



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισμότητα - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα ενότητας

6 Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα - Ασκήσεις	4
6.1 Ομάδα Α'	4
6.2 Ομάδα Β'	14

6 Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα - Ασκήσεις

6.1 Ομάδα Α΄

1. Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n = c_1 + \dots + c_n$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s , τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s .

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s , τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s .

Υπόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

Θέτοντας $s_0 = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) r^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - r \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $s_n = c_1 + \dots + c_n \rightarrow 0$. Επειδή η (s_k) είναι συγκλίνουσα είναι και φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_k| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s_k \rightarrow 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε $|s_k| < \varepsilon$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές στην (*) έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \right| &\leq (1-r) \sum_{k=1}^{k_0} |s_k| r^k + (1-r) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |s_k| r^k \\ &\leq (1-r) M r \frac{1-r^{k_0}}{1-r} + \varepsilon (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} r^k \\ &\leq M(1-r^{k_0}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $r_0 \in (0, 1)$ ώστε $M(1-r_0^{k_0}) < \varepsilon$, τότε για κάθε $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \right| < 2\varepsilon,$$

το οποίο δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow 1^-$.

Στη γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας την (*), γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s) r^k + (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s r^k \\ &= (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) r^k + (1-r) s \cdot \frac{r}{1-r} \\ &\rightarrow 0 + s = s. \end{aligned}$$

Για το (β): αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(**) \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \sigma_k r^k.$$

Έχουμε ότι $\sigma_{k+1} = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_k}{k+1}$. Άρα, θέτοντας $\sigma_0 = 0$ έχουμε $s_k = (k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k$ για $k = 0, 1, \dots$. Τότε, χρησιμοποιώντας και την πρώτη ταυτότητα από το (α), έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k] r^k \\ &= (1-r) \left[\sum_{k=1}^{\infty} k \sigma_k r^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k \sigma_k r^k \right] \\ &= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \sigma_k r^k. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \sigma_k r^k \\ &= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\sigma_k - s) k r^k + (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} s k r^k \\ &= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\sigma_k - s) k r^k + r s, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s , έχουμε $\sigma_k - s \rightarrow 0$. Ειδικότερα, η $(\sigma_k - s)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $B > 0$ ώστε $|\sigma_k - s| \leq B$ για κάθε k . Αφού $\sigma_k - s \rightarrow 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε $|\sigma_k - s| < \varepsilon$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k - s \right| &\leq (1-r)^2 \sum_{k=1}^{k_0} |\sigma_k - s| k r^k + (1-r)^2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\sigma_k - s| k r^k + |s - r s| \\ &\leq (1-r) k_0 B (1-r^{k_0}) + \varepsilon r + (1-r)|s|. \end{aligned}$$

Έστω $r_0 \in (0, 1)$ ώστε $B k_0 (1-r_0^{k_0}) < \varepsilon$ και $(1-r_0)|s| < \varepsilon$. Τότε, αν $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \right| \leq \varepsilon + \varepsilon r + (1-r)|s| < 3\varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \rightarrow s$ καθώς $r \rightarrow 1^-$.

2. Έστω $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι $s_n(f) = (f * D_n)$ και ότι η πράξη $*$ της συνέλιξης είναι προσεταιριστική και μεταθετική:

$$s_n(f) * g = (f * D_n) * g = f * (D_n * g) = f * (g * D_n) = f * s_n(g).$$

Όμοια δείχνουμε και την άλλη ισότητα.

3. Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|K_\delta\|_p = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_\delta(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = +\infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Για κάθε $0 < \eta < \pi$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\eta = \chi_{[-\eta, \eta]}$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$(\eta/\pi)^{1/q} \|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_\eta(t)|^q d\lambda(t) \right)^{1/q} \|K_\delta\|_p \geq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(x) g_\eta(x) d\lambda(x) \right|.$$

Από την άλλη πλευρά, από τις ιδιότητες των καλών πυρήνων παίρνουμε

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(x) g_\eta(x) d\lambda(x) \right| = \left| 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\eta < |x| \leq \pi} K_\delta(x) d\lambda(x) \right|.$$

Έστω $M > 0$. Υπάρχει $\eta \in (0, \pi)$ ώστε $(\pi/\eta)^{1/q} > 2M$. Επιπλέον, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε αν $0 < \delta < \delta_0$ τότε $\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\eta < |x| \leq \pi} K_\delta(x) d\lambda(x) \right| < 1/2$ (εξηγήστε γιατί). Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $0 < \delta < \delta_0$ τότε

$$\|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_\delta(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} > M,$$

το οποίο δείχνει ότι $\|K_\delta\|_p \rightarrow +\infty$ καθώς $\delta \rightarrow 0$.

4. Έστω $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε το n -οστό μερικό άθροισμα Cesàro της f τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\sigma_{2n-1}(f, 0) = \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{2n-1} s_m(f, 0) \geq \frac{1}{2n} \sum_{m=n}^{2n-1} s_m(f, 0) \geq \frac{1}{2} s_n(f, 0),$$

διότι $s_m(f, 0) = a_0/2 + a_1 + \dots + a_m$ και $a_k \geq 0$ για κάθε k , άρα $s_m(f, 0) \geq s_n(f, 0)$ για κάθε $m = n, n+1, \dots, 2n-1$. Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι

$$|\sigma_{2n-1}(f, x)| \leq \|f * F_{2n-1}\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|F_{2n-1}\|_1 = \|f\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι άνω φραγμένα:

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq 2s_n(f, 0) \leq 4\|f\|_\infty,$$

που αποδεικνύει τη σύγκλιση της σειράς.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η g είναι 2π -περιοδική, και $g(x) = g(x+2\sqrt{2}\pi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x-2\sqrt{2}\pi) e^{-ik(x-2\sqrt{2}\pi)} d\lambda(x) \\ &= e^{ik2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = e^{ik2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \\ &= e^{ik2\sqrt{2}\pi} \widehat{g}(k). \end{aligned}$$

Αν $k \neq 0$ έχουμε $e^{ik2\sqrt{2}\pi} \neq 1$, άρα $\widehat{g}(k) = 0$. Έπεται ότι $g(x) = \widehat{g}(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι σταθερή. Άρα, και η f είναι σταθερή.

6. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x-0) := \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x+0) := \lim_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x : πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r \rightarrow 1^-} (f * P_r)(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < y < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x-0)| < \varepsilon/2$ και αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x+0)| < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η P_r είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned} (f * P_r)(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y) d\lambda(y) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 P_r(y) [f(x-y) - f(x+0)] d\lambda(y) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} P_r(y) [f(x-y) - f(x-0)] d\lambda(y). \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 P_r(y) [f(x-y) - f(x+0)] d\lambda(y) \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^0 P_r(y) |f(x-y) - f(x+0)| d\lambda(y) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y) |f(x-y) - f(x+0)| d\lambda(y). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x+0)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^0 P_r(y) |f(x-y) - f(x+0)| d\lambda(y) &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\delta}^0 P_r(y) d\lambda(y) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) d\lambda(y) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y) |f(x-y) - f(x+0)| d\lambda(y) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y) (|f(x-y)| + |f(x+0)|) d\lambda(y) \\ &\leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y) d\lambda(y) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

καθώς το $r \rightarrow 1^-$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $r_0 \in (0, 1)$ ώστε, για κάθε $r_0 \leq r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y) |f(x-y) - f(x+0)| d\lambda(y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 P_r(y) [f(x-y) - f(x+0)] d\lambda(y) \rightarrow 0$$

καθώς το $r \rightarrow 1^-$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} P_r(y) [f(x-y) - f(x-0)] d\lambda(y) \rightarrow 0$$

καθώς το $r \rightarrow 1^-$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

7. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) d\lambda(t) = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από τον ορισμό της, κάθε Q_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση και ικανοποιεί την $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) d\lambda(t) = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_n(t) d\lambda(t) = 2 \int_{\delta}^{\pi} Q_n(t) d\lambda(t) \rightarrow 0 \quad \text{όταν } n \rightarrow \infty.$$

Έστω $0 < \delta < \pi$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1+\cos t}{2} \leq \frac{1+\cos \delta}{2} < 1$ για κάθε $t \in [\delta, \pi]$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t) d\lambda(t) \leq 2\pi \alpha_n \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\alpha_n \leq 4(n+1)$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)\theta^n = 0$ για $\theta = \frac{1+\cos \delta}{2} < 1$.

Γράφουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} = 2 \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^n = 2 \int_0^\pi \cos^{2n}(t/2) d\lambda(t) = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} y d\lambda(y).$$

Η $f(y) = \cos y$ είναι κοίλη στο $[0, \pi/2]$ και $f(0) = 1, f(\pi/2) = 0$. Συνεπώς, $\cos y \geq 1 - \frac{2y}{\pi}$ για κάθε $y \in [0, \pi/2]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} \geq 4 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2y}{\pi} \right)^{2n} d\lambda(y) = 2\pi \int_0^1 (1-s)^{2n} ds = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Δηλαδή, $\alpha_n \leq \frac{2n+1}{2}$.

Αφού η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων, για κάθε συνεχή 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ισχύει $f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε Q_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Άρα, οι συναρτήσεις $f * Q_n$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (εξηγήστε γιατί). Έτσι, έχουμε απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_n(x) = F_n(x) \eta_{\mu nx},$$

όπου F_n είναι ο n -οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n , τότε

$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leq 2n \|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leq n \|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

Υπόδειξη. Τα δύο μέλη της ισότητας $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ είναι γραμμικά ως προς T , αρκεί λοιπόν να την επαληθεύσουμε για όλες τις συναρτήσεις $T_k(x) = e^{ikx}, |k| \leq n$. Έχουμε

$$T'_k(x) = ik e^{ikx}$$

και

$$\begin{aligned} (T_k * G_n)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_k(x-y) G_n(y) d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)} F_n(y) \eta_{\mu}(ny) d\lambda(y) \\ &= \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)} e^{isy} \eta_{\mu}(ny) d\lambda(y) \\ &= e^{ikx} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)y} \frac{e^{iny} - e^{-iny}}{2i} d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2i} e^{ikx} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{i(s-k+n)y} - e^{i(s-k-n)y}] d\lambda(y). \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k+n)y} d\lambda(y) = 0$$

εκτός αν $s = k - n$ και

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k-n)y} d\lambda(y) = 0$$

εκτός αν $s = n + k$. Το πρώτο μπορεί να συμβεί μόνο αν $k > 0$ και το δεύτερο μόνο αν $k < 0$. Συνεπώς, αν $0 < k < n$ έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = \frac{1}{2i} e^{ikx} \left(1 - \frac{n-k}{n} \right) = \frac{k}{2ni} e^{ikx} = \frac{-ik}{2n} e^{ikx}.$$

Αν $-n < k < -1$, έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = -\frac{1}{2i} e^{ikx} \left(1 - \frac{n+k}{n} \right) = \frac{k}{2ni} e^{ikx} = \frac{-ik}{2n} e^{ikx}.$$

Σε κάθε περίπτωση, αν $k \neq 0$ παίρνουμε

$$(*) \quad T'_k(x) = -2n(T_k * G_n)(x).$$

Αν πάλι $k = 0$, τα δύο μέλη της (*) είναι ίσα με μηδέν. Έτσι, έχουμε αποδείξει την $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n .

Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |T'(x)| &= 2n|(T * G_n)(x)| \leq 2n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T(x-y)| |F_n(y)| \eta_{\mu} ny| d\lambda(y) \\ &\leq 2n \|T\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) d\lambda(y) = 2n \|T\|_{\infty}. \end{aligned}$$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f . Αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g_n := s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)$. Χρησιμοποιώντας την $\sigma_n = \frac{s_0 + \dots + s_{n-1}}{n}$ και την υπόθεση, θα δείξουμε ότι $g_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
 |s_n(f, x) - \sigma_n(f, x)| &= \frac{|(s_0 - s_n) + (s_1 - s_n) + \cdots + (s_{n-1} - s_n)|}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n (a_k \sigma_{\cup kx} + b_k \eta_{\mu kx}) \right| \\
 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k 1 \right) (a_k \sigma_{\cup kx} + b_k \eta_{\mu kx}) \right| \\
 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n k (a_k \sigma_{\cup kx} + b_k \eta_{\mu kx}) \right| \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k |a_k \sigma_{\cup kx} + b_k \eta_{\mu kx}|.
 \end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την στοιχειώδη ανισότητα $|a \sigma_{\cup \theta} + b \eta_{\mu \theta}| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ για $a, b \in \mathbb{R}$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε:

$$\|s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)\|_{\infty} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \rightarrow 0,$$

καθώς $n \rightarrow \infty$. Από το θεώρημα του Fejér ξέρουμε $\|f - \sigma_{n+1}(f)\|_{\infty} \rightarrow 0$. Από την τριγωνική ανισότητα

$$\|f - s_n(f)\|_{\infty} \leq \|f - \sigma_{n+1}(f)\|_{\infty} + \|\sigma_{n+1}(f) - s_n(f)\|_{\infty}$$

έπεται το ζητούμενο.

10. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L_1(\mathbb{T}) \rightarrow L_1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| := \sup\{\|T(g)\|_1 : \|g\|_1 \leq 1\} = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\|T(g)\|_1 = \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1,$$

άρα ο T είναι φραγμένος τελεστής και $\|T\| \leq \|f\|_1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\|F_n\|_1 = 1$, άρα

$$\|T\| \geq \|T(F_n)\|_1 = \|F_n * g\|_1 = \|\sigma_n(g)\|_1.$$

Αφού $\|\sigma_n(g) - g\|_1 \rightarrow 0$, έχουμε $\|\sigma_n(g)\|_1 \rightarrow \|g\|_1$. Συνεπώς,

$$\|T\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(g)\|_1 = \|g\|_1.$$

11. Έστω $f \in L_{\infty}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k \hat{f}(k)| \leq A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f, x)| \leq \|f\|_{\infty} + 2A.$$

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\sigma_{n+1}(f, x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k) e^{ikx} \quad \text{και} \quad s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Άρα,

$$s_n(f, x) = \sigma_{n+1}(f, x) + \sum_{k=-n}^n \frac{|k|}{n+1} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Αφού $|k\widehat{f}(k)| \leq A$ για κάθε k , έπεται ότι

$$\begin{aligned} |s_n(f, x)| &\leq |\sigma_{n+1}(f, x)| + \sum_{k=-n}^n \frac{|k\widehat{f}(k)|}{n+1} |e^{ikx}| \leq \|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty + \frac{(2n+1)A}{n+1} \\ &\leq \|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty + 2A. \end{aligned}$$

Αφού $\|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty = \|f * F_{n+1}\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|F_{n+1}\|_1 = \|f\|_\infty$, παίρνουμε το ζητούμενο.

