Δυναμική Γεωμετρία: Η περίπτωση της διδασκαλίας εμβαδού και απόδειξης μέσω μετασχηματισμού

Λούκας Τσούκκας, Ξένια Ξυστούρη, Κωνσταντίνος Χρίστου, Δήμητρα Πίττα-Πανταζή
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Λευκωσία, Κύπρος
louevge@cytanet.com.cy, xistouri@cytanet.com.cy, edchrist@ucy.ac.cy, dpitta@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Το άρθρο αυτό περιγράφει μια σειρά δραστηριοτήτων σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, οι οποίες αναπτύχθηκαν με στόχο τη διδασκαλία του εμβαδού στο δημοτικό σχολείο. Μέσα από τις δραστηριότητες διαφαίνεται ο ρόλος που μπορεί να διαδραματίσει η δυναμική γεωμετρία στον τρόπο προσέγγισης και διδασκαλίας των γεωμετρικών εννοιών, στον τρόπο ανάπτυξης των δεξιοτήτων των μαθητών στην κατασκευή προβλήματος και στην εισαγωγή τους στην επαγωγική απόδειξη.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *δυναμική γεωμετρία, εμβαδόν, μετασχηματισμός, κατασκευή προβλήματος*

ABSTRACT
The present article describes a set of exploratory activities in α dynamic geometry environment that were developed for the teaching of area, in primary school students. Through these activities, emerges the role that dynamic geometry can play in the way of teaching of geometrical concepts by improving students' skills of problem-posing and inductive proof.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλοί ερευνητές στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών θεωρούν ότι η τεχνολογία παρέχει τη δυνατότητα διεύρυνσης του γνωστικού ρεπερτορίου, ενώ ταυτόχρονα αποτελεί για τους μαθητές μέσο πρόσβασης σε δυναμικές έννοιες και τομείς των μαθηματικών (NCTM, 2000). Η τεχνολογία έχει άμεση εφαρμογή στη διδασκαλία της γεωμετρίας, η οποία από τις αρχές της δεκαετίας του 1980 άρχισε να παραγκωνίζεται, τόσο εξαιτίας των δυσκολιών των εκπαιδευτικών στην κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων με ακρίβεια και ταχύτητα, όσο και των δυσκολιών των μαθητών να κατανοήσουν τις γεωμετρικές έννοιες και να αντιληφθούν τις έννοιες της αιτιολόγησης και της απόδειξης (Χρίστου & Πίττα-Πανταζή, 2004). Τα εργαλεία που παρέχει η τεχνολογία στον τομέα της γεωμετρίας, και τα οποία περιορίζουν τα πιο πάνω προβλήματα, είναι τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας (Euclidraw, Sketchpad, Cabri, Euklid, Geolog, Thales κτλ.), τα οποία υποστηρίζουν περιβάλλοντα στα οποία οι μαθητές μπορούν να αλληλεπιδράσουν με τα αντικείμενα και τα θεωρήματα της γεωμετρίας (Healy & Hoyles, 2001).

Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε δραστηριότητες για τη διδασκαλία της έννοιας του εμβαδού στη Στ' τάξη του δημοτικού σχολείου μέσα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας (ΔΓ), οι οποίες θα στηρίζονται στην έννοια της διατήρησης του εμβαδού σχημάτων με ανακατασκευή και ανασύνθεσή τους. Σύμφωνα με τους Carpenter et al. (αναφορά στην Kordaki, 2003), οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της ισότητας εμβαδών, όταν αυτά αναπαριστώνται με διαφορετικά σχήματα, γεγονός το οποίο αποτελεί προϋπόθεση στη διερεύνηση και κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. Αρχικά θα παρουσιάσουμε το θεωρητικό υπόβαθρο της έρευνας, με ιδιαίτερη αναφορά στα χαρακτηριστικά της ΔΓ που καθιστούν σημαντική και επιτακτική τη χρήση της κατά τη διδασκαλία της έννοιας του εμβαδού μέσω ανακατασκευής και ανασύνθεσης σχημάτων. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε μια σειρά από δραστηριότητες για τη διδασκαλία του εμβαδού σε ψηφιακό περιβάλλον ΔΓ, στις οποίες είναι εμφανής ο διαφορετικός τρόπος προσέγγισης της έννοιας και οι δυνατότητες που προσφέρει η ΔΓ για κατασκευή προβλήματος και επαγωγική απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

Με την εισαγωγή των λογισμικών ΔΓ στην εκπαίδευση έχει αλλάξει ο τρόπος προσέγγισης και διδασκαλίας της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Στα πλαίσια της ΔΓ, τα αντικείμενα και θεωρήματα των μαθηματικών μετατρέπονται από απλές προτάσεις που πρέπει να αποδειχθούν σε αντικείμενα διερεύνησης. Τα δυναμικά ψηφιακά περιβάλλοντα αποτελούν εικονικά εργαστήρια στα οποία οι μαθητές μπορούν να παίξουν, να διερευνήσουν και να μάθουν μαθηματικά (Arcavi & Hadas, 2000). Ενεργώντας σε αυτά τα δυναμικά ψηφιακά περιβάλλοντα, μέσα σε ελάχιστο χρόνο, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν άπειρα σχήματα με μεγάλη ακρίβεια. Παρέχεται, επίσης, η δυνατότητα άμεσης τροποποίησης, μετακίνησης και μετασχηματισμού των σχημάτων στο χώρο, με τη βοήθεια του ποντικιού, χωρίς να μεταβάλλονται οι κρίσιμες γεωμετρικές τους ιδιότητες. Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν, όχι μόνο κοιτάζοντας την εικόνα, αλλά και μετρώντας, συγκρίνοντας, αλλάζοντας τα σχήματα (Arcavi & Hadas, 2000). Επιπλέον, η χρήση λογισμικών ΔΓ στη διδασκαλία των μαθηματικών καλλιεργεί στους μαθητές τόσο τον παραγωγικό, όσο και τον επαγωγικό τρόπο σκέψης (Χρίστου & Πίττα - Πανταζή, 2004).

