούτου, στην περίπτωση της Γεωμετρίας, η δομική αντίληψη των αντικειμένων προηγείται της λειτουργικής:
«Η Γεωμετρία περιλαμβάνει πολλές ενέργειες εμπειρικής αφαίρεσης εστιάζοντας σε αντικείμενα (σε αντίθεση με την Αριθμητική και την Άλγεβρα που ξεκινούν με ψευδο-εμπειρική αφαίρεση)….Ισχυρίζομαι ως εκ τούτου ότι η Γεωμετρία ξεκινά ως μια θεωρία που στηρίζεται στα αντικείμενα (και όχι σε ενέργειες πάνω σε αντικείμενα). Αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπάρχουν επεξεργασίες στη Γεωμετρία (processes) - ασφαλώς και υπάρχουν (σχεδιασμός, μέτρηση, κατασκευή κλπ). Εντούτοις, ο στόχος αυτών των επεξεργασιών, (δεν είναι ο νοητικός σχηματισμός αυτών των αντικειμένων, αλλά) είναι να αποκτηθεί γνώση σχετικά με αυτά τα ίδια τα αντικείμενα»
Σε σχετική έρευνα, ο Tall και οι συνεργάτες του, έθεσαν σε κάποια άτομα τα εξής ερωτήματα: «Τι σημαίνει για σας η λέξη τρίγωνο; Τι σημαίνει για σας η λέξη πέντε;»
Το συμπέρασμά τους ήταν ότι:
«η διάκριση μεταξύ της έννοιας του «τριγώνου», και της έννοιας του «πέντε», είναι η διαφορά μεταξύ αυτού που θα μπορούσαμε να ονομάσουμε «perceived object" (αντιληπτό αντικείμενο) και "conceived object" (κατανοηθέν αντικείμενο). «Το πρώτο δημιουργείται με βάση αντιληπτικές πληροφορίες και ενέργειες (βλέπω ένα τρίγωνο, κόβω ένα τρίγωνο, μετράω τις πλευρές του, αγγίζω τις κορυφές του)…Το δεύτερο προκύπτει όταν το άτομο αναστοχάζεται πάνω σε αντιληπτικά δεδομένα και ενέργειες…» (Davis, Tall & Thomas 1997, σελ.135).
Η διάκριση μεταξύ «perceived object" και "conceived object" είναι μια διάκριση που είχε γίνει ήδη από τον Piaget, σε αναφορές του για γνώση που προκύπτει από εμπειρική αφαίρεση (empirical abstraction)- δηλαδή από αντικείμενα του πραγματικού κόσμου-, και για γνώση

που προκύπτει από ψευδο-εμπειρική αφαίρεση (pseudo-empirical abstraction), δηλαδή από διαδικασίες που εκτελούνται πάνω σε αντικείμενα:

«Η μαθηματική αφαίρεση προκύπτει όχι από το αντικείμενο πάνω στο οποίο εκτελείται η δράση, αλλά από την ίδια τη δράση. Μου φαίνεται ότι αυτή είναι η βάση της μαθηματικής και λογικής αφαίρεσης» (Piaget 1970, p.16, in Sfard 1991)

Επιγραμματικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η γνώση που προκύπτει από εμπειρική αφαίρεση είναι η γεωμετρική γνώση, σε αντίθεση με την συμβολική γνώση (αριθμητική ή αλγεβρική γνώση) που προκύπτει από ψευδο-εμπειρική αφαίρεση.

Η διαφορά αυτή μεταξύ γεωμετρικής και συμβολικής γνώσης, έχει αντίκτυπο στο τρόπο οικειοποίησής της από το υποκείμενο.

«Οι γεωμετρικές ιδέες ...γίνονται αντιληπτές δομικά πριν κατανοηθούν οι εναλλακτικές διαδικαστικές περιγραφές τους…….(ενώ) η ιστορική ανάλυση των άλλων (μη γεωμετρικών εννοιών) δείχνει ότι στα συμβολικά Μαθηματικά η πλειοψηφία των ιδεών δημιουργήθηκε μέσα από επεξεργασίες(processes)….Μια εμπεριστατωμένη μελέτη (γνωστικής) εξέλιξης εννοιών όπως ο αριθμός ή η συνάρτηση δείχνει ότι κατανοήθηκαν λειτουργικά πολύ πριν επινοηθούν οι δομικοί τους ορισμοί» (Sfard 1991, σελ 11).

Επιχειρώντας μια σφαιρική θεώρηση όλων των προηγούμενων θεωρητικών απόψεων, καταλήγουμε, επομένως, στις εξής διαπιστώσεις σχετικά με τον τρόπο προσέγγισης των συμβολικών εννοιών (έννοιες Αριθμητικής, Άλγεβρας και Ανάλυσης) αφ' ενός, και των γεωμετρικών εννοιών αφ' ετέρου:

Ενώ η ικανότητα για δομική αντίληψη μιας συμβολικής έννοιας (:επίπεδο Πραγμοποίησης κατά τη Sfard, ή Ενσωμάτωσης κατά τον Dubinsky) **θεωρείται το τελικό στάδιο μιας διαδικασίας** - με ενδιάμεσες τις φάσεις της Εσωτερίκευσης και Συμπύκνωσης (κατά τη Sfard), ή Δράσης και Επεξεργασίας (κατά τον Dubinsky) που συνεισφέρουν στη λειτουργική αντίληψη της έννοιας-, **η δομική αντίληψη μιας γεωμετρικής έννοιας είναι το πρώτο στάδιο μιας διαδικασίας που- περνώντας από μια εξαιρετικά σύνθετη φάση οπτικοποίησης - καταλήγει στη λειτουργική αντίληψη της έννοιας.**

Ο ρόλος και η λειτουργία του γεωμετρικού σχήματος

Η ανάλυση της διαδικασίας εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης, η περιγραφή της φύσης των οπτικών αναπαραστάσεων (visual representations), και ο ρόλος της διαίσθησης (intuition) και της φαντασίας (imagery) στη δημιουργία αυτών των αναπαραστάσεων, είναι - σύμφωνα με πολλούς ερευνητές - από τα πιο δύσκολα θέματα στα πλαίσια της κατανόησης του μαθηματικού τρόπου σκέψης.

Σύμφωνα με τον Bruner (1966), στο στάδιο των εικονικών αναπαραστάσεων το υποκείμενο περνά από τα «πραγματικά αντικείμενα» - μέσω μιας αφαιρετικής διαδικασίας - σε «οπτικά αντικείμενα» («visual objects»), χωρίς να έχει αποκοπεί πλήρως από το πραξιακό στοιχείο. Στην περίπτωση της Γεωμετρίας, κατασκευάζει γεωμετρικά σχήματα με ή χωρίς τη χρήση γεωμετρικών οργάνων, αλλά συγχρόνως είναι σε θέση να εκτελεί νοητικά πειράματα (thought experiments). Αυτός είναι και ο λόγος που το «εικονικό επίπεδο» αποδίδεται συχνά και ως «οπτικο-χωρικό επίπεδο» («visuo-spatial»).

