ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: L^p–Σύγκλιση

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα ενότητας

9 L^p–Σύγκλιση **4**

9.1 Σύγκλιση στον $L^2(\mathbb{T})$ 4

9.2 Σύγκλιση στον $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$ 4

9.3 Ολοκληρωτική αναπαράσταση της συζυγούς απεικόνισης 9

9 L^p–Σύγκλιση

9.1 Σύγκλιση στον $L^2(\mathbb{T})$

Σε αυτό το Κεφάλαιο μελετάμε την L^p-σύγκλιση των σειρών Fourier. Για κάθε $1 < p < \infty$ το ερώτημα είναι αν για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει

(9.1.0.1)
$$\|s_n(f) - f\|_p \to 0 \ \text{ καθώς το } \ n \to \infty.$$

Η περίπτωση $p = 2$ είναι η απλούστερη. Υπενθυμίζουμε ότι ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι χώρος Hilbert. Η $\|\cdot\|_2$ επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

(9.1.0.2)
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Λήμμα 9.1.1. *Η ακολουθία $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση στον $L^2(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. Έχουμε δεί ότι

(9.1.0.3)
$$\langle e^{ikx}, e^{isx}\rangle = \delta_{k,s}$$

για κάθε $k, s \in \mathbb{Z}$, και από το Θεώρημα 6.3.10 έχουμε ότι αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $c_k(f) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$. Ισοδύναμα, αν $\langle f, e^{ikx}\rangle = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ τότε $f = 0$. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 7.1.15.

$\boxed{+}$

Άμεσο πόρισμα της γενικής θεωρίας των χώρων Hilbert είναι τώρα το εξής.

Θεώρημα 9.1.2. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε,*

(9.1.0.4)
$$\|s_n(f) - f\|_2 \to 0 \ \text{ καθώς το } \ n \to \infty$$

και

(9.1.0.5)
$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2.$$

9.2 Σύγκλιση στον $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$

Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε αν $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$ για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$, στην γενική περίπτωση $1 \leqslant p < \infty$.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η απάντηση είναι καταφατική στην περίπτωση $p = 2$. Η πρόταση που ακολουθεί δείχνει ότι το πρόβλημα διατυπώνεται ισοδύναμα μέσω της ακολουθίας τελεστών $f \mapsto s_n(f)$:

Πρόταση 9.2.1. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$.

(β) Υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και για κάθε $n \geqslant 0$,

$$\|s_n(f)\|_p \leqslant A_p \|f\|_p.$$

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον τελεστή $T_n : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ με $T_n(f) = s_n(f)$. Ο T_n είναι γραμμικός και, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\|T_n(f)\|_p = \|s_n(f)\|_p = \|f * 2D_n\|_p \leqslant \|2D_n\|_1 \, \|f\|_p = L_n \|f\|_p,$$

δηλαδή ο T_n είναι φραγμένος.

Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$. Από την υπόθεση $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$ έπεται ότι η $\{T_n(f)\} = \{s_n(f)\}$ είναι φραγμένη στον $L^p(\mathbb{T})$. Δηλαδή, υπάρχει $c_f > 0$ ώστε

$$\sup_n \|T_n(f)\|_p \leqslant c_f < \infty.$$

Τώρα, εφαρμόζουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus: υπάρχει $A_p > 0$ ώστε $\sup_n \|T_n\| \leqslant A_p$. Τότε, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και για κάθε $n \geqslant 0$,

$$\|s_n(f)\|_p = \|T_n(f)\|_p \leqslant \|T_n\| \, \|f\|_p \leqslant A_p \|f\|_p.$$

(β) $\Longrightarrow$ (α) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο g τέτοιο ώστε $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$. Από την υπόθεση, για κάθε n έχουμε

$$\|s_n(f) - s_n(g)\|_p = \|s_n(f - g)\|_p \leqslant A_p \|f - g\|_p \leqslant A_p \varepsilon.$$

Αν N είναι ο βαθμός του g τότε για κάθε $n \geqslant N$ έχουμε $s_n(g) = g$. Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant N$ έχουμε

$$\|s_n(f) - f\|_p \leqslant \|s_n(f) - s_n(g)\|_p + \|s_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p \leqslant A_p \varepsilon + 0 + \varepsilon = (A_p + 1)\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \|s_n(f) - f\|_p = 0$. $\dashv$

Μια συνέπεια της Πρότασης 9.2.1 είναι ότι στην περίπτωση $p = 1$ το πρόβλημά μας έχει αρνητική απάντηση. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σταθερά $A_1 > 0$ με την ιδιότητα: αν $\|f\|_1 \leqslant 1$ τότε για κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει

$$\|s_n(f)\|_1 \leqslant A_1.$$

Θεωρούμε τον πυρήνα του Fejér K_N. Γνωρίζουμε ότι $\|2K_N\|_1 = 1$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$, άρα

$$\|s_n(2K_N)\|_1 \leqslant A_1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$s_n(2K_N) = 2K_N * 2D_n = \sigma_N(2D_n).$$