Μέσα στο περιβάλλον ΔΓ οι μαθητές αποκτούν κίνητρο και αυτοπεποίθηση, γιατί τους επιτρέπει να κάνουν δικές τους υποθέσεις και να τις εξετάζουν. Ο έλεγχος των υποθέσεων συχνά οδηγεί τους μαθητές σε εκπλήξεις, γεγονός που πυροδοτεί την ανάπτυξη της ανάγκης τους για επανεξέταση των γνώσεων και υποθέσεών τους (Arcavi & Hadas, 2000). Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να επανορθώνουν αμέσως τα λάθη τους με το πάτημα ενός πλήκτρου, με αποτέλεσμα το λάθος να αξιοποιείται και να οδηγεί συχνά στην ανάπτυξη εννοιών ή στην τροποποίηση υφιστάμενων, πιθανώς λανθασμένων γνώσεων. Επιπλέον, υπάρχει η δυνατότητα της κίνησης των σχημάτων με το «σύρσιμο» (*drag*) που επιτρέπει στους μαθητές να χειριστούν τα σχήματα και να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους σχεδόν στιγμιαία, καθιστώντας την κατασκευή και την εξέταση υποθέσεων μια ευχάριστη και δημιουργική δραστηριότητα.

Απόδειξη στη Δυναμική Γεωμετρία

Τα χαρακτηριστικά των λογισμικών ΔΓ παρέχουν στο μαθητή τη δυνατότητα να κάνει υποθέσεις και να τις ελέγξει εύκολα και γρήγορα. Η διατύπωση υποθέσεων και ο έλεγχος αποτελούν βασικά στοιχεία της διερευνητικής μάθησης. Ο άτυπος αυτός τρόπος απόδειξης, σύμφωνα με τους Bruckheimer και Arcavi (2001), αποκαλείται «εμπειρική απόδειξη». Πολλοί ερευνητές έχουν εκφράσει ανησυχίες σχετικά με το σημείο αυτό, καθώς η απόδειξη αποτελεί ουσιαστικό στοιχείο για τα μαθηματικά και η διδασκαλία της αποτελεί θεμελιώδη έννοια (Laborde, 2000). Συγκεκριμένα, έχει εκφραστεί η ανησυχία ότι οι ευκαιρίες που παρέχουν τα ψηφιακά περιβάλλοντα ΔΓ στους μαθητές να «δουν» τις μαθηματικές ιδιότητες με τόση ευκολία, μπορεί να προκαλέσουν τη μείωση ή και την εξαφάνιση οποιασδήποτε ανάγκης για απόδειξη και κατ' επέκταση της εκμάθησης της διαδικασίας της παραγωγικής απόδειξης (Laborde, 2000; Hadas, Herskowitz & Schwarz, 2000; Bruckheimer & Arcavi, 2001).

Πρόσφατες έρευνες τεκμηριώνουν ότι η ΔΓ όχι μόνο δεν υποβαθμίζει την απόδειξη, αλλά την καθιστά αναγκαία και προσιτή, προωθώντας συνδέσμους μεταξύ εμπειρικής και παραγωγικής απόδειξης (Buckheimer & Arcavi, 2001). Ο De Villiers (στο Hadas et al., 2000) περιγράφει πώς μέσα από περιβάλλοντα ΔΓ μπορεί να καλλιεργηθεί η διερεύνηση με ερωτήσεις του τύπου «τι θα γίνει αν», ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν σε γενικεύσεις και ανακαλύψεις. Υποστηρίζει ότι η αναζήτηση απόδειξης γίνεται τότε νοητική πρόκληση, που γεννάται από την ανάγκη αιτιολόγησης ενός συμπεράσματος. Συνεπώς, σε ένα περιβάλλον ΔΓ, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία μέσα από κατάλληλα δομημένες δραστηριότητες, να αντιληφθούν όλες τις λειτουργίες της απόδειξης και να τη χρησιμοποιήσουν για αιτιολόγηση, επεξήγηση, διερεύνηση, ανακάλυψη και συστηματοποίηση προτάσεων σε ένα αξιωματικό σύστημα. Ιδιαίτερα στο δημοτικό σχολείο, η διερεύνηση γεωμετρικών εννοιών μέσα σε περιβάλλον ΔΓ αποτελεί το πρώτο στάδιο στη διαδικασία της τυπικής απόδειξης, που θα αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας στο γυμνάσιο και το λύκειο.

Θεωρητικό Υπόβαθρο της Δυναμικής Γεωμετρίας

Προτού παρουσιαστούν οι προτεινόμενες δραστηριότητες για τη διδασκαλία του εμβαδού μέσω ανακατασκευής σχημάτων σε περιβάλλον ΔΓ, θα παρουσιάσουμε ένα γενικό μοντέλο δόμησης της γεωμετρικής σκέψης. Το μοντέλο αυτό αναπτύχθηκε από το Vinner (1983, 1991) και προτείνεται από τον Contreras (2003) ως κατάλληλο για την κατανόηση της οικοδόμησης των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές. Επίσης, αποτελεί τη θεωρητική βάση της εισαγωγής της ΔΓ στο σχολείο (Χρίστου & Πίττα-Πανταζή, 2004) και θα αποτελέσει το θεωρητικό μας πλαίσιο.