Ο Fischbein (1993) αναφέρεται επίσης στη διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος, παρατηρώντας ότι «έχει μια ιδιότητα που δεν έχουν οι άλλες μαθηματικές έννοιες, συγκεκριμένα περιέχει την νοητική αναπαράσταση των ιδιοτήτων του χώρου» (σελ. 141). Δηλαδή έχει συγχρόνως εννοιολογικές (με την έννοια ότι ελέγχονται από μια θεωρία) και σχηματικές ιδιότητες (σε επίπεδο οπτικής αντίληψης). Γι' αυτό το λόγο αναφέρεται στα γεωμετρικά σχήματα ως «σχηματικές έννοιες» (figural concepts). Κατά προέκταση, **η γεωμετρική σκέψη χαρακτηρίζεται από μια αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρικού σχήματος (με την έννοια της γεωμετρικής φιγούρας-figure) και αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας.**

Στη διαδικασία εξέλιξης αυτής της σκέψης, το γεωμετρικό σχήμα γίνεται κατ' αρχήν αντιληπτό ως μια ολότητα. (οπτικο-χωρική μορφή: visuo-spatial gestalt). Το υποκείμενο, αρχικά αναγνωρίζει «βασικές κατηγορίες», οι οποίες αναπαρίστανται με «πρότυπες νοητικές εικόνες (prototypical mental images (Rosch et al. 1978), δηλαδή αναγνωρίζει σχήματα συγκρίνοντάς τα με γνωστά πρότυπα, και στη συνέχεια επεξεργάζεται τα στοιχεία αυτών των σχημάτων.

Η ανάλυση του σχήματος στα επιμέρους στοιχεία του και η θεώρησή του ως ένα σύνολο ιδιοτήτων πραγματοποιείται από τη στιγμή που αναπτύσσεται ένας λεκτικός κώδικας επικοινωνίας. Με τη χρήση της γλώσσας, το γεωμετρικό σχήμα σταδιακά μετατρέπεται από «οπτικό αντικείμενο» («visual object»), σε «καθορισμένο αντικείμενο (βάσει ιδιοτήτων)» («object-defined») και τέλος σε «ορισμένο αντικείμενο» («defined object»), δηλαδή νοητικό αντικείμενο που περιγράφεται από έναν μαθηματικό ορισμό (Tall 1994).

Συγκεκριμένα, από τη στιγμή που το υποκείμενο θα εφοδιαστεί με ένα λεκτικό κώδικα επικοινωνίας, αρχίζει να βλέπει το γεωμετρικό σχήμα ως ένα σύνολο ιδιοτήτων, για να το αντιμετωπίσει στη συνέχεια ως ένα στοιχείο ενός ευρύτερου συνόλου, και τέλος ως τον κρίκο μιας ιεραρχικής δομής. Τα τρία αυτά διαδοχικά στάδια εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης, αντιστοιχούν στα επίπεδα της Ανάλυσης, Αφαίρεσης και Επαγωγής της Θεωρίας Επιπέδων Γεωμετρικής Σκέψης του van Hiele (1986).

Για παράδειγμα, στην αρχή, - για το σε εξέλιξη υποκείμενο- τα τετράγωνα είναι εντελώς διαφορετικά από τα ορθογώνια, στη συνέχεια τα τετράγωνα γίνονται φορείς των ιδιοτήτων τους και γίνονται αντιληπτά ως μέλη της οικογένειας των ορθογωνίων αλλά και των ρόμβων, και τέλος τα τετράγωνα περιγράφονται ως το σημείο τομής ορθογωνίων και ρόμβων.

Είναι προφανές, όμως, ότι ένα γεωμετρικό σχήμα περιέχει περισσότερη πληροφορία από αυτή που καταγράφεται με την απλή παρατήρηση της μορφής του και τη λεκτική περιγραφή του:

«Τα σχήματα κατά την επίλυση προβλημάτων ή την αναζήτηση απόδειξης επιτρέπουν αυτό που ο Peirce ονομάζει απαγωγή (abduction) και έγκειται στον περιορισμό των υποθέσεων ή των δυνατών επιλογών. Το να μιλάμε για την ευρετική δύναμη του σχήματος ισοδυναμεί με μια απαγωγική σκέψη που οδηγεί στην παραγωγική σκέψη. Η δυνατότητα ενός τέτοιου χειρισμού ξεπερνάει τη γνώση μαθηματικών ορισμών και κανόνων. Η δυνατότητα επεξεργασίας ενός σχήματος συνδέεται με τη δυνατότητα αναδιοργάνωσης των στοιχείων του, την οπτική η θεσιακή αναδιοργάνωση, που μπορεί να εκτελεστεί φυσικά ή νοητικά ανεξάρτητα από οποιαδήποτε μαθηματική γνώση» (Duval 1995α , σελ 181).

Συγκεκριμένα ο Duval (1995β), προσδιορίζει τέσσερις τύπους «γνωστικής κατανόησης» (cognitive apprehension) ενός γεωμετρικού σχήματος:

- **Την αντιληπτική κατανόηση** (perceptual apprehension), που συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και (στη περίπτωση ενός σύνθετου σχήματος) στην διάκριση των μερών του με τρόπο όμως που ενδεχομένως δεν εξυπηρετεί την περαιτέρω επεξεργασία του στην περίπτωση που απαιτείται μια αιτιολόγηση, ή απόδειξη (με βάση το σχήμα) ή έστω μια διαδικασία κατασκευής,
- **Την σειριακή κατανόηση** (sequential apprehension), που συνίσταται στην αντίληψη του τρόπου δόμησης των επιμέρους στοιχείων του και η οποία είναι απαραίτητη όταν χρειάζεται να κατασκευάσουμε (με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων ή του υπολογιστή) ή να περιγράψουμε ένα σχήμα,
- **Τη λεκτική κατανόηση** (discursive apprehension), που συνδέεται αναπόσπαστα με τις δύο προηγούμενες, ιδιαίτερα όταν η επεξεργασία του σχήματος εντάσσεται σε ένα γενικότερο πλαίσιο κατανόησης μιας εκφώνησης, παρακολούθησης ενός τυπικού μαθηματικού συλλογισμού στα πλαίσια μιας απόδειξης, ή εκτέλεσης αριθμητικών υπολογισμών που σχετίζονται με μετρήσεις των 1D στοιχείων του σχήματος, και τέλος
- **Τη λειτουργική κατανόηση** (operative apprehension), η οποία στην ουσία εκφράζεται μέσω του απαγωγικού συλλογισμού που αναλύσαμε προηγουμένως.