Ο πυρήνας του Dirichlet D_n είναι συνεχής συνάρτηση, άρα $\sigma_N(2D_n) \to 2D_n$ ομοιόμορφα καθώς το $N \to \infty$. Έπεται ότι

$$\|2D_n\|_1 = \lim_{N\to\infty} \|\sigma_N(2D_n)\|_1 = \lim_{N\to\infty} \|s_n(2K_N)\|_1 \leqslant A_1.$$

Όμως, έχουμε δεί ότι η ακολουθία $L_n = \|2D_n\|_1 \sim \frac{4}{\pi^2} ln n \to \infty$, το οποίο είναι άτοπο. Το επιχείρημα αυτό δείχνει ότι:

Πρόταση 9.2.2. *Υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|s_n(f) - f\|_1 \not\to 0$ καθώς το $n \to \infty$.* □

Για τη μελέτη του προβλήματος στην περίπτωση $1 < p < \infty$ (και $p \neq 2$) θα δούμε μια δεύτερη αναγωγή, αφού πρώτα εισάγουμε δύο νέες έννοιες.

Ορισμός 9.2.3 (συζυγής συνάρτηση)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $\sum c_k e^{ikx}$ η σειρά Fourier της f. Θεωρούμε την τριγωνομετρική σειρά*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-i)(sign\, k)c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sign\, k}{i} c_k e^{ikx}, \tag{9.2.0.6}$$

όπου $sign\, x = 1$ αν $x > 0$, $sign\, x = -1$ αν $x < 0$ και $sign\, 0 = 0$. Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση η οποία έχει σειρά Fourier την (9.2.0.6), την συμβολίζουμε με $\tilde{f}$ και λέμε ότι η $\tilde{f}$ είναι η ***συζυγής συνάρτηση*** *της f.*

Για παράδειγμα, αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ τότε υπάρχει μοναδική $g \in L^2(\mathbb{T})$ με $c_k(g) = (-i)(sign\, k)c_k(f)$. Πράγματι,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |(-i)(sign\, k)c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2 - |c_0(f)|^2 < \infty,$$

άρα η ύπαρξη της g εξασφαλίζεται από το θεώρημα Riesz-Fisher, η g είναι η συζυγής συνάρτηση $\tilde{f}$ της f, και

$$\|\tilde{f}\|_2 \leqslant \|f\|_2. \tag{9.2.0.7}$$

Λέμε ότι για κάποιον $1 < p < \infty$ έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$ αν υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ υπάρχει η συζυγής συνάρτηση $\tilde{f}$ (όπως ορίστηκε παραπάνω), η $\tilde{f}$ ανήκει στον $L^p(\mathbb{T})$, και

$$\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p.$$

Ορισμός 9.2.4 (προβολή)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $\sum c_k e^{ikx}$ η σειρά Fourier της f. Θεωρούμε την τριγωνομετρική σειρά*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{9.2.0.8}$$

Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση η οποία έχει σειρά Fourier την (9.2.0.8), την συμβολίζουμε με Pf και λέμε ότι η Pf είναι η ***προβολή*** *της f.*

Λέμε ότι για κάποιον $1 < p < \infty$ έχουμε προβολές στον $L^p(\mathbb{T})$ αν υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ υπάρχει η προβολή Pf (όπως ορίστηκε παραπάνω), η Pf ανήκει στον $L^p(\mathbb{T})$, και

$$\|Pf\|_p \leqslant A_p \|f\|_p.$$

Πρόταση 9.2.5. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Τότε,*

(α) έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν

(β) έχουμε προβολές στον $L^p(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_k c_k(f)e^{ikx}$. Από την υπόθεση, η $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$ και $\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$. Θεωρούμε την

$$g = \frac{c_0(f)}{2} + \frac{f + i\tilde{f}}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $|c_0(f)| \leqslant \|f\|_1 \leqslant \|f\|_p$. Προφανώς, $g \in L^p(\mathbb{T})$ και

$$\|g\|_p \leqslant \frac{|c_0(f)|}{2} + \frac{\|f\|_p + \|\tilde{f}\|_p}{2} \leqslant \frac{\|f\|_p}{2} + \frac{(A_p+1)\|f\|_p}{2} = \frac{A_p+2}{2}\|f\|_p.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $c_k(\tilde{f}) = (-i)(sign\, k)c_k(f)$ βλέπουμε ότι

$$c_k(g) = c_k(f) \ \text{ αν } k \geqslant 0 \quad \text{και} \quad c_k(g) = 0 \ \text{ αν } k < 0.$$

Άρα, $g = Pf$ και $\|Pf\|_p \leqslant A'_p\|f\|_p$ (με $A'_p = (A_p+2)/2$).

(β) $\Longrightarrow$ (α) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_k c_k(f)e^{ikx}$. Από την υπόθεση, η $Pf \in L^p(\mathbb{T})$ και $\|Pf\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g = \frac{2}{i}\left(Pf - \frac{c_0(f)}{2} - \frac{f}{2}\right).$$

Όπως πριν, δείχνουμε ότι $g \in L^p(\mathbb{T})$ και $\|g\|_p \leqslant A'_p\|f\|_p$. Απλές πράξεις δείχνουν ότι

$$c_k(g) = (-i)(sign\, k)c_k(f)$$

άρα $g = \tilde{f}$.