12. Έστω $p \geq 1$ και έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Για κάθε $k \neq 0$ και $n \geq |k|$ έχουμε

$$(\widehat{\sigma_n(f) - f})(k) = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = -\frac{|k|}{n} \widehat{f}(k).$$

Άρα,

$$|\widehat{f}(k)| = \frac{n}{|k|} |(\widehat{\sigma_n(f) - f})(k)| \leq \frac{n}{|k|} \|\sigma_n(f) - f\|_1 \leq \frac{n}{|k|} \|\sigma_n(f) - f\|_p.$$

Από την $n \|\sigma_n(f) - f\|_p \rightarrow 0$ έπεται ότι

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{|k|} \cdot n \|\sigma_n(f) - f\|_p \rightarrow \frac{1}{|k|} \cdot 0 = 0,$$

δηλαδή $\widehat{f}(k) = 0$. Έπεται ότι $f \equiv \widehat{f}(0)$ (όλοι οι συντελεστές Fourier της $f - \widehat{f}(0)$ είναι ίσοι με μηδέν, και $f - \widehat{f}(0) \in L_p(\mathbb{T})$).

13. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L_1(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$(g - g * f_n)(k) = \widehat{g}(k) - \widehat{(g * f_n)}(k) = \widehat{g}(k) - \widehat{g}(k) \widehat{f}_n(k) = \widehat{g}(k) (1 - \widehat{f}_n(k)).$$

Άρα,

$$|\widehat{g}(k)| |1 - \widehat{f}_n(k)| = |(g - g * f_n)(k)| \leq \|g - g * f_n\|_1 \rightarrow 0.$$

Θεωρώντας την $g(x) = e^{ikx}$ (για την οποία $\widehat{g}(k) = 1$) παίρνουμε $|1 - \widehat{f}_n(k)| \rightarrow 0$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n(k) = 1$.

14. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά

$$\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t) d\lambda(t)$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$S_n = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t) = \int_A \left(\sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \right) d\lambda(t) = \int_A s_n(f, t) d\lambda(t).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &:= \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n S_m = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n \int_A s_m(f, t) d\lambda(t) \\ &= \int_A \left(\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n s_m(f, t) \right) d\lambda(t) = \int_A \sigma_{n+1}(f, t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Αφού $\|\sigma_{n+1}(f) - f\|_1 \rightarrow 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_A \sigma_{n+1}(f, t) d\lambda(t) - \int_A f(t) d\lambda(t) \right| &\leq \int_A |\sigma_{n+1}(f, t) - f(t)| d\lambda(t) \\ &\leq \|\sigma_{n+1}(f) - f\|_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\sigma_{n+1} \rightarrow \int_A f(t) d\lambda(t)$, δηλαδή η σειρά $\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t) d\lambda(t)$.

6.2 Ομάδα Β'

15. Έστω $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι η f προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$(*) \quad g(x) = \sum_{k=1}^N t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \dots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq \|f\|_\infty$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, χωρίστε το $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ σε m διαδοχικά διαστήματα I_1, \dots, I_m του ίδιου μήκους, και θεωρήστε τα $J_r = f^{-1}(I_r)$, $r = 1, \dots, m$. Επειδή η f είναι αύξουσα, κάθε J_r είναι διάστημα ή μονοσύνολο ή το κενό σύνολο (εξηγήστε γιατί). Προκύπτει έτσι μια διαμέριση $-\pi = b_1 < b_2 < \dots < b_{N+1} = \pi$ του $[-\pi, \pi]$, όπου $[b_s, b_{s+1}]$ είναι εκείνα τα J_r που είναι διαστήματα. Αν ορίσουμε $t_s = \inf\{f(x) : b_s \leq x \leq b_{s+1}\}$, τότε $|f(x) - t_s| \leq \frac{1}{m}$ στο (b_s, b_{s+1}) . Επίσης, $-\|f\|_\infty \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq \|f\|_\infty$, διότι η f είναι αύξουσα.