Δηλαδή, η λειτουργική κατανόηση ενός σχήματος είναι ένα είδος ευφυούς οργάνωσης του σχήματος. Σύμφωνα εξ' άλλου με τον Piaget (1969), η νοητική αντίληψη ενός αντικειμένου ή

μιας διαδικασίας εμπεριέχει ευφυία (intelligence) η οποία οργανώνει τα αισθητηριακά – αντιληπτικά δεδομένα. Χάρη σε αυτή, το υποκείμενο εντοπίζει ιδιαίτερα στοιχεία του παρατηρούμενου αντικειμένου ή φαινομένου, ομοιότητες και διαφορές, χωρικές σχέσεις κλπ. Πολλοί ερευνητές αναφέρονται στο ρόλο της ευφυίας κατά την εμπειρική αφαίρεση, χρησιμοποιώντας τον όρο «φαντασία» (“imagery”) (Krutetskii 1976, Presmeg 1992, Arnheim 1969, Hebb 1968).
Με άλλα λόγια, η αντιληπτική κατανόηση αφορά αυτό που βλέπουμε με τη πρώτη ματιά στο γεωμετρικό σχήμα. Η λεκτική κατανόηση προϋποθέτει μια αλλαγή στην αντιληπτική κατανόηση, μια αλλαγή στον τρόπο που βλέπουμε το γεωμετρικό σχήμα. Από τη διάσταση 2D πρέπει να περάσουμε στη διάσταση 1D και 0D, να κατανοήσουμε δηλαδή τον τρόπο που συνδέονται μεταξύ τους τα επιμέρους στοιχεία του σχήματος (discursive apprehension).

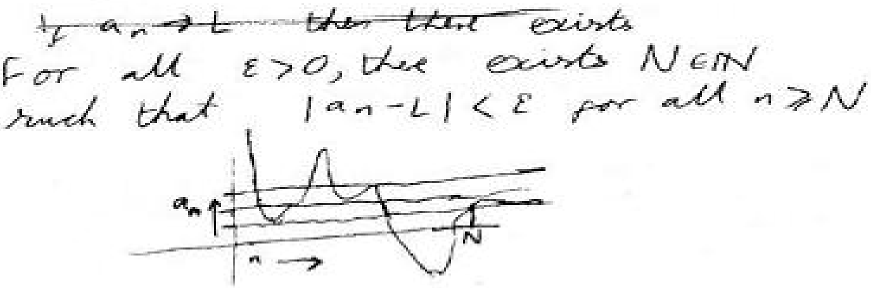
Η λειτουργική κατανόηση, αφορά τη νοητική αναδιοργάνωση του σχήματος ώστε να αναδυθούν σχέσεις που δεν είναι προφανείς στην αντιληπτική κατανόηση (van Sommers 1984). Η λειτουργική κατανόηση είναι δηλαδή μια ευρετική επεξεργασία του σχήματος με τρόπο ώστε να διατηρούνται οι ιδιότητές του.

Συνοψίζοντας τους τέσσερις προηγούμενους τρόπους κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος, ο Duval (1995α, σελ.181-182), διακρίνει τελικώς δύο επίπεδα κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος: Το πρώτο επίπεδο είναι αυτό που περιγράφεται ως «perception» και αφορά μια μορφιστική (gestaltist) κατανόηση του σχήματος, στα πλαίσια της οποίας αναγνωρίζονται οι δομικές μονάδες του σχήματος (:στοιχεία 1D και 0D). Αυτό το πρώτο επίπεδο αντιστοιχεί στην αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension) και τη σειριακή κατανόηση (sequential apprehension) που αναφέραμε προηγουμένως. Το δεύτερο επίπεδο αφορά τη λειτουργική κατανόηση (operative apprehension) του σχήματος.

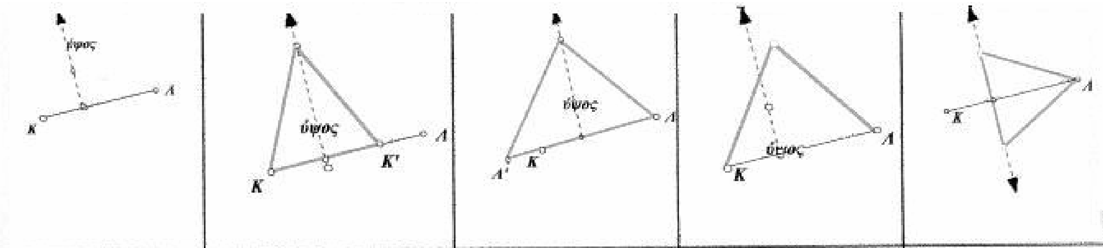
Σχετικά με τον τρόπο αντίληψης και επεξεργασίας του γεωμετρικού σχήματος στα πλαίσια επίλυσης προβλημάτων, από διδακτική και ψυχολογική σκοπιά είναι σημαντικό να κάνουμε κάποιες επισημάνσεις:

1. Πολλές φορές γίνεται εσφαλμένη διάκριση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων. Μια αναπαράσταση δεν χαρακτηρίζεται εξωτερική ή εσωτερική απλά και μόνο από τη μορφή της, αλλά από τον τρόπο που δημιουργείται και το ρόλο που καλείται να παίξει στην κατασκευή της γνώσης. Για παράδειγμα ένα σχήμα ή ένα διάγραμμα δεν είναι απαραίτητα εξωτερική αναπαράσταση, αλλά μπορεί να υφίσταται και ως νοητική εικόνα, προϊόν εσωτερίκευσης μιας εξωτερικής σημειωτικής αναπαράστασης..
Οι νοητικές αυτές εικόνες σε ένα δεύτερο επίπεδο αφαίρεσης μπορούν να λειτουργήσουν ως «ευρετικό πεδίο» για τη σύλληψη, την κατανόηση, ή την επεξήγηση συνθετότερων εννοιών. Σύμφωνα με την Dual Coding Theory (Paivio 1986) η μορφή των νοητικών αναπαραστάσεων είναι συνήθως διπλή. Ο Paivio υποστηρίζει ότι υπάρχουν δύο τύποι αναπαραστασιακών μονάδων: Οι «imagens» για τις νοητικές εικόνες, και οι «logogens» για τις λεκτικές οντότητες.
Έτσι εξηγείται το γεγονός ότι πολλοί μαθηματικοί-ερευνητές χρησιμοποιούν (νοητά, στο χαρτί, ή στον υπολογιστή) ένα σχήμα ή διάγραμμα, για να αποκτήσουν μια μεγαλύτερη εξοικείωση (Sfard 1994) με τη δομή του ερευνητικού τους αντικειμένου, και στη συνέχεια περνούν σε τυπικό έλεγχο των διαισθητικών τους υποθέσεων (Poincare 1913, Hadamard 1945). Με τη βοήθεια δηλαδή ενός σχήματος ή διαγράμματος, «χτίζουν» νοητά μια έννοια, πριν την «ελέγξουν» τυπικά (Skemp 1979). Όταν πρόκειται δε να χρησιμοποιήσουν ένα σχήμα για την επεξήγηση μιας αφηρημένης ιδέας, ο ρόλος αυτού του σχήματος πολλές φορές είναι απλά διαισθητικός.
Είναι ενδεικτική η μαρτυρία του Hardy (1967 σελ. 125):
«Ας υποθέσουμε ότι δίνω μια διάλεξη σχετικά με κάποιο γεωμετρικό σύστημα, όπως η Ευκλείδεια Γεωμετρία, και ότι χαράσσω σχήματα στο πίνακα για να κεντρίσω τη φαντασία του ακροατηρίου, πρόχειρες ευθείες, κύκλους ή ελλείψεις. Αναμφίβολα η αλήθεια των θεωρημάτων που αποδεικνύω με κανένα τρόπο δεν επηρεάζεται από την ποιότητα των σχημάτων μου. Η