$\boxed{+}$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει τον βασικό λόγο για τον οποίο μελετάμε την συζυγή συνάρτηση.

Θεώρημα 9.2.6. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Τότε, έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$.*

Απόδειξη. Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 9.2.1 και 9.2.5 βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την ισοδυναμία των παρακάτω δύο προτάσεων:

(α) Υπάρχει $A_p > 0$ ώστε $\|s_n(f)\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$ για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Υπάρχει $B_p > 0$ ώστε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ η προβολή Pf ανήκει στον $L^p(\mathbb{T})$ και $\|Pf\|_p \leqslant B_p\|f\|_p$.

(α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_k c_k(f)e^{ikx}$. Παρατηρούμε ότι

$$c_k(e^{-inx}f(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{-inx}f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-i(k+n)x}dx = c_{k+n}(f)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Άρα,

$$e^{inx}s_n(e^{-inx}f,x) = e^{inx}\sum_{k=-n}^{n} c_k(e^{-inx}f)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} c_{k+n}(f)e^{i(k+n)x}$$
$$= \sum_{j=0}^{2n} c_j(f)e^{ijx}.$$

Αν ορίσουμε $P_nf(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k(f)e^{ikx}$, έπεται ότι

$$\|P_nf\|_p = \|e^{inx}s_n(e^{-inx}f,x)\|_p = \|s_n(e^{-inx}f,x)\|_p \leqslant A_p\|e^{-inx}f\|_p = A_p\|f\|_p.$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{P_nf\}$ είναι βασική στον $L^p(\mathbb{T})$: θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο g βαθμού N_ε τέτοιο ώστε $\|f-g\|_p \leqslant \varepsilon$. Τότε,

$$\|P_nf - P_ng\|_p = \|P_n(f-g)\|_p \leqslant A_p\|f-g\|_p \leqslant A_p\varepsilon.$$

Έστω $n,m > N_\varepsilon/2$. Τότε, $P_ng(x) = P_mg(x) = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} c_k(g)e^{ikx}$, άρα

$$\|P_nf - P_mf\|_p \leqslant \|P_nf - P_ng\|_p + \|P_ng - P_mg\|_p + \|P_mg - P_mf\|_p \leqslant A_p\varepsilon + 0 + A_p\varepsilon = 2A_p\varepsilon.$$

Έτσι, η $\{P_nf\}$ είναι βασική, άρα υπάρχει $h \in L^p(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε

$$\|P_nf - h\|_p \to 0.$$

Ειδικότερα, $\|P_nf - h\|_1 \to 0$, άρα
$$c_k(h) = \lim_{n\to\infty} c_k(P_nf)$$
για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αυτό δείχνει ότι $c_k(h) = c_k(f)$ αν $k \geqslant 0$ και $c_k(h) = 0$ αν $k < 0$. Άρα, $h = Pf$. Τέλος, αφού $\|P_nf - h\|_p \to 0$ έχουμε
$$\|h\|_p = \lim_{n\to\infty} \|P_nf\|_p \leqslant A_p\|f\|_p.$$

(β) $\Longrightarrow$ (α) Παρατηρούμε ότι

$$e^{i(2n+1)x}P(e^{-i(2n+1)x}f) = e^{i(2n+1)x}\sum_{k=0}^{\infty} c_{2n+1+k}(f)e^{ikx} = \sum_{s=2n+1} c_s e^{isx},$$

άρα
$$e^{inx}s_n(e^{-inx}f) = P_nf = Pf - e^{i(2n+1)x}P(e^{-i(2n+1)x}f).$$
Πολλαπλασιάζοντας αυτήν την ισότητα με e^{-inx} και αντικαθιστώντας την f με την $e^{inx}f$, παίρνουμε

$$s_n(f) = e^{-inx}P(e^{inx}f) - e^{i(n+1)x}P(e^{-i(n+1)x}f).$$

Έπεται ότι

$$\|s_n(f)\|_p \leqslant \|P(e^{inx}f)\|_p + \|P(e^{-i(n+1)x}f)\|_p \leqslant B_p\|e^{inx}f\|_p + B_p\|e^{-i(n+1)x}f\|_p = 2B_p\|f\|_p$$

για κάθε $n \geqslant 0$.

$\boxed{+}$

Πόρισμα 9.2.7. *Στον $L^1(\mathbb{T})$ δεν έχουμε συζυγία.* $\square$

9.3 Ολοκληρωτική αναπαράσταση της συζυγούς απεικόνισης

Για τη μελέτη της συζυγούς απεικόνισης χρειάζεται να εισάγουμε τον συζυγή πυρήνα Dirichlet και τον συζυγή πυρήνα Fejér.