Αν ορίσουμε $g_m(x) = \sum_{s=1}^N t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$, τότε

$$(**) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)| dx \leq \frac{1}{m}.$$

Αν δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε συνάρτηση g της μορφής (*) και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ να ισχύει $|k\widehat{g}(k)| \leq M$, τότε από την (**) παίρνουμε

$$\begin{aligned} |k\widehat{f}(k)| &\leq |k\widehat{g}_m(k)| + |k|\widehat{f}(k) - \widehat{g}_m(k)| \\ &\leq M + |k| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)| dx \leq M + |k| \frac{1}{m} \end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και αφήνοντας το $m \rightarrow \infty$, βλέπουμε ότι $|k\widehat{f}(k)| \leq M$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s, b_{s+1}]}$: αν $k \neq 0$, έχουμε

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{b_s}^{b_{s+1}} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}}{2\pi ik}.$$

Έπεται ότι, για την $g(x) = \sum_{s=1}^N t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$,

$$\begin{aligned} 2\pi ik\widehat{g}(k) &= \sum_{s=1}^N t_s (e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}) \\ &= t_1 e^{-ib_1 x} - t_N e^{-ib_{N+1} x} + \sum_{s=2}^N e^{-ikb_s} (t_s - t_{s-1}). \end{aligned}$$

Συνοπώς,

$$\begin{aligned} 2\pi |k\widehat{g}(k)| &\leq |t_1| + |t_N| + \sum_{k=2}^N (t_s - t_{s-1}) = |t_1| + |t_N| + (t_N - t_1) \\ &\leq 4\|f\|_{\infty}, \end{aligned}$$

διότι $t_N - t_1 \leq \|f\|_{\infty} - (-\|f\|_{\infty}) = 2\|f\|_{\infty}$. Έπεται το ζητούμενο, με $M = 2\|f\|_{\infty}/\pi$.

16. Έστω $0 < \alpha \leq 1$ και έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(t+x) - f(t)| \leq A|x|^\alpha, \quad |x| \leq \pi.$$

Δείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f, t) - f(t)| \leq \frac{\pi + 1}{1 - \alpha} \frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ τότε

$$|\sigma_n(f, t) - f(t)| \leq 2\pi A \frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $\alpha = 1$ (η περίπτωση $0 < \alpha < 1$ είναι παρόμοια). Αν $F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\eta\mu(nx)}{\eta\mu(x/2)} \right)^2$ ο πυρήνας του Fejér τότε μπορούμε να γράψουμε $\sigma_n(f)(x) = (f * F_n)(x)$. Επομένως, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f, x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] F_n(t) d\lambda(t) \right| \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| F_n(t) d\lambda(t) \\ &\leq \frac{M}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|t|}{|\eta\mu(t/2)|} \frac{\eta\mu^2(nt)}{|\eta\mu(t/2)|} d\lambda(t), \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την συνθήκη Lipschitz για την f και το ότι η $\{F_n\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων που παίρνει θετικές τιμές. Καθώς, η συνάρτηση $t \mapsto \frac{t}{\eta\mu(t/2)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \pi)$, παίρνουμε $|\frac{t}{\eta\mu(t/2)}| \leq \pi$ για κάθε $|t| \leq \pi$. Έτσι, βρίσκουμε:

$$\|\sigma_n(f) - f\|_{\infty} \leq \frac{M}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\eta\mu nt}{\eta\mu(t/2)} \right| d\lambda(t),$$

διότι $|\eta\mu nt| \leq 1$. Τέλος, αν μιμηθούμε την απόδειξη της

$$\|D_n\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| d\lambda(t) \leq C \log n,$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\eta\mu nt}{\eta\mu(t/2)} \right| d\lambda(t) \leq C \log n$$

και το συμπέρασμα έπεται.

Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\eta\mu(t/2) > t/\pi$ για $0 < t < \pi$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\eta\mu nt}{\eta\mu(t/2)} \right| d\lambda(t) &\leq 2\pi \int_0^{\pi} \frac{|\eta\mu(nt)|}{t} d\lambda(t) \\ &\leq 2\pi \int_0^{n\pi} \frac{|\eta\mu t|}{t} d\lambda(t) \\ &\leq 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\eta\mu t}{t} d\lambda(t) + 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\eta\mu t|}{t} d\lambda(t) \\ &\leq 2\pi^2 + 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\eta\mu t|}{k\pi} d\lambda(t) \\ &\leq 2\pi^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \int_0^{\pi} |\eta\mu t| d\lambda(t) \end{aligned}$$

$$\leq 2\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq c \log n$$

για κάποια αριθμητική σταθερά $c > 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leq c' M \frac{\log n}{n}.$$

17. Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n , (β) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,

$$2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι η $b_n = a_{n-1} - a_n$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) = a_0 < \infty.$$

Άρα,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n b_{n+1} = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) F_n(x).$$

Αφού $F_n \geq 0$ και $\int_{\mathbb{T}} F_n(x) d\lambda(x) = 2\pi$ για κάθε $n \geq 1$, από το θεώρημα Βερρο-Λεβί έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}).$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^N n(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^N b_n - N b_{N+1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Τέλος, υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{f}_N(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=|k|}^N n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \\ &= \sum_{n=|k|}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}) - |k| \sum_{n=|k|}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = |k| b_{|k|} + \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n - |k| b_{|k|} \\ &= \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n = a_{|k|}. \end{aligned}$$

18. (α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geq 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geq 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{\mu} kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την απολύτως συνεχή συνάρτηση $F(t) = (-i) \int_0^t f(s) ds$. Η F είναι 2π -περιοδική, διότι $\widehat{f}(0) = 0$ από την υπόθεση, άρα $F(2\pi) = 0 = F(0)$. Έχουμε

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \frac{e^{-ikx}}{k} d\lambda(x) = \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

για κάθε $k \neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\sigma_{n+1}(F, 0) = \widehat{F}(0) + \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\widehat{f}(k)}{k} \rightarrow F(0).$$

Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\widehat{f}(k)}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \sum_{k=1}^n \frac{\widehat{f}(k)}{k} - \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \widehat{f}(k)\right),$$

όπου χρησιμοποίησαμε τις $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k)$ και $\widehat{f}(0) = 0$. Όμως, $\widehat{f}(k) \rightarrow 0$ άρα

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \widehat{f}(k) = \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \widehat{f}(k) \rightarrow 0.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{\mu} kx$. Τότε, $\widehat{2if}(k) = a_k$. Οι συντελεστές Fourier της $g = 2if$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του (α), άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < +\infty.$$

19. Έστω $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ περιπλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και $b_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$. Δείξτε ότι

$$|s_n(f, x)| \leq 5M$$

για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Υπόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι

$$|s_n(f, x) - \sigma_{n+1}(f, x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n kb_k.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $|\sigma_n(f, x)| \leq \|f\|_\infty \leq M$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$|\sigma_n(f, x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|F_n(t) d\lambda(t) \leq M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) d\lambda(t) = M.$$

Επιπλέον, είναι $\sigma_{n+1}(f, x) = \sum_{k=1}^n (1 - \frac{k}{n+1})b_k \eta_{\mu} kx$. Οπότε, για $x_n = \pi/(4n)$ και $2n$ αντί n παίρνουμε

$$M \geq \sigma_{2n+1}(f, x_n) = \sum_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{2n+1}\right) b_k \eta_{\mu}(kx_n) \geq \sum_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) b_k \frac{k}{2n},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $\eta_{\mu} x > (2/\pi)x$ για $0 < x < \pi/2$ και το γεγονός ότι $b_k \geq 0$. Συνεπώς, είναι

$$2nM \geq \sum_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{2n+1}\right) kb_k \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} kb_k,$$

χρησιμοποιώντας ακόμη μια φορά το γεγονός ότι $b_k \geq 0$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$\sum_{k=1}^n kb_k \leq 4nM.$$

Συνδυάζοντας με τα παραπάνω βρίσκουμε:

$$|s_n(f, x)| \leq |\sigma_{n+1}(f, x)| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n kb_k \leq M + \frac{4nM}{n+1} < 5M,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.