Η διαγραμματική απεικόνιση αποτελεί τον πιο συνηθισμένο οπτικό τρόπο αναπαράστασης γεωμετρικών αντικειμένων. Αυτές οι οπτικές αναπαραστάσεις φαίνεται να ασκούν ισχυρή επίδραση στην ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές (Contreras, 2003). Το μοντέλο του Vinner περιγράφει την ύπαρξη τριών κύριων ειδών νοητικών αναπαραστάσεων που συνδέονται με μια μαθηματική έννοια: το μαθηματικό ορισμό της έννοιας, την αντίληψη του μαθητή για το μαθηματικό ορισμό και τη νοερή αναπαράσταση της έννοιας στη σκέψη των μαθητών. Στόχος της διδασκαλίας, είναι η γνωστική ενότητα, δηλαδή η ταύτιση του μαθηματικού ορισμού, της αντίληψης των μαθητών για το μαθηματικό ορισμό και της νοερής αναπαράστασης της έννοιας στη σκέψη των μαθητών.

Ο μαθηματικός ορισμός μιας έννοιας αναφέρεται στο ελάχιστο σύνολο αναγκαίων ή κρίσιμων ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν την έννοια. Η περίπτωση μιας έννοιας πρέπει να έχει αυτές τις κρίσιμες ιδιότητες, για να αποτελεί παράδειγμα της έννοιας (Contreras, 2003). Για παράδειγμα, το ύψος ενός παραλληλογράμμου ορίζεται ως το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών του και είναι κάθετο σε αυτές. Δηλαδή, οι κρίσιμες ιδιότητες στην περίπτωση του μαθηματικού ορισμού του ύψους παραλληλογράμμου είναι δύο: (α) η γραμμή πρέπει να είναι ευθύγραμμο τμήμα και (β) το ευθύγραμμο τμήμα πρέπει να είναι κάθετο στις απέναντι πλευρές. Η θέση του ύψους σε σχέση με το παραλληλόγραμμο και η διεύθυνση του στο χώρο δεν αποτελούν κρίσιμες ιδιότητες του ύψους.

Ως αποτέλεσμα των τυπικών και των άτυπων εμπειριών που έχουν οι μαθητές, αναπτύσσουν δικές τους αντιλήψεις σχετικά με τον ορισμό των σχημάτων. Η αντίληψη που έχουν οι μαθητές για το μαθηματικό ορισμό είναι αυτός που εκφράζουν, όταν τους ζητείται να ορίσουν μια μαθηματική έννοια. Η αντίληψη των μαθητών μπορεί να ταυτίζεται με το μαθηματικό ορισμό ή όχι. Συνήθως οι μαθητές δυσκολεύονται να διακρίνουν τις κρίσιμες από τις μη κρίσιμες ιδιότητες, όταν προσπαθούν να ορίσουν μια έννοια (Contreras, 2003). Για παράδειγμα, συχνά οι μαθητές θεωρούν ότι το ύψος του παραλληλογράμμου πρέπει να βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του. Επιπλέον, οι μαθητές μπορεί να ενεργοποιήσουν ένα υποσύνολο των νοερών εικόνων ή χαρακτηριστικών που σχετίζονται με την έννοια. Αυτό το σύνολο στοιχείων που ενεργοποιούνται συνιστά την απεικόνιση ή νοερή αναπαράσταση των μαθητών για τη μαθηματική έννοια. Είναι δυνατόν οι μαθητές να ενεργοποιήσουν διαφορετικά σύνολα νοερών χαρακτηριστικών κάτω από διαφορετικές συνθήκες. Και πάλι, οι ενεργοποιημένες νοερές αναπαραστάσεις των μαθητών για μια μαθηματική έννοια μπορεί να μην συμπίπτουν με την αντίληψη τους για το μαθηματικό ορισμό ή με το μαθηματικό ορισμό της έννοιας (Contreras, 2003).

Μια από τις προκλήσεις της διδασκαλίας είναι να επιτευχθεί ταύτιση του μαθηματικού ορισμού, της αντίληψης του μαθητή για το μαθηματικό ορισμό και της νοερής αναπαράστασης του μαθητή για την έννοια, ώστε να αποτελέσουν μια ενιαία γνωστική οντότητα. Οι Herskowitz, Ben-Chaim, Hoyles, Lappan, Mitchelmore, και Vinner (1990), με έρευνες τους αναφορικά με τις γνωστικές πτυχές της οικοδόμησης εννοιών, υποστηρίζουν ότι ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας της γεωμετρίας ασκεί περιορισμένη επίδραση στη σωστή οικοδόμηση της γνωστικής ενότητας. Ως εκ τούτου, ορισμένες παρανοήσεις στη σκέψη των μαθητών παραμένουν ή και εντείνονται. Στις παρανοήσεις αυτές συμβάλλουν σε πολύ μεγάλο βαθμό και οι πρωτοτυπικές έννοιες των μαθητών, που αναπτύσσονται κατά τη διδασκαλία της στατικής γεωμετρίας (Herskowitz et al., 1990). Οι πρωτοτυπικές εικόνες που οικοδομούν οι μαθητές συχνά περιλαμβάνουν μόνο τα πολύ ισχυρά οπτικά γνωρίσματα της έννοιας και επομένως περιέχουν μόνο ένα υποσύνολο των κρίσιμων ιδιοτήτων, συμπεριλαμβανομένου και αρκετών μη-κρίσιμων. Για παράδειγμα, η κατακόρυφη τοποθέτηση ενός τετραγώνου και η τοποθέτηση της μεγάλης βάσης του τραπεζίου χαμηλά και της μικρής ψηλά είναι ορισμένα πρωτοτυπικά παραδείγματα μαθηματικών εννοιών που συχνά αναπτύσσουν οι μαθητές. Είναι γεγονός ότι σε πολλές περιπτώσεις τα πρωτοτυπικά παραδείγματα παραμένουν, εξ ολοκλήρου ή εν μέρει, και εκδηλώνονται σε κάποιο βαθμό ακόμη και μετά τη διδασκαλία (Contreras, 2003). Η δυνατότητα που έχει η ΔΓ να παρέχει πολλαπλές αναπαραστάσεις των διαφόρων μαθηματικών εννοιών μπορεί να συμβάλει στο να ξεπεραστούν οι παρανοήσεις που προκύπτουν από την περιορισμένη οπτική απεικόνισή τους κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας με στατικό τρόπο.