λειτουργία τους είναι απλά να ξεκαθαρίσουν το νόημα των όσων λέω στους ακροατές, και αν αυτό μπορώ να το πετύχω, δεν θα είχα κανένα όφελος να τα ξανάφτιαχνα πιο φροντισμένα. Δεν είναι παρά παιδαγωγικές επεξηγήσεις, και δεν αποτελούν το πραγματικό αντικείμενο της ομιλίας μου».
Η κατασκευή αφηρημένων εννοιών με βάση σχηματικές νοητικές αναπαραστάσεις (visuospatial imagery), δεν χαρακτηρίζει μόνο μαθηματικούς-ερευνητές (Pinto 1998, Pinto & Tall 1999). Σε πρόσφατη δημοσίευσή τους, οι Pinto & Tall (2002, σελ.2), αναφέρουν σχετικά:
«Στην έρευνά μας σχετικά με τους διαφορετικούς τρόπους που οι μαθηματικοί φτιάχνουν Μαθηματικά βρήκαμε ανάλογες διαφορές με εκείνες των μαθητών που μαθαίνουν Μαθηματικά. Μερικοί δούλευαν ξεκινώντας από τον τυπικό ορισμό και κατασκευάζοντας ιδιότητες με παραγωγική λογική. Αυτή η στρατηγική συνάδει με τη θεωρία του Dubinsky…Υπάρχουν όμως μαθητές που χρησιμοποιούν μια εντελώς διαφορετική στρατηγική…χτίζουν με βάση τη φαντασία τους, δίνουν νόημα στον ορισμό κατασκευάζοντας μια εικόνα που υποστηρίζει τους τυπικούς συλλογισμούς…εξελίσσουν τη σκέψη τους εκλεπτύνοντας και επανακατασκευάζοντας την ήδη υπάρχουσα νοητική εικόνα μέχρι που να φτάσει σε μια μορφή που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή της τυπικής θεωρίας».
Αυτή η «εικόνα», δεν αποδίδει πιστά τις ιδιότητες της μαθηματικής έννοιας, αλλά είναι αρκετά «συγκεκριμένη» για το άτομο που την επικαλείται Οι Pinto & Tall (2002), παραθέτουν μια τέτοια νοητική εικόνα την οποία ένας πρωτοετής φοιτητής, αποτυπώνει στο χαρτί, ενώ προσπαθεί να απαντήσει σε ερώτηση που αφορά τον ορισμό του ορίου μιας ακολουθίας: « Δεν θυμάμαι τον ορισμό (του ορίου)….απλά μου έρχεται στο μυαλό αυτή η εικόνα….να σκεφτώ…νομίζω πως μπορώ να πω ότι….».Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο ορισμός προκύπτει από την εικόνα και όχι η εικόνα από τον ορισμό.



2. Οι νοητικές εικόνες γεωμετρικών σχημάτων, έχουν συνήθως σημείο αναφοράς μια «πρότυπη» φιγούρα: για παράδειγμα, οι βασικές συνιστώσες της εικόνας –πρότυπο του ισοσκελούς τριγώνου, είναι οι δύο ίσες πλευρές και το ύψος- άξονας συμμετρίας(Καμπάνη 2003). «Όταν σχηματιστούν τα πρότυπα, ως νοητικές εικόνες, επηρεάζουν αποφασιστικά την αναγνώριση των σχημάτων και τη λύση των προβλημάτων»(Hasegawa 1997).
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι διαδοχικές προσπάθειες μιας μαθήτριας Α Λυκείου, που προσπαθεί να συνταιριάσει τις απαιτήσεις του προβλήματος με την νοητική εικόνα του προτύπου που έχει σχηματίσει (Καμπάνη 2003).



Πρόβλημα Στο παραπάνω σχήμα ξεκινήσαμε την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ΚΕΛ, μπορείς να τη συμπληρώσεις;	μικραίνει το μεγαλύτερο κομμάτι ή	μεγαλώνει το μικρότερο κομμάτι ή	φτιάχνει ισοσκελές με ύψος παράλληλο αυτού που του δόθηκε ή	αλλάζει ρόλους στην πλευρά και το ύψος, ώστε να πετύχει μεσοκάθετο, εδώ εγκαταλείπει τον προσανατολισμό

3. Υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ της οπτικής αντίληψης (perception) και της οπτικοποίησης (visualization). Στην πρώτη περίπτωση έχουμε μια συνολική εικόνα του αντικειμένου ή της κατάστασης που παρατηρούμε, η οποία προφανώς δεν μπορεί παρά να είναι ατελής. Η τέλεια οπτική αντίληψη απαιτεί εξερεύνηση μέσω κίνησης είτε του παρατηρητή, είτε του εξεταζόμενου αντικειμένου.

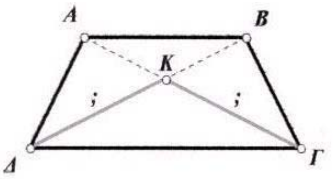
Η οπτικοποίηση δεν στηρίζεται στην άμεση παρατήρηση, αλλά στη δημιουργία σημειωτικών αναπαραστάσεων, και στην επεξεργασία αυτών των αναπαραστάσεων. Δεν στηρίζεται δηλαδή πάνω στο σχήμα, αλλά σε ενέργειες που εκτελούνται πάνω στο σχήμα. **Η δυσκολία για το υποκείμενο έγκειται κυρίως στο να αποφασίσει ποιες οπτικές μονάδες θα συνδυάσει**. *«Το σχήμα είναι μια αναπαράσταση, δηλαδή προϋποθέτει την κατασκευή μιας εικόνας διαφορετικής από το προϊόν της άμεσης αντίληψης, και τίποτα δεν αποδεικνύει ότι οι χωρικές σχέσεις σε αυτή την εικόνα θα είναι του ίδιου επιπέδου όπως εκείνες της αντίστοιχης αντιληπτικής εικόνας»* (Piaget 1972, σελ. 65).

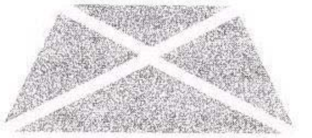
Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα: Σε μαθητές της Α Λυκείου δόθηκε το πρόβλημα:

«Ξεκινώντας από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ φτιάξε ένα ισοσκελές τρίγωνο. Δικαιολόγησε γιατί το τρίγωνο που έφτιαξες είναι ισοσκελές»

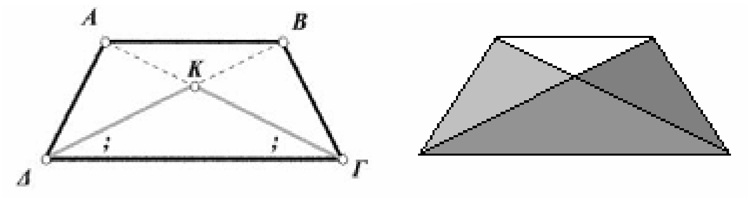
Χωρίς δυσκολία όλοι οι μαθητές χάραξαν τις διαγώνιες του τραπεζίου και πρότειναν ως ισοσκελές τρίγωνο το ΔΚΓ. Για να αποδείξουν ότι είναι ισοσκελές, έπρεπε είτε να δείξουν ότι ΚΔ=ΚΓ συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΚΑΔ και ΚΒΓ, είτε να αποδείξουν την ισότητα των γωνιών ΚΔΓ και ΚΓΔ, συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ.

Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί με μια αναδιοργάνωση του αρχικού τραπεζίου σε πρωταρχικές δομές(Vurpillot 1972)



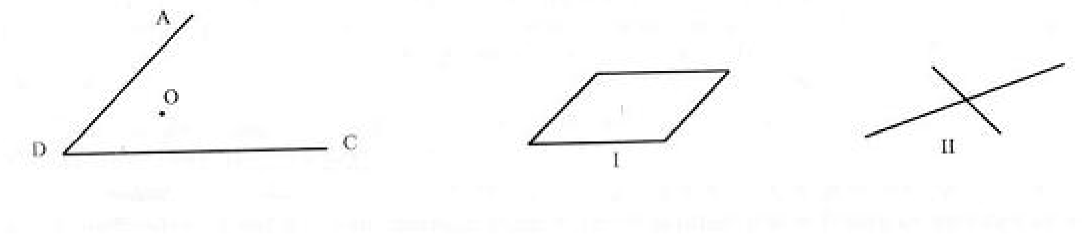


Αντίθετα, η δεύτερη περίπτωση, αντιστοιχεί σε χωρισμό του τραπεζίου σε δευτερεύουσες επικαλυπτόμενες δομές.



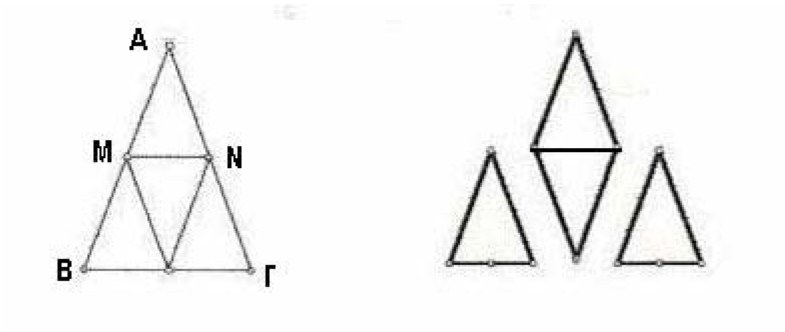
Παρά το ότι η απόδειξη της ισότητας των τριγώνων στη δεύτερη περίπτωση είναι μαθηματικά ευκολότερη, η δυσκολία της οπτικοποίησης του αρχικού τραπεζίου ως σύνθεσης δυο επικαλυπτόμενων τριγώνων , έκανε τους μαθητές να στραφούν –χωρίς επιτυχία- στη πρώτη περίπτωση.

4. Ένα σημαντικό πρόβλημα που εμφανίζεται συχνά στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι ότι οι μαθητές δεν μπορούν να περάσουν από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο (conversion), δεν μπορούν δηλαδή να κινητοποιήσουν πολλά συστήματα συγχρόνως, και κυρίως δεν αναγνωρίζουν την ίδια έννοια μέσα από διαφορετικές της αναπαραστάσεις σε διάφορα σημειωτικά συστήματα (πχ. φυσική γλώσσα - γεωμετρικό σχήμα, αλγεβρικός τύπος - γραφική παράσταση, αριθμητική γραφή - γεωμετρική αναπαράσταση…).
Πολλές φορές μάλιστα, αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες και στο να κάνουν μετατροπές μέσα στο ίδιο σημειωτικό σύστημα .
Για παράδειγμα , η κατασκευή ενός παραλληλογράμμου, κέντρου O με πλευρές επάνω στις ημιευθείες DA και DC, είναι εφικτή μόνον αν μπορούν να περάσουν από τη σημειωτική αναπαράσταση I του παραλληλογράμμου, στη σημειωτική αναπαράσταση II (Duval 1997).



5. Δεν θα πρέπει να συνδέεται (απαραίτητα) η ικανότητα ευρετικής/λειτουργικής επεξεργασίας του σχήματος με την ικανότητα μαθηματικής αιτιολόγησης αυτής της επεξεργασίας, ή την ικανότητα κατασκευής ενός σχήματος. Η δυνατότητα λειτουργικής επεξεργασίας ενός σχήματος συνδέεται με τη δυνατότητα αναδιοργάνωσης των στοιχείων του, και τη δυνατότητα για οπτική η θεσιακή τροποποίησή του και μπορεί να εκτελεστεί φυσικά ή νοητά ανεξάρτητα από οποιαδήποτε μαθηματική γνώση.

Για παράδειγμα, η σύγκριση των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΜΝ, είναι ανεξάρτητη της γνώσης ή μη του τύπου του εμβαδού. Απαιτείται απλά αναδιοργάνωση του αρχικού σχήματος.

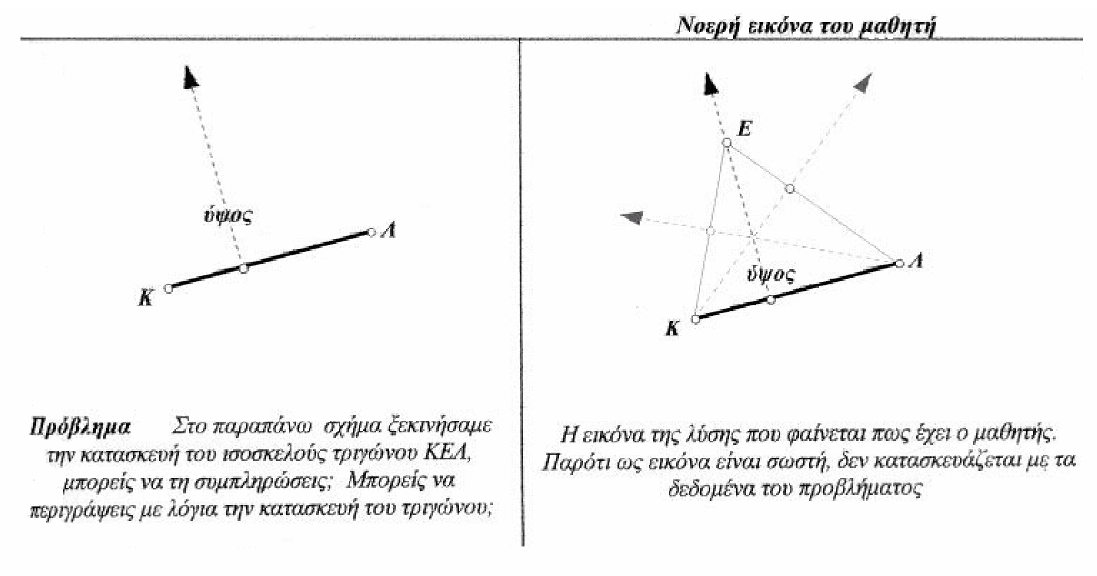


Συγκεκριμένα ο Duval (1998) υποστηρίζει ότι αυτό που ονομάζουμε «γεωμετρική σκέψη», περιλαμβάνει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών που πληρούν συγκεκριμένες επιστημολογικές λειτουργίες. Οι διαδικασίες αυτές είναι:

- Διαδικασίες Οπτικοποίησης (ή νοερής απεικόνισης), που σχετίζονται με τη νοερή αναπαράσταση μιας γεωμετρικής έννοιας ή την ευρετική/λειτουργική διερεύνηση μιας σύνθετης γεωμετρικής κατάστασης
- Διαδικασίες Κατασκευής με χρήση εργαλείων, και
- Διαδικασίες Συλλογισμού, ιδιαίτερα λεκτικές διαδικασίες, για την επέκταση της γνώσης, την επεξήγηση, ή την απόδειξη.