Ορισμός 9.3.1 (συζυγής πυρήνας Dirichlet). *Για κάθε $n \geqslant 0$ ορίζουμε*

(9.3.0.9)
$$2\tilde{D}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} (-i)(sign\, k)e^{ikt} = (-i)\sum_{k=1}^{n}(e^{ikt} - e^{-ikt}).$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} &= e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} = \frac{e^{it}e^{int/2}(e^{-int/2}-e^{int/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})}\\ &= e^{i(n+1)t/2}\frac{\text{ημ}(nt/2)}{\text{ημ}(t/2)}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το t με $-t$, και συνδυάζοντας τις δύο παραστάσεις, βλέπουμε ότι

(9.3.0.10)
$$\begin{aligned}\tilde{D}_n(t) &= \frac{\text{ημ}(nt/2)}{2\,\text{ημ}(t/2)}(-i)(e^{i(n+1)t/2} - e^{-i(n+1)t/2})\\ &= 2\,\text{ημ}(nt/2)\frac{\text{ημ}((n+1)t/2)}{2\,\text{ημ}(t/2)} = \frac{\text{συν}(t/2)}{2\,\text{ημ}(t/2)} - \frac{\text{συν}((n+1/2)t)}{2\,\text{ημ}(t/2)}\\ &= \frac{1}{2\,\text{εφ}(t/2)} - \frac{\text{συν}((n+1/2)t)}{2\,\text{ημ}(t/2)}.\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η $\tilde{D}_n(t)$ είναι περιττή συνάρτηση, και

(9.3.0.11)
$$|\tilde{D}_n(t)| = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=-n}^{n}(-i)(sign\, k)e^{ikt}\right| \leqslant \frac{2n}{2} = n.$$

Επίσης, από την

$$|\tilde{D}_n(t)| = \left|2\,\text{ημ}(nt/2)\frac{\text{ημ}((n+1)t/2)}{2\,\text{ημ}(t/2)}\right|$$

και την $\text{ημ}(t/2) \geqslant t/\pi$, $0 < t < \pi$, έχουμε

(9.3.0.12)
$$|\tilde{D}_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{|t|} \quad \text{για κάθε } 0 < |t| < \pi.$$

Ορισμός 9.3.2 (συζυγής πυρήνας Fejér). *Για κάθε $n \geqslant 0$ ορίζουμε*

(9.3.0.13)
$$\begin{aligned}\tilde{K}_n(t) &= \frac{1}{n+1}(\tilde{D}_0(t) + \cdots + \tilde{D}_n(t))\\ &= \frac{\text{συν}(t/2)}{2\,\text{ημ}(t/2)} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\text{συν}((k+1/2)t)}{2\,\text{ημ}(t/2)}.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το άθροισμα του δεξιού μέλους της (9.3.0.13) ως εξής:

$$\begin{aligned}Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1/2)t}\right) &= Re\left(e^{it/2}\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right)\\ &= Re\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\text{ημ}((n+1)t/2)}{\text{ημ}(t/2)}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\,\sigma\upsilon\nu((n+1)t/2)\,\eta\mu((n+1)t/2)}{2\,\eta\mu(t/2)} \\
&= \frac{\eta\mu((n+1)t)}{2\,\eta\mu(t/2)}.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

(9.3.0.14)
$$
\tilde{K}_n(t) = \frac{\sigma\upsilon\nu(t/2)}{2\,\eta\mu(t/2)} - \frac{1}{n+1}\frac{\eta\mu((n+1)t)}{[2\,\eta\mu(t/2)]^2}.
$$

Παρατηρήστε ότι η $\tilde{K}_n(t)$ είναι περιττή συνάρτηση, και

$$
|\tilde{K}_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |\tilde{D}_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}.
$$

Επίσης,

(9.3.0.15)
$$
\left|\tilde{K}_n(t) - \frac{\sigma\upsilon\nu(t/2)}{2\,\eta\mu(t/2)}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\left|\frac{\eta\mu((n+1)t)}{[2\,\eta\mu(t/2)]^2}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4(n+1)t^2}, \qquad 0 < |t| < \pi.
$$

Παρατήρηση 9.3.3. *Μπορούμε να δείξουμε ότι*

$$
\lim_{n\to\infty} \|\tilde{K}_n\|_1 = +\infty
$$

με το εξής επιχείρημα: ξαναγράφουμε τον συζυγή πυρήνα Fejér στη μορφή

$$
\tilde{K}_n(t) = \frac{\sigma\upsilon\nu(t/2)}{2\,\eta\mu(t/2)}\left(1 - \frac{\eta\mu((n+1)t)}{(n+1)\,\eta\mu\, t}\right)
$$

και χρησιμοποιώντας την

$$
\left|\frac{\eta\mu((n+1)t)}{(n+1)\,\eta\mu\, t}\right| \leqslant \frac{\pi}{2t(n+1)}, \qquad 0 < t < \pi/2
$$

παίρνουμε

$$
\left|1 - \frac{\eta\mu((n+1)t)}{(n+1)\,\eta\mu\, t}\right| \geqslant \frac{1}{2} \quad \textit{για κάθε } \frac{\pi}{n+1} < t < \frac{\pi}{2}.
$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{K}_n\|_1 &\geqslant \frac{1}{2}\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu(t/2)}{2\,\eta\mu(t/2)}\,dt = \frac{1}{2} ln(\eta\mu(t/2))\Big|_{\pi/(n+1)}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\left[ln(\sqrt{2}/2) - ln(\eta\mu(\pi/2(n+1)))\right] \to \infty
\end{aligned}
$$

καθώς το $n \to \infty$.