Στα μαθηματικά, ο όρος «δυναμικός/ή» σχετίζεται με την κίνηση και την αλλαγή. Τα σχήματα στη ΔΓ, όπως προαναφέρθηκε, μπορούν να μετακινηθούν και να μετασχηματιστούν με μεγάλη ευκολία, διατηρώντας πάντοτε τις κρίσιμες ιδιότητες τους, δίνοντας στους μαθητές τη δυνατότητα να τις δουν και να τις αντιληφθούν σε άπειρες εφαρμογές και να τις διακρίνουν από τις μη-κρίσιμες ιδιότητες. Με τα λογισμικά ΔΓ δίνεται η δυνατότητα για επίτευξη της γνωστικής ενότητας της έννοιας, με αποτέλεσμα να μην δημιουργούνται γνωστικά εμπόδια από τη σύγκρουση μεταξύ του μαθηματικού ορισμού, της αντίληψης για το μαθηματικό ορισμό και των νοερών αναπαραστάσεων των μαθητών για την έννοια. Με τον τρόπο αυτό ελαχιστοποιείται η πιθανότητα δημιουργίας παρανοήσεων των μαθητών.

Κατασκευή Προβλήματος στη Δυναμική Γεωμετρία

Η κατασκευή προβλήματος, καθώς και η κατασκευή και διερεύνηση υποθέσεων, αποτελούν σημαντικές μαθηματικές δραστηριότητες (English, 1997). Τα λογισμικά ΔΓ παρέχουν ευκαιρίες για την κατασκευή προβλημάτων που οδηγούν τους μαθητές στην αναζήτηση εξηγήσεων (Hadas et al., 2000). Η κατασκευή προβλήματος μπορεί να γίνει αφού χρησιμοποιηθούν η διαδικασία εξειδίκευσης και η διαδικασία ανάλογων περιπτώσεων. Ο Silver (1994) αναφέρεται στις έννοιες αυτές ως «αναπροσαρμογή του προβλήματος κατά την επίλυση» και στην «παραγωγή νέων προβλημάτων και ερωτημάτων για εξερεύνηση μιας δεδομένης κατάστασης (English, 1997). Ενώ δίνεται μεγάλη σημασία στις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, όπως είναι ο προσδιορισμός των βασικών στοιχείων του προβλήματος και η μεταξύ τους σχέση, η κατασκευή προβλήματος οδηγεί τους μαθητές πέρα από τις παραμέτρους της διαδικασίας της λύσης. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν στην αναζήτηση των πρωταρχικών ιδεών στη λύση του προβλήματος ή στην εξέταση προβλημάτων που προκύπτουν από την τροποποίηση ή την επέκταση των στοιχείων του προβλήματος (English, 1997).

Εμβαδόν και Ανακατασκευή Σχημάτων

Ο κατατεμαχισμός και η ανακατασκευή ενός σχήματος χρησιμοποιούνται συχνά για να λύσουν και να δικαιολογήσουν χειριστικά ένα πρόβλημα στη γεωμετρία, ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας στη δημοτική εκπαίδευση. Αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι καθαρά οπτικοί και μπορούν να γίνουν εύκολα με αλλαγή της θέσης από την οποία παρατηρούνται ή με τη μεταφορά τμημάτων του σχήματος, όπως γίνεται στα παζλ. Στην περίπτωση της έννοιας του εμβαδού, η ανακατασκευή σχημάτων συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας της διατήρησης του εμβαδού, η οποία αποτελεί απαραίτητη προϋπάρχουσα γνώση για τη μέτρηση εμβαδού (Kordaki, 2003). Γι' αυτό και προτείνεται από πολλούς η χρήση χαρτιού και ψαλιδιού, ώστε οι μαθητές βασιζόμενοι στις αισθήσεις τους, να κόψουν ένα σχήμα και να το ενώσουν διαφορετικά δημιουργώντας ένα νέο και ταυτόχρονα ισεμβαδικό σχήμα (Kordaki, 2003). Για να θεμελιώσουν αυτή την έννοια οι μαθητές, χρειάζονται πληθώρα διαφορετικών αναπαραστάσεων των σχημάτων, πράγμα που είναι ανέφικτο να γίνει με τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται συνήθως στα σχολεία. Επιπλέον, οι δυσκολίες των μαθητών στη μέτρηση του εμβαδού αποδίδονται, εν μέρει, στην ανικανότητα να καλυφθεί το κενό μεταξύ της συμβατικής προσέγγισης του εμβαδού (χρήση μαθηματικών τύπων) και της ποιοτικής προσέγγισης χειρισμού των εμβαδών χωρίς τη χρήση αριθμών (Kordaki, 2003).