Οι διαδικασίες αυτές είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Για παράδειγμα, ακόμα και αν γενικά η κατασκευή οδηγεί σε μια οπτικοποίηση, και η οπτικοποίηση κατευθύνει μια κατασκευή, υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που επεμβαίνουν ουσιαστικά (πχ. η δυσκολία χρήσης των γεωμετρικών οργάνων). Επίσης, η οπτικοποίηση μπορεί να συνεισφέρει θετικά σε επίπεδο συλλογισμού, ενδέχεται όμως να λειτουργήσει και παραπλανητικά. Ιδιαίτερα αν υπάρχει μη συμβατότητα μεταξύ νοητικής εικόνας-πρότυπο και ζητούμενης κατασκευής.

Το παρακάτω παράδειγμα είναι ενδεικτικό (Καμπάνη 2003)



Συνέπειες για τη διδασκαλία

Η προηγούμενη θεωρητική ανάλυση, μας επιτρέπει να δούμε κάτω από μια άλλη διάσταση τον τρόπο που διδάσκονται τα Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

1. Κατ' αρχήν, από τη σκοπιά της Ψυχολογίας των Μαθηματικών, το πλαίσιο ερμηνείας της διαδικασίας μάθησης των μαθηματικών εννοιών είναι κοινό τόσο για τη Γεωμετρία, όσο και για την Αριθμητική, Άλγεβρα ή Ανάλυση.
Τόσο στην περίπτωση της Γεωμετρίας όσο και στην περίπτωση των συμβολικών Μαθηματικών, απουσιάζει το «πραγματικό αντικείμενο». Το υποκείμενο δεν εκτελεί ενέργειες σε αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, αλλά σε (νοητικές) αναπαραστάσεις πραγματικών αντικειμένων. Δεν υπάρχει, δηλαδή -σύμφωνα με τον Piaget- «εμπειρική αφαίρεση», αλλά «ψευδο-εμπειρική» αφαίρεση.
Για παράδειγμα, το σύμβολο του αριθμού «1» δεν προκύπτει απ' ευθείας από την απλή παρατήρηση «ενός πραγματικού αντικειμένου», αλλά από την λογική διεργασία του προσδιορισμού του κοινού χαρακτηριστικού συνόλων με ένα στοιχείο. Ανάλογα, το υποκείμενο που επιλύει ένα πρόβλημα σχετικά με ένα γεωμετρικό σχήμα, δεν εκτελεί ενέργειες σε ένα πραγματικό αντίστοιχο του σχήματος, αλλά σε μια σημειωτική αναπαράσταση του πραγματικού αντικειμένου. Απλά, στην περίπτωση της Γεωμετρίας μιλάμε για οπτικοποίηση ή οπτική σκέψη (visualization or visual thinking), ενώ στη περίπτωση της Αριθμητικής, Άλγεβρας ή Ανάλυσης για αναλυτική σκέψη (analysis or analytic thinking), η οποία στηρίζεται σε, λεκτική αναπαράσταση(discursive representation) αλλά σε πολλές περιπτώσεις και σε οπτικοποίηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση.
Η δυσκολία , επομένως, της οπτικοποίησης ενός γεωμετρικού σχήματος (όπου οι σχηματικές μονάδες είναι διάστασης 0D, 1D και 2D) δεν είναι ξένη με τη δυσκολία οπτικοποίησης μιας γραφικής παράστασης (όπου οι σχηματικές μονάδες είναι σημεία-συντεταγμένες σημείων), αλλά ούτε και με την επίλυση ενός προβλήματος αναλογιών (με λεκτικές μονάδες) ή μιας εξίσωσης (με συμβολικές μονάδες). Εκείνο που αλλάζει είναι οι εσωτερικοί κανόνες που διέπουν την κάθε σημειωτική αναπαράσταση. Αυτό σημαίνει ότι αποτελέσματα ερευνών που εμφανίζονται ως μεμονωμένες περιπτώσεις μπορεί να αποτελούν απλά τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος.
Σε όλες τις περιπτώσεις, η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών επιτυγχάνεται μέσω της εσωτερίκευσης σημειωτικών αναπαραστάσεων**.** Τα γεωμετρικά σχήματα ή οι γραφικές παραστάσεις δεν είναι άμεσα προσβάσιμα όπως είναι μια εικόνα. Επομένως η μάθησή τους δε μπορεί να περιοριστεί στο να εκπαιδευτεί κάποιος στο να τα κατασκευάζει σωστά. Κι αυτό γιατί κατά την κατασκευή αρκεί να εστιάσουμε την προσοχή μας σε κάποιες σχηματικές μονάδες και σε ιδιότητες, ενώ η οπτικοποίηση συνίσταται στη σύλληψη του συνόλου των σχέσεων (synoptic function) και στην αξιολόγηση του τι είναι σημαντικό και τι όχι. Συνήθως οι μαθητές σε ένα σχήμα ή σε μια γραφική παράσταση βλέπουν απλά μια εικόνα και όχι την συνολική οργάνωση της αναπαράστασης.
Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει ικανότητα συσχετισμού των διαφόρων σημειωτικών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας.
Γι' αυτό και παρατηρείται συχνά το γεγονός οι μαθητές να μπορούν εύκολα να κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, η να αναγνωρίζουν μια συνάρτηση από τη συνολική της μορφή, αλλά να μη μπορούν να περάσουν από τη γραφική παράσταση στην αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης, ή να συσχετίσουν συμβολικές εκφράσεις και λεκτικές εκφράσεις με αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Ο Schoenfeld (1986), χαρακτηρίζει αυτή την αδυναμία ως «ακατάλληλη τμηματοποίηση» ("inappropriate compartmentalization"): *«Οι μαθητές δεν βλέπουν καμία σύνδεση μεταξύ των παραγωγικών Μαθηματικών που χρησιμοποιούνται σε μια μαθηματική απόδειξη και των*

επαγωγικών Μαθηματικών των διαδικασιών κατασκευής…Αν (όμως) δεν μπορούν να κάνουν τέτοιους συσχετισμούς, αγνοούν την ουσία των Μαθηματικών».
Στην πραγματικότητα, σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο που παρουσιάσαμε, οι σημαντικοί συσχετισμοί που πρέπει να επιδιώξουμε μέσω της διδασκαλίας δεν είναι μεταξύ παραγωγικών και εμπειρικών Μαθηματικών, μεταξύ αποδείξεων και κατασκευών….αλλά μεταξύ διαφόρων μορφών σημειωτικών αναπαραστάσεων. Οι συσχετισμοί αυτοί δημιουργούν τη γνωστική αρχιτεκτονική μέσω της οποίας οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίζουν το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων και έτσι να κάνουν αντικειμενική σύνδεση παραγωγικών και εμπειρικών Μαθηματικών (Duval 1995α.)