Σκοπός μας είναι εκφράσουμε σαν ολοκλήρωμα την τριγωνομετρική σειρά

$$
\sum_k (-i)(sign\, k) c_k(f) e^{ikt}
$$

όπου $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με N:

$$
f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}.
$$

Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$\tilde{s}_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} (-i)(sign\, k) c_k e^{ikt}. \tag{9.3.0.16}$$

Απλός υπολογισμός (παρόμοιος με αυτόν που κάναμε για το $s_n(f,t)$) δείχνει ότι

$$\tilde{s}_n(f,x) = (2\tilde{D}_n * f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)\tilde{D}_n(t)\,dt. \tag{9.3.0.17}$$

Αφού η $\tilde{D}_n(t)$ είναι περιττή, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (9.3.0.17) στη μορφή

$$\tilde{s}_n(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x+t)\tilde{D}_n(t)\,dt \tag{9.3.0.18}$$

ή στη μορφή

$$\tilde{s}_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{f(x-t)-f(x+t)}{2}\right)\tilde{D}_n(t)\,dt. \tag{9.3.0.19}$$

Επιπλέον, επειδή η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στο δεξιό μέλος της (9.3.0.19) είναι άρτια, μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\tilde{s}_n(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t)-f(x-t))\left(\frac{1}{2\,\text{εφ}(t/2)} - \frac{\text{συν}((n+1/2)t)}{2\,\text{ημ}(t/2)}\right)dt. \tag{9.3.0.20}$$

Αφού η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, για κάθε $n \geqslant N$ έχουμε

$$\tilde{f}(x) = \tilde{s}_n(f,x).$$

Ειδικότερα, $\tilde{s}_n(f,x) \to \tilde{f}(x)$ για κάθε x, καθώς το $n \to \infty$. Από την άλλη πλευρά, παρατηρώντας ότι

$$e^{ik(x+t)} - e^{ik(x-t)} = (-2i)e^{ikx}\,\text{ημ}(kt),$$

παίρνουμε

$$f(x+t) - f(x-t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(e^{ik(x+t)} - e^{ik(x-t)}) = (-2i)\sum_{k=1}^{N} c_k e^{ikx}\,\text{ημ}(kt).$$

Έπεται ότι η συνάρτηση

$$t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x-t)}{\text{ημ}(t/2)}$$

είναι φραγμένη, άρα ολοκληρώσιμη, σαν συνάρτηση του t στο $[0,\pi]$. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue,

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)-f(x-t)}{\text{ημ}(t/2)}\right)\text{συν}((n+1/2)t)\,dt \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$, αφού το ολοκλήρωμα αυτό εκφράζεται μέσω των n-οστών συντελεστών ημιτόνων και συνημιτόνων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Παίρνοντας λοιπόν το όριο καθώς το $n \to \infty$ στην (9.3.0.20), βλέπουμε ότι η $\tilde{f}$ εκφράζεται από το (απόλυτα συγκλίνον) ολοκλήρωμα

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\,\text{εφ}(t/2)}\,dt. \tag{9.3.0.21}$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (9.3.0.21) συγκλίνει στην περίπτωση που η f ανήκει σε κάποιον $L^p(\mathbb{T})$, $p \geqslant 1$. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν κάτι τέτοιο είναι σωστό τότε δεν θα οφείλεται στο γεγονός ότι η $f(x+t)-f(x-t)$ είναι μικρή για μικρά t, αλλά στην αλληλοεξουδετέρωση των θετικών και αρνητικών τιμών της.

Θεώρημα 9.3.4 (Lusin). *Υπάρχει συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση f τέτοια ώστε*

(9.3.0.22)
$$\int_0^1 \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}\,dt = +\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αρχικά, κατασκευάζουμε συνεχή 1-περιοδική συνάρτηση g με τις εξής ιδιότητες:

(i) $|g(x)| \leqslant 1$.

(ii) Υπάρχει $A > 0$ ώστε $|g(x+t)-g(x-t)| \leqslant A|t|$.

(iii) Ισχύει
$$\int_{1/n}^1 \frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t}\,dt \sim lnn.$$

Μπορούμε να ξεκινήσουμε με μια συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία παίρνει τις τιμές $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, $g(1/4) = 1$ και είναι γραμμική στα διαστήματα $[0,1/4]$ και $[1/4,1]$. Κατόπιν την επεκτείνουμε σε μια 1-περιοδική συνάρτηση, την οποία συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με g. Είναι φανερό ότι $|g(x)| \leqslant 1$, και δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε $|g(x+t)-g(x)| \leqslant A|t|$ για κάθε x.