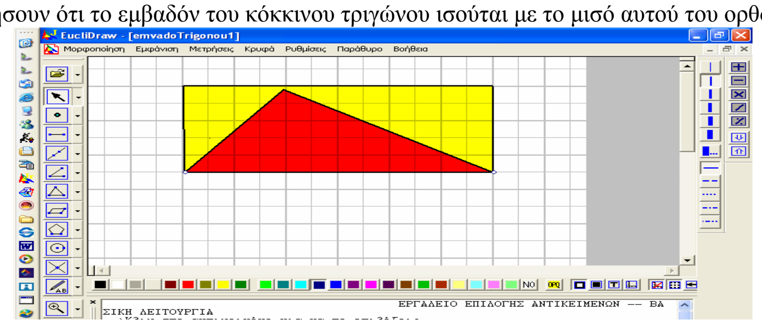
Οι πιο πάνω δυσκολίες μπορούν να ξεπεραστούν στα πλαίσια ενός περιβάλλοντος ΔΓ, το οποίο θα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να σύρουν, να κόψουν και να κολλήσουν σχήματα, δημιουργώντας σε ελάχιστο χρόνο άπειρες αναπαραστάσεις του ίδιου σχήματος, διατηρώντας σταθερό το εμβαδόν. Το NCTM (2000), αναγνωρίζοντας την ανάγκη για οπτική απεικόνιση και χρήση γεωμετρικών μοντέλων στην επίλυση προβλημάτων ειδικά στη γεωμετρία, προτείνει τη χρήση δυναμικών λογισμικών για την κατασκευή αναπαραστάσεων. Το Euclidraw είναι το μοναδικό λογισμικό ΔΓ που προσφέρει τη δυνατότητα για τεμαχισμό και ανασύνθεση των σχημάτων και για αυτό το λόγο χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα πρόταση διδασκαλίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Όπως έχει αναφερθεί, σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε πώς μπορεί να διδαχθεί αποτελεσματικά η έννοια του εμβαδού με ανακατασκευή σε περιβάλλον ΔΓ. Η εργασία αυτή αποτελεί ένα ακόμη παράδειγμα των δυνατοτήτων που προσφέρουν τα λογισμικά ΔΓ στην αποτελεσματικότερη διδασκαλία της γεωμετρίας. Για την υλοποίηση του σκοπού επιλέγηκαν τέσσερις ενότητες από τη διδασκαλία του εμβαδού στη Στ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου - του τριγώνου, του παραλληλογράμμου, του τραπεζίου και του κύκλου. Οι ενότητες και οι δραστηριότητες παρουσιάζονται με τη σειρά διδασκαλίας η οποία κρίνεται ως η πιο κατάλληλη να ακολουθηθεί για τη σωστή οικοδόμηση των εννοιών. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στο προτεινόμενο σχέδιο διδασκαλίας είναι αυτός του συνεργάτη και καθοδηγητή, εφόσον δίνεται έμφαση στις ευκαιρίες αυτόνομης μάθησης και ανακάλυψης που παρέχει το Euclidraw.

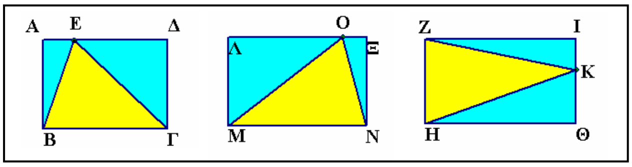
Δραστηριότητες Διδασκαλίας Εμβαδού Τριγώνου

Δραστηριότητα 1: Δίνεται στους μαθητές ένα προκατασκευασμένο σχήμα (Σχ. 1) σε αρχείο του EucliDraw. Με το εργαλείο διαχωρισμού πολύγωνου του λογισμικού, αποκόπτουν τα κίτρινα τρίγωνα από το ορθογώνιο στο οποίο ανήκουν. Έπειτα, καλούνται να φτιάξουν το κόκκινο τρίγωνο με τα δύο κίτρινα τρίγωνα. Αναμένεται να περιστρέψουν, σύρουν και τοποθετήσουν τα κίτρινα τρίγωνα πάνω στο κόκκινο. Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι το εμβαδόν του κόκκινου τριγώνου ισούται με το μισό αυτού του ορθογωνίου.



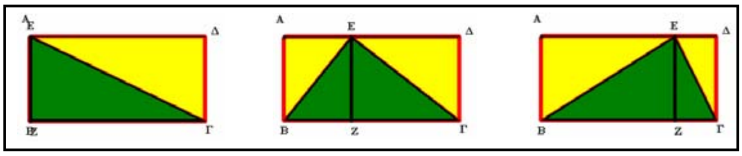
Σχήμα 1: Σχέση εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τριγώνου

Δραστηριότητα 2: Δίνονται στους μαθητές ορθογώνια, μέσα στα οποία υπάρχουν εγγεγραμμένα τρίγωνα (Σχ. 2). Σ' όλες τις περιπτώσεις - παρόλο που τα τρίγωνα, τα ορθογώνια και η θέση τους στο χώρο είναι διαφορετικά - η μια πλευρά του τριγώνου ταυτίζεται με μια πλευρά του ορθογωνίου και η απέναντι κορυφή της βρίσκεται στην απέναντι πλευρά του ορθογωνίου. Οι μαθητές, αφού κάνουν τις υποθέσεις τους, ελέγχουν αν η παρατήρηση της προηγούμενης εργασίας ισχύει και σ' αυτές τις περιπτώσεις, μετρώντας το εμβαδόν των ορθογωνίων και των τριγώνων με την εντολή «Μέτρηση εμβαδού» του λογισμικού. Με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καταλήγουν στη μαθηματική σχέση του εμβαδού τριγώνου με τη βάση και το ύψος του.



Σχήμα 2: Εμβαδόν τριγώνου – ορθογωνίου: Διάφορες περιπτώσεις

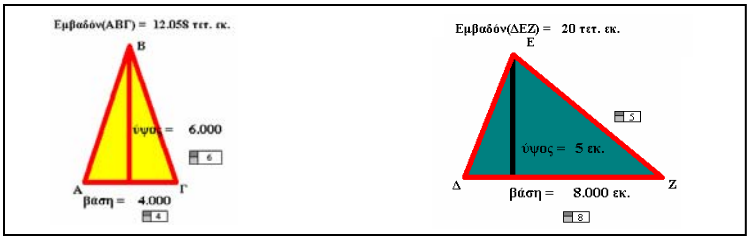
Δραστηριότητα 3: Στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι να αντιληφθούν οι μαθητές τις κρίσιμες ιδιότητες του εμβαδού τριγώνου. Σε προκατασκευασμένο σχήμα (Σχ. 3), το σημείο Ε (με τη βοήθεια κινητήρα) κινείται κατά μήκος της πλευράς ΑΔ. Έτσι, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι το εμβαδόν παραμένει σταθερό, εφόσον οι κρίσιμες ιδιότητες του παραμένουν αναλλοίωτες. Σύμφωνα με την Kordaki (2003), πολλές δυσκολίες των μαθητών στη μέτρηση εμβαδού οφείλονται στον «τεμαχισμένο» τρόπο που διδάσκεται το εμβαδόν, απομονώνοντας το από τη δυναμική του σχέση με την περίμετρο. Μέσα από τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν ότι η περίμετρος του τριγώνου ΒΕΓ δεν μεταβάλλει το εμβαδόν του, εφόσον δεν αποτελεί κρίσιμη ιδιότητα του.