Οι θεωρητικές απόψεις που υποστηρίχθηκαν προηγουμένως, δεν αφορούν μόνο τη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αλλά και στην τριτοβάθμια επίσης. Σε ένα συλλογικό τόμο σχετικά με την διδασκαλία της Γραμμικής Άλγεβρας, (Dorier 1997), ο Joel Hillel υποστηρίζει ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στη Γραμμική Άλγεβρα, οφείλονται κυρίως στη δυσκολία γνωστικής σύνδεσης των διαφόρων επιπέδων αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη θεματική περιοχή: σύνδεση της γλώσσας της γενικής θεωρίας των διανυσματικών χώρων με τη γλώσσα της πιο ειδικής θεωρίας των πραγματικών ν-άδων (της γλώσσας του R^n) και της γεωμετρικής γλώσσας του διδιάστατου και τρισδιάστατου χώρου. (Αυτός) εστιάζει ειδικότερα στην αναπαράσταση των διανυσμάτων και των γραμμικών τελεστών σε τρία διαφορετικά επίπεδα: αφηρημένο, αλγεβρικό και γεωμετρικό.
Οι φοιτητές/ μαθητές δυσκολεύονται να ταυτίσουν ένα διάνυσμα με τις αναπαραστάσεις του σε διαφορετικές βάσεις.

Αυτά τα τρία επίπεδα αντιστοιχούν σε τρεις μορφές συλλογισμού: Συνθετικό-Γεωμετρικό, Αναλυτικό-Αριθμητικό και Αναλυτικό-Δομικό. Οι μορφές αυτές συλλογισμού, αντικατοπτρίζουν την ιστορική σημειωτική εξέλιξη της Γραμμικής Άλγεβρας: Από την «αλγεβροποίηση» του χώρου (μετάβαση από τη Συνθετική στην Αναλυτική Γεωμετρία), στην δόμηση, χάρη της οποίας ο χώρος γίνεται ένα αλγεβρικό σύστημα, κλειστό ως προς κάποιες πράξεις.
Η έρευνα της Κ. Παυλοπούλου (1994) για τη συσχέτιση σημειωτικών αναπαραστάσεων στη περίπτωση της Γραμμικής Άλγεβρας, επιβεβαιώνει ότι οι σχέσεις μεταξύ εννοιολογικής μάθησης και σημειωτικής μάθησης είναι πολύ πιο σύνθετη από αυτή που υποπτευόμαστε όταν οργανώνουμε τη διδασκαλία.
Παρόμοια συμπεράσματα έχουν προκύψει και από τη διδακτικο-ψυχολογική ανάλυση και άλλων μαθηματικών εννοιών, όπως για παράδειγμα της έννοιας του ορίου (Cornu 1991, Tall & Vinner 1981)

2. Η διερεύνηση του θέματος της οπτικοποίησης είναι σημαντική όχι μόνο για διδακτικούς λόγους, αλλά και γιατί προσφέρει το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για μια τεκμηριωμένη κριτική των «ευκολιών» που παρέχουν οι σύγχρονες τεχνολογίες. Όσον αφορά τα Μαθηματικά, μια «ευκολία» αξιολογείται ως θετικά συνεισφέρουσα στην κατασκευή ενός νοήματος ή μιας έννοιας, αν εμπεριέχει τη δυνατότητα κίνησης σε όλο το πλέγμα των διαφόρων μορφών αναπαράστασης της έννοιας. Δηλαδή αν οι νέες τεχνολογίες δεν λειτουργήσουν απλά ως ενισχυτές της οπτικής αντίληψης μιας μαθηματικής έννοιας ή κατάστασης, αλλά και ως αναδιοργανωτές του γνωστικού συστήματος (Pea 1985, Dorfler 1993).

3. Σε προηγούμενη παράγραφο, επιχειρώντας μια σύγκριση της διαδικασίας κατανόησης των συμβολικών εννοιών και των γεωμετρικών εννοιών, διατυπώσαμε την άποψη ότι στην περίπτωση των συμβολικών εννοιών, η μαθησιακή διαδικασία είναι μια πορεία από τη λειτουργική στη δομική κατανόηση μιας έννοιας, ενώ αντίθετα στη περίπτωση των γεωμετρικών εννοιών, η δομική κατανόηση μιας γεωμετρικής έννοιας είναι το πρώτο στάδιο

μιας διαδικασίας που- περνώντας από μια εξαιρετικά σύνθετη φάση οπτικοποίησης - καταλήγει στη λειτουργική κατανόηση της έννοιας.

Εντούτοις, ο διαχωρισμός αυτός δεν είναι απόλυτος, ιδιαίτερα όσον αφορά έννοιες από το χώρο της Ανάλυσης. Σύγχρονες έρευνες σχετικές με τις διάφορες μορφές απόδειξης που χρησιμοποιούν οι μαθητές στο χώρο των συμβολικών Μαθηματικών, έδειξαν ότι θα μπορούσαμε να εντάξουμε αυτές τις μορφές σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τις προτασιακές αποδείξεις (prepositional proofs) και τα νοητικά πειράματα (thought experiments). Οι πρώτες, είναι λεκτικές ή συμβολικές, που διέπονται από ξεκάθαρους και συγκεκριμένους κανόνες, ενώ οι δεύτερες θεωρούνται ότι αναπαριστούν πράγματα ταυτόχρονα, χωρίς ιδιαίτερα σύμβολα που να συσχετίζουν τις διάφορες εκφάνσεις τους.
Ένα νοητικό πείραμα δεν απαιτεί καμία τυπική γνώση: για να ικανοποιηθούμε από τις επιπτώσεις του, απλά φανταζόμαστε μια κατάσταση στην οποία οι υποθέσεις ισχύουν και σκεπτόμαστε τις πιθανές επιπτώσεις . Ένα νοητικό πείραμα έχει μια οπτική συνιστώσα. Η οπτικοποίηση στο νοητικό πείραμα προσφέρει μια δομική αντίληψη της έννοιας ή της διαδικασίας που επεξεργαζόμαστε νοητικά. Η εικόνα που δημιουργείται είναι μια γενική εικόνα (generic picture) (Mason & Pimm 1984), που στη συνέχεια υπόκειται σε λειτουργική επεξεργασία ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες του προβλήματος. Για να γίνει κατανοητό αυτό, αρκεί να σκεφτεί κάποιος, την «εικόνα» της αντιμεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού, ή του αθροίσματος, των ν πρώτων ακεραίων, ή το παράδειγμα σχετικά με τον ορισμό του ορίου που αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο.