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x \in [0,1]$,

(9.3.0.23)
$$\int_0^1 |g(x+t)-g(x-t)|\,dt \geqslant c > 0.$$

Πράγματι, η συνάρτηση
$$x \mapsto \int_0^1 |g(x+t)-g(x-t)|\,dt$$
είναι γνήσια θετική, συνεχής και 1-περιοδική, άρα παίρνει θετική ελάχιστη τιμή c. Επίσης, από την (i) έχουμε

(9.3.0.24)
$$\int_0^1 |g(x+t)-g(x-t)|\,dt \leqslant 2.$$

Για κάθε n έχουμε

(9.3.0.25)
$$I_n := \int_{1/n}^1 \left|\frac{g(nx+nt)-g(nx-nt)}{t}\right|\,dt$$

$$= \int_1^n \left| \frac{g(nx+y) - g(nx-y)}{y} \right| dy$$

$$= \int_0^1 |g(nx+t) - g(nx-t)| \left(\frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{t+n-1} \right) dt.$$

Αφού

$$c_1 lnn \leqslant \frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{t+n-1} \leqslant c_2 lnn$$

για κάθε $t \in [0,1]$, από τις (9.3.0.23) και (9.3.0.24) συμπεραίνουμε ότι

$$c_1 c lnn \leqslant I_n \leqslant 2c_2 lnn,$$

δηλαδή ισχύει η (iii). Από την (ii) βλέπουμε επίσης ότι

(9.3.0.26)
$$\int_0^{1/n} \left| \frac{g(nx+nt) - g(nx-nt)}{t} \right| dt \leqslant 2An \cdot \frac{1}{n} = 2A.$$

Συνδυάζοντας την (iii) με την (9.3.0.26) καταλήγουμε στην

(9.3.0.27)
$$\int_0^1 \left| \frac{g(nx+nt) - g(nx-nt)}{t} \right| dt \leqslant C\, lnn.$$

Προχωράμε τώρα στον ορισμό της f. Η ιδέα είναι να ορίσουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n g(k_n x),$$

όπου οι $\varepsilon_n > 0$ θα επιλεγούν έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ και η γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (k_n) θα επιλεγεί με κατάλληλο τρόπο ώστε να πετύχουμε συγκεκριμένη σχέση ανάμεσα στους ε_n και I_{k_n}.

Γράφουμε

(9.3.0.28)
$$\begin{aligned} J_n &:= \int_{1/k_n}^1 \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt \\ &\geqslant \varepsilon_n \int_{1/k_n}^1 \left| \frac{g(k_n x + k_n t) - g(k_n x - k_n t)}{t} \right| dt \\ &\qquad - \sum_{j=1, j\neq n}^{\infty} \varepsilon_j \int_{1/k_n}^1 \left| \frac{g(k_j x + k_j t) - g(k_j x - k_j t)}{t} \right| dt \\ &\geqslant \varepsilon_n I_{k_n} - C \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j lnk_j - 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \varepsilon_j \int_{1/k_n}^{\infty} \frac{dt}{t} \\ &\geqslant \varepsilon_n I_{k_n} - C \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j lnk_j - 2lnk_n \sum_{j=n+1}^{\infty} \varepsilon_j . \end{aligned}$$

Μένει να επιλέξουμε τα ε_n και k_n έτσι ώστε η τελευταία ποσότητα να τείνει στο $+\infty$ καθώς το $n \to \infty$. Επιλέγουμε

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n!} \quad \text{και} \quad k_n = 2^{(n!)^2}$$

και ελέγχουμε ότι $J_n \to +\infty$.

$\boxed{+}$

Ορισμός 9.3.5 (περικεκομμένος μετασχηματισμός Hilbert). *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $0 < \varepsilon < \pi$ ορίζουμε*

(9.3.0.29) $$H_\varepsilon f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\,\varepsilon\varphi(t/2)}\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|\leqslant\pi} \frac{f(x+t)}{2\,\varepsilon\varphi(t/2)}\,dt.$$

Πρόταση 9.3.6 ($p = 2$). *Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon f - \tilde{f}\|_2 = 0.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι

(9.3.0.30) $$\|H_\varepsilon f\|_2 \leqslant c\|f\|_2,$$

όπου $c > 0$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από την f και το ε. Για το σκοπό αυτό γράφουμε

(9.3.0.31) $$\begin{aligned} H_\varepsilon f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|\leqslant\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{2\,\varepsilon\varphi(t/2)} - \frac{1}{t}\right)dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|\leqslant\pi} \frac{f(x-t)}{t}\,dt =: A(x) + B(x). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$A(x) = (f * 2\phi_1)(x) \quad \text{και} \quad B(x) = (f * 2\phi_2)(x),$$

όπου

$$\phi_1(t) = \chi_{[-\pi,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\pi]}(t)\left(\frac{1}{2\,\varepsilon\varphi(t/2)} - \frac{1}{t}\right)$$

και

$$\phi_2(t) = \chi_{[-\pi,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\pi]}(t)\frac{1}{t}.$$

Θα δείξουμε ότι $\sup_k |c_k(\phi_1)| \leqslant M$ και $\sup_k |c_k(\phi_2)| \leqslant M$ για κάποια σταθερά $M > 0$. Τότε,

$$\|A\|_2 = \|f * 2\phi_1\|_2 = 2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2|c_k(\phi_1)|^2\right)^{1/2} \leqslant 2M\|f\|_2$$

και

$$\|B\|_2 = \|f * 2\phi_2\|_2 = 2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2|c_k(\phi_2)|^2\right)^{1/2} \leqslant 2M\|f\|_2,$$