Σχήμα 3: Εμβαδόν τριγώνου – ορθογωνίου: Γενίκευση

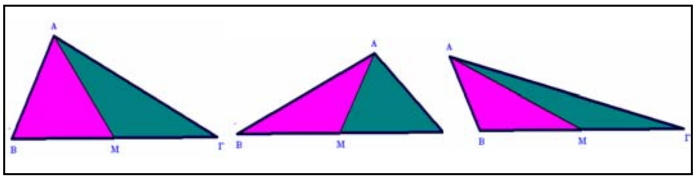
Δραστηριότητα 4: Γίνεται διερεύνηση σχετικά με τα ακόλουθα ερωτήματα: α) Πόσα ύψη έχει ένα τρίγωνο; β) Περνούν όλα από το ίδιο σημείο; γ) Ποιες θέσεις μπορεί να πάρει το ύψος σε σχέση με το τρίγωνο; δ) Σε ποια περίπτωση το ύψος ενός τριγώνου μπορεί να συμπέσει με μια πλευρά του; Με την πιο πάνω δραστηριότητά οι μαθητές κάνουν υποθέσεις σχετικές με τα ερωτήματα και ελέγχουν τις υποθέσεις τους με δυναμικό τρόπο, σύροντας τις κορυφές των τριγώνων σε διάφορες θέσεις και παρατηρώντας τον τρόπο που διαφοροποιείται το ύψος ή τα ύψη του.

Δραστηριότητα 5: Οι μαθητές διερευνούν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου όταν μεταβάλλεται το ύψος ή/και η βάση του. Προσπαθούν με κατασκευή προβλήματος (κατασκευάζουν δικές τους υποθέσεις και τις επαληθεύουν) να επιλύσουν προβλήματα της μορφής : «Βρες τρία διαφορετικά τρίγωνα που να έχουν διαφορετική βάση και ύψος, αλλά να έχουν εμβαδόν δώδεκα τετραγωνικές μονάδες». Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούν προκατασκευασμένο αρχείο (Σχήμα 4) στο οποίο μπορούν να μεταβάλλουν το ύψος ή/ και τη βάση του τριγώνου με τη βοήθεια μετρητή ή και κινητήρα.



Σχήμα 4: Σχέση εμβαδού τριγώνου με τη βάση και το ύψος του

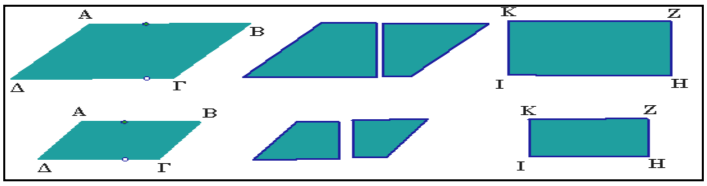
Δραστηριότητα 6: Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εφαρμόσουν τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει σε ένα εξειδικευμένο πρόβλημα. Δίνεται το ερώτημα προς διερεύνηση: Στο πιο κάτω σχήμα (Σχ. 5) το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ. Ποιο τρίγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν, το ΑΒΜ ή το ΑΜΓ; Αναμένεται να υποθέσουν ότι τα δύο τρίγωνα είναι ισεμβαδικά, γιατί έχουν κοινό ύψος και ίσες βάσεις. Ελέγχουν τις υποθέσεις τους από το μενού μετρήσεων του προγράμματος. Ακολούθως, σύρουν σε διάφορες θέσεις το σημείο Α και ελέγχουν κατά πόσον το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν ισχύει για όλες τις περιπτώσεις τριγώνων.



Σχήμα 5: Ισεμβαδικά τρίγωνα

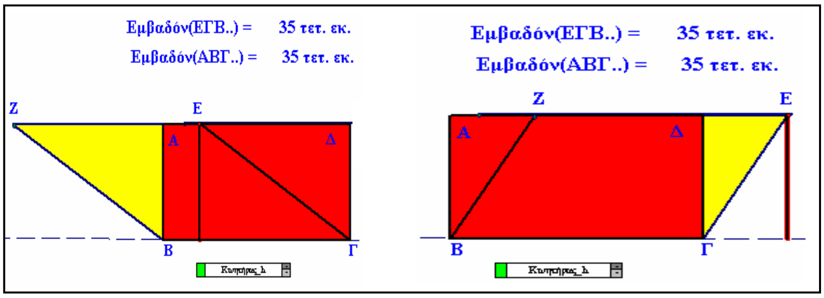
Δραστηριότητες Διδασκαλίας Εμβαδού Παραλληλογράμμου