Είδαμε αναλυτικά σε προηγούμενες παραγράφους ότι στη Γεωμετρία χρησιμοποιούμε νοητικά πειράματα στα πλαίσια της διαδικασίας οπτικοποίησης. Φαίνεται όμως ότι ο ρόλος της οπτικοποίησης και των νοητικών «εικόνων» είναι εξ' ίσου σημαντικός και για τη διαδικασία κατανόησης εννοιών και από το χώρο της Αριθμητικής, της Αλγεβρας και της Ανάλυσης.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Anderson, J. R.: 1976, *Language, Memory, and Thought*, Erlbaum, Hillsdale, N.J.

Arnheim, R.: 1969, *Visual Thinking*, University of California Press: Berkeley and Los Angeles.

Bruner, J. S.: 1966, *Towards a theory of instruction*, New York: Norton.

Cornu, B.: 1991, Limits, In D. O. Tall(ed), *Advanced mathematical thinking,* Dordrecht: Kluwer, 153-166.

Cotrill, J. et al.: 1996, Understanding the limit concept : Beginning with a coordinated process schema, *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.

Davis, R. B.: 1975, Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations, *Journal of Children's Mathematical Behavior* 1(3), 7-35.

Davis, R. B.: 1983, Complex Mathematical Cognition, In H. P. Ginsburg (eds), *The Development of Mathematical Thinking,* Academic Press, New York, 254-290.

Davis,R. B.: 1984, *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education,* Norwood NJ: Ablex.

Davis, G., Tall, D. & ThomasM.: 1997, What is the object of the encapsulation of a process?, *Proceedings of MERGA*, Rotarua, New Zealand, vol 2, 132-139.

Dienes, Z. P.: 1960, *Building up Mathematics,* Hutchinson Educational: London.

Dorfler, W.: 1993, Fluency in a discourse or manipulation of mental objects, *Proceedings of PME 17*, Tsukuba, Japan, II, 145-152.

Dorier, J. L.:1997, *L' Enseignement de l' Algebre Lineaire en Question*, Editions La Pensee Sauvage.

Douady, R.: 1987, Dialectique outil-objet et jeux de cadres, *Recherches en Didactique des Mathematiques* 7, 5-32.
Dubinsky, E&Lewin, P.:1986, Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness, *Journal of Mathematical Behavior* 5,55-92
Dubinsky, E.: 1991, Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall(ed.) *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, The Netherlands:Kluwer, 95-123.
Duval, R.: 1995α, *Semiosis et Pensee Humaine:Registres semiotiques et apprentissages intellectuals*, Peter Lang.
Duval, R.: 1995β, Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings, In R. Suttherland & J. Mason (eds), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Berlin: Springer, 142-157.
Duval, R.: 1998, Geometry from a Cognitive Point of View, In C. Mammana & V. Villani(eds*), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*, Dordrecht: Kluwer.
Fischbein, E.: 1993, The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
Gray, E.M. & Tall, D.O.: 1993, Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept, *Mathematics Teaching*, 142, 6-10.
Gray, E.M. & Tall, D.O.: 1994, Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, *Journal of Research in Mathematics Education*, 26, 2, 115-141.
Greeno, G. J.: 1983, Conceptual entities. In Genter & Stevens(eds), *Mental Models*, 227-252.
Hadamard, J. S.: 1945, *The Psychology of Invention in the Mathematics Field*, Princeton University Press, N.J.
Halmos, P. R.: 1985, *I Want to be a Mathematician, An Autobiography*, Springer, New York.
Hardy, G. H.: 1967, *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, Cambridge.
Hasegawa, J.: 1997, Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade, *Educational Studies in mathematics*, 32, 157-179.
Hebb, D. O.: 1968, Concerning Imagery, *Psychological Review*, 75(6), 466-477.
Henrici, P.: 1974, The influence of computing on mathematical research and education, in *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Vol. 20, AMS
Hiebert, J.: 1986, *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Καμπάνη, Ε.: 2003, *Ο ρόλος των Αναπαραστάσεων στη Λύση Μαθηματικών Προβλημάτων: Η περίπτωση του ισοσκελούς τριγώνου*, Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
Kaput, J. J.: 1979, Mathematics and learning: Roots of epistemological status, in Lochhead, J. and Clement, J. (eds) *Cognitive Process Instruction*, Franklin Institute Press.
Krutetskii, V. A.: 1976, *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, J. Kilpatrick & I. Wirszup (eds), Chicago: University of Chicago Press.
Lesh, R. & Landau, M.(eds):1983, *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, New York.
Mason, J. & Pimm, D.: 1984, Generic examples: seeing the general in the particular, *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.
Paivio, A.: 1986, *Mental Representations: A dual-coding approach*. Oxford : OUP.
Παυλοπούλου, Κ.: 1993, Un probleme decisive pour l' apprentissage de l' Algebre Lineaire : la coordination des registres de representation, *Annales de Didactique et de Science Cognitives*,5, 67-93.
Pea,R.D.: 1985, Beyond Amplification: Using the Computer to Reorganize Mental Functioning*, Educational Psychologist*, 20, 167-182.
Piaget, J.: 1969, *The mechanisms of perception*, New York, Basic Books.
Piaget, J.: 1970, *Genetic Epistemology*, W. W. Norton, New York.
Piaget, J.: 1972, *The Principles of Genetic Epistemology*, London: Routledge & Kegan Paul.
Pinto, M. M. F.: 1998, *Students' understanding of Real Analysis*, Unpublished PhD Thesis, Warwick University.

Pinto,M. & Tall, D.: 1999, Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning, *Proceedings of PME 23.*
Pinto,M. & Tall, D.: 2002, Building formal mathematics on visual imagery :a case study and a theory, *For the Learning of Mathematics,* 22(1), 2-10.
Poincare, H.: 1913, *The Foundations of Science*, The Science Press, New York.
(επανατύπωση από: University Press of America, 1982).
Presmeg, N. C.: 1992, Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595-610.
Rosch, E., Mervis, C., Gray, W., Johnson, D. &Boyes-Braem, P.: 1978, Basic objects in natural categories, *Cognitive Psychology*, 8, 382-439.
Schoenfeld, A. H.: 1986, On having and using geometric knowledge, in J. Hierbert(eds), *Conceptual and Procedural Knowledge:The Case of Mathematics*, Erlbaum, 225-264.
Sfard, A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
Sfard, A.: 1992, Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification- the case of function, In G. Harel & E. Dubinsky(eds), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, Washington DC: MAA., 59-84
Skemp, R. R.: 1976, Relational understanding and instrumental understanding , *Mathematics Teacher*, 77, 20-26.
Skemp, R. R.: 1979*, Intelligence, Learning and Action*, London: Wiley.
Tall, D. & Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition in Mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
Tall, D.: 1994, *A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics*, Plenary presentation, CIEAM, Toulouse, France
Tall, D. O. et al. : 2000, What is the object of the encapsulation process?, *Journal of Mathematical Behavior,* 18(2), 1-19.
Tall, D. O.: 1999, Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, *Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel*, 1, 111-118.
van Hiele, P.: 1986*, Structure and Insight*, Orlando: Academic Press.
van Sommers,P.: 1984, *Drawing and Cognition*,Cambridge University Press, Cambridge, MA.
Vurpillot, E.: 1972, *The visual world of the child*, George Allen & Unwin Ltd, Ruskin House, London.