άρα

$$\|H_\varepsilon f\|_2 \leqslant \|A\|_2 + \|B\|_2 \leqslant 4M\|f\|_2.$$

Για να φράξουμε τους $c_k(\phi_1)$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $t \mapsto \frac{1}{2\,\text{εφ}(t/2)} - \frac{1}{t}$ είναι φραγμένη, άρα

$$|c_k(\phi_1)| \leqslant \|\phi_1\|_1 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2\,\text{εφ}(t/2)} - \frac{1}{t}\right| dt = M_1 < \infty.$$

Για να φράξουμε τους $c_k(\phi_2)$ υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $k > 0$ και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} c_k(\phi_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon} e^{-ikt}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} e^{-ikt}\frac{dt}{t} \\ &= \frac{(-2i)}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\text{ημ}\,kt}{t}\,dt = \frac{(-i)}{\pi}\int_{\varepsilon k}^{\pi k}\frac{\text{ημ}\,t}{t}dt. \end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι υπάρχει σταθερά $M_2 > 0$ ώστε, για κάθε $a < b$ στο $(0, \infty)$,

$$\left|\int_a^b \frac{\text{ημ}\,t}{t}\,dt\right| \leqslant M_2.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε την (9.3.0.30): υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon \in (0, \pi)$,

(9.3.0.32)
$$\|H_\varepsilon f\|_2 \leqslant c\|f\|_2.$$

Δείχνουμε τώρα ότι το συμπέρασμα της πρότασης ισχύει για τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Πράγματι, από την (9.3.0.21) έχουμε ότι

(9.3.0.33)
$$\tilde{p}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{p(x+t) - p(x-t)}{2\,\text{εφ}(t/2)}\,dt$$

για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p, άρα

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon p(x) = \tilde{p}(x).$$

Έχουμε επίσης δεί ότι οι $H_\varepsilon p$ και $\tilde{p}$ είναι φραγμένες στο $\mathbb{T}$ (ανεξάρτητα από το ε), άρα

(9.3.0.34)
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 = 0.$$

Τώρα, για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και για κάθε $\delta > 0$ επιλέγουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_2 < \delta$, και γράφουμε

$$\begin{aligned} \|H_\varepsilon f - \tilde{f}\|_2 &\leqslant \|H_\varepsilon f - H_\varepsilon p\|_2 + \|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 + \|\tilde{p} - \tilde{f}\|_2 \\ &= \|H_\varepsilon(f - p)\|_2 + \|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 + \|(p - f)\tilde{}\|_2 \\ &\leqslant c\|f - p\|_2 + \|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 + \|p - f\|_2 \\ &\leqslant (c+1)\delta + \|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και την (9.2.0.7). Από την (9.3.0.34) συμπεραίνουμε ότι

(9.3.0.35)
$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\|H_\varepsilon f - \tilde{f}\|_2 \leqslant (c+1)\delta,$$

και αφού το $\delta > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε το ζητούμενο.

$\boxed{+}$

Η μελέτη της συμπεριφοράς της $H_\varepsilon f$ στην περίπτωση που η f είναι απλώς ολοκληρώσιμη είναι πολύ πιο λεπτό θέμα. Αρχικά, θα συνδέσουμε την $H_\varepsilon f(x)$ με τους μέσους $\tilde{\sigma}_n(f,x)$, οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

(9.3.0.36) $$\tilde{\sigma}_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(sign\, k)c_k(f)e^{ikx},$$

τότε εύκολα ελέγχουμε ότι

(9.3.0.37) $$\tilde{\sigma}_n(f,x) = (2\tilde{K}_n * f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)\tilde{K}_n(t)\,dt.$$

Αφού η $\tilde{K}_n(t)$ είναι περιττή συνάρτηση, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (9.3.0.17) στη μορφή

(9.3.0.38) $$\tilde{\sigma}_n(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x+t)\tilde{K}_n(t)\,dt$$

ή στη μορφή

(9.3.0.39) $$\tilde{\sigma}_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{f(x-t)-f(x+t)}{2}\right)\tilde{K}_n(t)\,dt.$$

Επιπλέον, επειδή η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στο δεξιό μέλος της (9.3.0.39) είναι άρτια, μπορούμε επίσης να γράψουμε

(9.3.0.40) $$\tilde{\sigma}_n(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)-f(x-t))\left(\frac{\text{συν}(t/2)}{2\,\text{ημ}(t/2)}-\frac{1}{n+1}\frac{\text{ημ}((n+1)t)}{[2\,\text{ημ}(t/2)]^2}\right)dt.$$

Θεώρημα 9.3.7 (Lebesgue). *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) - H_{1/n}f(x) \to 0 \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