Δραστηριότητα 1: Ζητείται από τους μαθητές να βρουν τρόπο να ανακατασκευάσουν το παραλληλόγραμμο σε ένα σχήμα που να μπορούν να υπολογίσουν το εμβαδόν του. Αναμένεται να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο αποκοπής πολυγώνου του προγράμματος, για να κόψουν το παραλληλόγραμμο σε δύο κομμάτια και αφού χρησιμοποιήσουν τα κομμάτια αυτά, να κατασκευάσουν ορθογώνιο (Σχήμα 6). Μετρούν το εμβαδόν του αρχικού παραλληλογράμμου (στο πρόγραμμα παραμένει και το αρχικό σχήμα) και του ορθογωνίου που κατασκεύασαν και επιβεβαιώνουν ότι είναι ισεμβαδικά. Στη συνέχεια, αλλάζουν τις διαστάσεις του αρχικού τους παραλληλογράμμου σύροντας το από μια κορυφή. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι τα δύο σχήματα παραμένουν ισεμβαδικά. Αφού φέρουν και μετρήσουν το ύψος του παραλληλογράμμου με τα κατάλληλα εργαλεία του προγράμματος, συγκρίνουν το ύψος και τη βάση του παραλληλογράμμου με τις πλευρές του ορθογωνίου. Αναμένεται να παρατηρήσουν, τόσο οπτικά όσο και αριθμητικά, ότι το ύψος του παραλληλογράμμου ισούται με τη μια πλευρά του ορθογωνίου και η βάση του με την άλλη πλευρά του ορθογωνίου και να καταλήξουν στη μαθηματική σχέση υπολογισμού εμβαδού παραλληλογράμμου. Παρόμοιες δραστηριότητες προτείνεται να γίνονται με χαρτί και ψαλίδι, με τα οποία οι μαθητές κόβουν το αρχικό χάρτινο παραλληλόγραμμο και το μετασχηματίζουν σε ορθογώνιο (Duval, 2002). Το πλεονέκτημα της εκτέλεσης της δραστηριότητας σε περιβάλλον ΔΓ, είναι η δυνατότητα που έχουν οι μαθητές να παρατηρούν ταυτόχρονα και την αρχική και την τελική μορφή του σχήματος. Ένα ακόμη πλεονέκτημα είναι το ότι παρέχεται στους μαθητές η δυνατότητα να παρατηρούν τη σχέση της ποιοτικής και της ποσοτικής προσέγγισης της έννοιας (μέσω των μετρήσεων που είναι εμφανής ακόμη και όταν αλλάζει το μέγεθος ή η θέση ενός σχήματος), που είναι ανέφικτο στη στατική γεωμετρία και κατά την Kordaki (2003) προκαλεί δυσκολίες στους μαθητές.



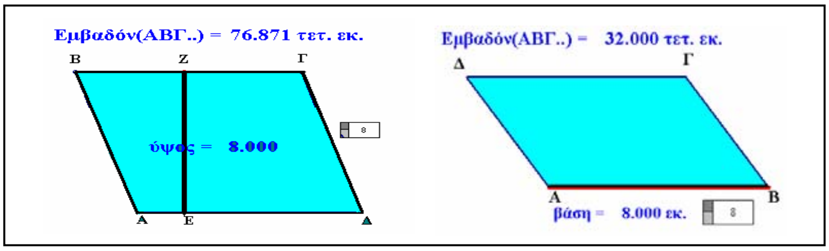
Σχήμα 6: Σχέση εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου και παραλληλογράμμου

Δραστηριότητα 2: Οι μαθητές χρησιμοποιούν προκατασκευασμένο αρχείο (Σχ. 7). Στο σημείο Ζ υπάρχει κινητήρας ώστε η πλευρά ΖΕ να κινείται κατά μήκος της πλευράς ΑΔ. Οι μαθητές βλέπουν ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου και του ορθογωνίου παραμένουν πάντα ίσα άσχετα από τη μορφή του παραλληλογράμμου, εφόσον έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.



Σχήμα 7: Σχέση εμβαδού ορθογωνίου και παραλληλογράμμου: Γενίκευση

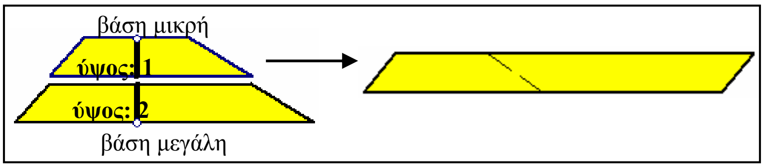
Δραστηριότητα 3: Οι μαθητές χρησιμοποιούν προκατασκευασμένα σχήματα (Σχ. 8) με μετρητή και μεταβάλλουν μόνο το ύψος ή μόνο τη βάση του παραλληλογράμμου, παρατηρώντας το σχήμα. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι μεταβάλλεται και το εμβαδόν.



Σχήμα 8: Σχέση εμβαδού παραλληλογράμμου με τη βάση και το ύψος του

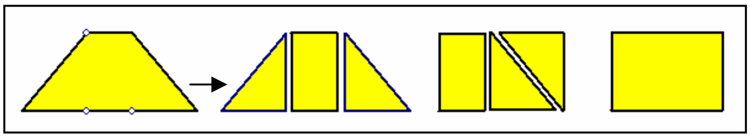
Δραστηριότητες Διδασκαλίας Εμβαδού Τραπεζίου

Δραστηριότητα 1: Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα για διερεύνηση: «Μπορείτε να σκεφτείτε ένα τρόπο να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου μετασχηματίζοντας το σε ένα ή περισσότερα γνωστά σχήματα;» Μια από τις λύσεις που μπορούν να δώσουν οι μαθητές φαίνεται στο Σχήμα 9. Στην περίπτωση αυτή τοποθετούν σημείο στο μέσο των δύο μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου με το «Εργαλείο σημείων/Μέσον». Στη συνέχεια, περιστρέφουν το ένα από τα δύο μικρά τραπέζια κατά 180^0 και ενώνουν τα δύο σχήματα ώστε να προκύψει παραλληλόγραμμο (εργαλείο «Ενωση πολυγώνων»). Μετρούν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που κατασκεύασαν και το συγκρίνουν με αυτό του αρχικού τραπεζίου. Αλλάζουν τις διαστάσεις του αρχικού τραπεζίου σύροντάς το από μια κορυφή και παρατηρούν ότι ταυτόχρονα μεταβάλλεται και το παραλληλόγραμμο, ώστε τα δύο σχήματα να παραμένουν ισεμβαδικά. Οι μαθητές καθοδηγούνται να καταλήξουν στη μαθηματική σχέση υπολογισμού εμβαδού τραπεζίου.



Σχήμα 9: Ανακατασκευή τραπεζίου σε παραλληλόγραμμο

Δραστηριότητα 2: Οι μαθητές μελετούν τις περιπτώσεις του ισοσκελούς και του ορθογώνιου τραπεζίου. Κατασκευάζεται έτσι πρόβλημα μέσω εξειδίκευσης του προηγούμενου προβλήματος. Βρίσκουν τρόπους να μετασχηματίσουν τα τραπέζια σε άλλα γνωστά σχήματα που μπορούν να υπολογίσουν το εμβαδόν τους (Σχήμα 10). Για να καταστεί δυνατή η κατασκευή ορθογωνίου πρέπει να γίνει ανάκλαση του ενός από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα, (με σχετικό εργαλείο του προγράμματος) με άξονα ανάκλασης την υποτείνουσα του.

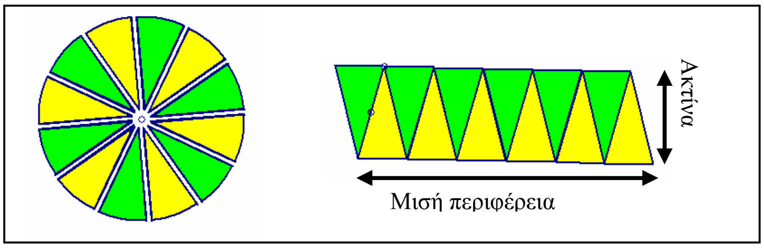


Σχήμα 10: Ανακατασκευή ισοσκελούς τραπεζίου σε ορθογώνιο

Στην περίπτωση του ορθογώνιου τραπεζίου αναμένεται να το διαχωρίσουν σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο και να παρατηρήσουν ότι η βάση του ορθογωνίου τριγώνου ισούται με τη διαφορά των δύο βάσεων του τραπεζίου. Έτσι, υπολογίζουν το εμβαδόν του τριγώνου και κατ' επέκταση το εμβαδόν του αρχικού τραπεζίου.

Δραστηριότητες Διδασκαλίας Εμβαδού Κύκλου

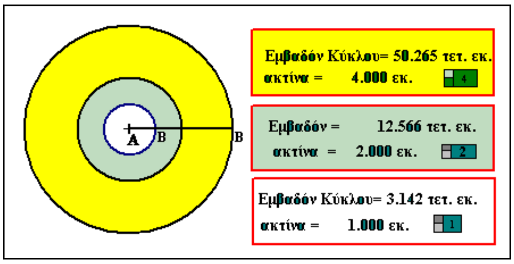
Δραστηριότητα 1: Οι μαθητές κατασκευάζουν ένα κύκλο και τον διαιρούν σε κυκλικούς τομείς. Αυτό μπορεί να γίνει με το εργαλείο «διαίρεση σε τομείς» που βρίσκεται στο εικονίδιο του κύκλου (Σχ. 11). Στη συνέχεια χρησιμοποιούν τους τομείς για να κατασκευάσουν ένα παραλληλόγραμμο (Σχ. 11).



Σχήμα 11: Εμβαδόν κύκλου – Διαίρεση σε τομείς

Δραστηριότητα 2: Επανάληψη της ίδιας δραστηριότητας με διαίρεση σε περισσότερους τομείς (π.χ. 20). Οι μαθητές συγκρίνουν τα αποτελέσματα τους με την προηγούμενη δραστηριότητα και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι στη δεύτερη περίπτωση υπολογίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια το εμβαδόν του κύκλου. Οι μαθητές οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι η διαίρεση του κύκλου σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο αριθμό κυκλικών τομέων δίνει καλύτερο υπολογισμό του εμβαδού του.

Δραστηριότητα 3: Οι μαθητές διερευνούν την περίπτωση διπλασιασμού της ακτίνας και της μεταβολής του εμβαδού. Κατασκευάζουν πρώτα για ακρίβεια την ακτίνα του κύκλου με μετρητή και με βάση αυτή και με την εντολή «Κέντρο + ακτίνα», φτιάχνουν τον κύκλο. Μεταβάλλοντας την ακτίνα από το μετρητή, παρατηρούν ότι μεταβάλλεται και το εμβαδόν του κύκλου (Σχ. 12). Οι μαθητές αναμένεται με τη χρήση πολλαπλών παραδειγμάτων να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι όταν η ακτίνα διπλασιάζεται, το εμβαδόν τετραπλασιάζεται κ.ο.κ.



***Σχήμα 12*:** Εμβαδόν κύκλου – Σχέση ακτίνας και εμβαδού

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000), Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, 25-45.

Bruckheimer, M., & Arcavi, A. (2001), A herrick among mathematicians or dynamic geometry as an aid to proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 113-126.

Contreras, J. N. (2003), Some potential realities and some improbably dreams about learning geometric concepts. Retrieved in April 2004 from http://www.usm.edu/pt3/info/99-00/vtc/contreras_vtc.html

Duval, R. (2002), The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1* (*2*), 1-16.

English, L. D. (1997), The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics,* 34, 183-127.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000), The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127-150.

Healy, L., & Hoyles, C. (2001), Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 235-256.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., & Vinner, S. (1990), Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick*, Mathematics and cognition: A research synthesis by the International group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: England.

Kordaki, M. (2003), The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 177-209.

Laborde, C. (2000), Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 151-161.

National Council for Teachers of Mathematics. (2000), *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Va, NCTM.

Χρίστου, Κ., & Πίττα-Πανταζή, Δ. (2004), Έννοια και διδασκαλία της δυναμικής γεωμετρίας. Στο Α. Γαγάτσης (Εκδ.), *Σύγχρονες Τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 179-188). Λευκωσία: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού – Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Οικοσελίδα του Euclidraw, Πληροφορίες που ανεβρέθηκαν τον Απρίλιο του 2004 από το http://www.euclidraw.com/Gr_fls/EUC_greek.html.