Επιπλέον, αν η $\tilde{f}(x)$ υπάρχει, τότε $\tilde{\sigma}_n(f,x) = \sigma_n(\tilde{f},x)$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $H_{1/n}f$ και την (9.3.0.40) έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_n(f,x) - H_{1/n}f(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{1/n}(f(x+t)-f(x-t))\,\tilde{K}_n(t)\,dt\\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}(f(x+t)-f(x-t))\left(\tilde{K}_n(t)-\frac{1}{2\,\text{εφ}(t/2)}\right)dt\\ &= A_n(x)+B_n(x).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $|\tilde{K}_n(t)|\leqslant n/2$ βλέπουμε ότι

$$|A_n(x)| \leqslant c_1 n\int_0^{1/n}|f(x+t)-f(x-t)|\,dt \to 0$$

σε κάθε $x\in Leb(f)$, δηλαδή σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Χρησιμοποιώντας την $\left|\tilde{K}_n(t) - \frac{1}{2\,\varepsilon\varphi(t/2)}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4(n+1)t^2}$ στο $[1/n, \pi]$ βλέπουμε ότι

$$|B_n(x)| \leqslant \frac{c_2}{n}\int_{1/n}^{\pi} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2}.$$

Γράφουμε

$$\frac{c_2}{n}\int_{1/n^{1/4}}^{\pi} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{c_2}{\sqrt{n}}\int_{0}^{\pi} |f(x+t) - f(x-t)|\,dt \leqslant \frac{c_3\|f\|_1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Μένει να εκτιμήσουμε το

$$\frac{c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F_x(t) = \int_0^t |f(x+s) - f(x-s)|\,ds.$$

Η F_x είναι απολύτως συνεχής, και μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\frac{c_2}{n}&\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2}\\ &= \frac{c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} F_x'(t)\,\frac{dt}{t^2} = \frac{c_2}{n}\frac{F_x(t)}{t^2}\Big|_{1/n}^{1/n^{1/4}} + \frac{2c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} F_x(t)\,\frac{dt}{t^3}.\end{aligned}$$

Για κάθε $x \in Leb(f)$ έχουμε $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{F_x(t)}{t} = 0$, άρα

$$\frac{c_2}{n}\left|\frac{F_x(t)}{t^2}\Big|_{1/n}^{1/n^{1/4}}\right| \leqslant \frac{c_2}{n^{3/4}}\frac{F_x(1/n^{1/4})}{1/n^{1/4}} + c_2\frac{F_x(1/n)}{1/n} \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{2c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} F_x(t)\,\frac{dt}{t^3} &\leqslant \frac{2c_2}{n}\int_{1/n}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\cdot \max\left\{\frac{F_x(t)}{t} : t \in [1/n, 1/n^{1/4}]\right\}\\ &= 2c_2 \max\left\{\frac{F_x(t)}{t} : t \in [1/n, 1/n^{1/4}]\right\} \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Έτσι, έχουμε

$$\frac{c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2} \to 0$$

για κάθε $x \in Leb(f)$ καθώς το $n \to \infty$.

Δείξαμε ότι $\lim_{n\to\infty} A_n(x) = \lim_{n\to\infty} B_n(x) = 0$ για κάθε $x \in Leb(f)$, άρα $\tilde{\sigma}_n(f,x) - H_{1/n}f(x) \to 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι η $\tilde{f}$ υπάρχει. Τότε, απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = (f * 2\tilde{K}_n)(x) = (\tilde{f} * 2K_n)(x) = \sigma_n(\tilde{f},x).$$

Αυτό προκύπτει για παράδειγμα από την ισότητα

$$c_k(\tilde{f} * 2K_n) = c_k(\tilde{f})c_k(2K_n) = \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(sign\, k)c_k(f)$$

και την (9.3.0.36).

$\boxed{+}$

Πόρισμα 9.3.8. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε, το όριο $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ αν και μόνο αν το $\lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n(f,x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Επιπλέον, τα δύο αυτά όρια συμπίπτουν, αν υπάρχουν.*

Απόδειξη. Αν το όριο $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$, τότε το $\lim_{n\to\infty} H_{1/n}f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ και το ζητούμενο έπεται άμεσα από το Θεώρημα 9.3.7.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το $\lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n(f,x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Τότε, το όριο $\lim_{n\to\infty} H_{1/n}f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon \in (0,1)$ και τον μοναδικό φυσικό n για τον οποίο $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon < \frac{1}{n}$. Τότε,

$$H_\varepsilon f(x) - H_{1/n}f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{1/n} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\,\text{εφ}(t/2)}\,dt$$

άρα

$$|H_\varepsilon f(x) - H_{1/n}f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{1/(n+1)}^{1/n} \left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\,\text{εφ}(t/2)}\right| dt$$

$$\leqslant cn \int_0^{1/n} |f(x+t)-f(x-t)|\,dt \to 0$$

για κάθε $x \in Leb(f)$ καθώς το $n \to \infty$. Αυτό αποδεικνύει ότι οι $H_\varepsilon f(x)$ και $H_{1/n}f(x)$ έχουν την ίδια συμπεριφορά καθώς το $\varepsilon \to 0^+$ και το $n \to \infty$ αντίστοιχα. Έπεται ότι το όριο $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με το $\lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n(f,x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

$\boxed{+}$

Πόρισμα 9.3.9. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x) = \tilde{f}(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.*

Απόδειξη. Αφού $f \in L^2(\mathbb{T})$, γνωρίζουμε ότι $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$. Συνεπώς,

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = \sigma_n(\tilde{f},x) \to \tilde{f}(x)$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ καθώς το $n \to \infty$. Από το Πόρισμα 9.3.8 παίρνουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n(f,x) = \tilde{f}(x)$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

$\boxed{+}$