ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Σειρές Fourier

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

΄Αδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

5 Σειρές Fourier

5.1 Σειρές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές. Αν $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε η f γράφεται στη μορφή $f = u + iv$, όπου $u(x) = Re(f(x))$ και $v(x) = Im(f(x))$, $x \in [a,b]$. Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν οι u, v είναι ολοκληρώσιμες, και ορίζουμε

(5.1.0.1)
$$\int_a^b f(x)\, d\lambda(x) = \int_a^b u(x)\, d\lambda(x) + i \int_a^b v(x)\, d\lambda(x).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι εξακολουθεί να ισχύει η γραμμικότητα: αν οι $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμες και αν $t, s \in \mathbb{C}$ τότε

(5.1.0.2)
$$\int_a^b (tf(x) + sg(x))\, d\lambda(x) = t \int_a^b f(x)\, d\lambda(x) + s \int_a^b g(x)\, d\lambda(x).$$

Θα χρησιμοποιούμε συχνά το εξής: αν η $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

(5.1.0.3)
$$\left| \int_a^b f(x)\, d\lambda(x) \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, d\lambda(x).$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε

(5.1.0.4)
$$\int_a^b f(x)\, d\lambda(x) = Re^{ix_0}, \quad \text{όπου} \quad R = \left| \int_a^b f(x)\, d\lambda(x) \right| \quad \text{και} \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\, d\lambda(x) \right| &= e^{-ix_0} \int_a^b f(x)\, d\lambda(x) = \int_a^b e^{-ix_0} f(x)\, d\lambda(x) \\
&= \int_a^b Re(e^{-ix_0} f(x))\, d\lambda(x) \leqslant \int_a^b |e^{-ix_0} f(x)|\, d\lambda(x) \\
&= \int_a^b |f(x)|\, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αφού το ολοκλήρωμα της $e^{-ix_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός θα ισούται με το ολοκλήρωμα της $Re(e^{-ix_0} f(x))$.

Ορισμός 5.1.1 (μιγαδικές συναρτήσεις στο μοναδιαίο κύκλο). *Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ το μοναδιαίο κύκλο*

(5.1.0.5)
$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

(5.1.0.6)
$$f(x) = F(e^{ix}).$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι 2π-περιοδική. Αντίστροφα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $F(e^{ix}) = f(x)$ είναι καλά ορισμένη (πράγματι, αν $e^{ix_1} = e^{ix_2}$ για κάποιους $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε $x_2 = x_1 + 2k\pi$ για κάποιον ακέραιο k, άρα $f(x_1) = f(x_2)$ από την 2π-περιοδικότητα της f). Έχουμε λοιπόν μια $1-1$ αντιστοιχία ανάμεσα στις συναρτήσεις $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και τις 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Με βάση αυτήν την αντιστοιχία, λέμε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο (άρα σε κάθε) διάστημα μήκους 2π, η F είναι συνεχής αν η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη αν η f είναι παραγωγίσιμη, η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

Ορισμός 5.1.2 (ο χώρος $L_p(\mathbb{T})$). *Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ θεωρούμε το χώρο $L_p(\mathbb{T})$ των 2π-περιοδικών μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ για τις οποίες*

(5.1.0.7)
$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p d\lambda(x) < \infty,$$

ταυτίζοντας ως συνήθως συναρτήσεις που είναι ίσες σχεδόν παντού, εφοδιασμένο με τη νόρμα

(5.1.0.8)
$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p}.$$

Γράφοντας $\mathbb{T}$ εννοούμε οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π, για παράδειγμα το $(-\pi, \pi]$.

Ο $(L_p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach (η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο). Θεωρούμε επίσης τον χώρο $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ των «ουσιωδώς φραγμένων» 2π-περιοδικών μετρήσιμων f, ο οποίος είναι χώρος Banach με νόρμα την

(5.1.0.9)
$$\|f\|_\infty = \min\{\beta \geqslant 0 : \lambda(\{x \in \mathbb{T} : |f(x)| > \beta\}) = 0\} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Ορισμός 5.1.3 (τριγωνομετρικά πολυώνυμα). *Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\text{συν}\, kx$ και $\text{ημ}\, kx$. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \,\text{συν}\, kx + b_k \,\text{ημ}\, kx),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Ο βαθμός του T είναι ο μικρότερος $n \geqslant 0$ για τον οποίο το T έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_n$ την κλάση όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο από n. Παρατηρήστε ότι ο $\mathcal{T}_n$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής

(5.1.0.10)
$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

όπου $n \geqslant 0$, $c_k \in \mathbb{C}$ και $|c_n| + |c_{-n}| \neq 0$. Ο n είναι ο βαθμός του p. Θεωρούμε επίσης ότι η μηδενική συνάρτηση είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το γεγονός ότι, αν $k \in \mathbb{Z}$,

(5.1.0.11)
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0 \end{cases},$$

ελέγχουμε εύκολα ότι

(5.1.0.12)
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \quad \text{για κάθε } |k| \leqslant n.$$

Ορισμός 5.1.4 (τριγωνομετρική σειρά). *Τριγωνομετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής*

(5.1.0.13)
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Με τον όρο πραγματική τριγωνομετρική σειρά αναφερόμαστε σε μια σειρά της μορφής

(5.1.0.14)
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \,\text{συν}\, kx + b_k \,\text{ημ}\, kx),$$

όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Το συμμετρικό n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (5.1.0.13) είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

(5.1.0.15)
$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

ενώ το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (5.1.0.14) είναι το πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

(5.1.0.16)
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \,\text{συν}\, kx + b_k \,\text{ημ}\, kx).$$

Ορισμός 5.1.5 (σειρά Fourier). *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k-οστό* **συντελεστή Fourier** *της f μέσω της*

(5.1.0.17)
$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x).$$

Από την (5.1.0.3) έχουμε

(5.1.0.18)
$$|\widehat{f}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, d\lambda(x) = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη.

Η **σειρά Fourier** *της f είναι η σειρά συναρτήσεων*

(5.1.0.19)
$$S(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Το n-**οστό μερικό άθροισμα** *της σειράς Fourier της f είναι το μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

(5.1.0.20)
$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, θεωρούμε την $f(x) = F(e^{ix})$ και ορίζουμε τους συντελεστές Fourier της f μέσω του περιορισμού της f στο $(-\pi, \pi]$, χρησιμοποιώντας την (5.1.0.17).

Παρατήρηση 5.1.6. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \geqslant 0$ ορίζουμε*

(5.1.0.21)
$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\text{συν}\, kx \, d\lambda(x)$$

και για κάθε $k \geqslant 1$ ορίζουμε

(5.1.0.22)
$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\text{ημ}\, kx \, d\lambda(x).$$

Αν η f είναι άρτια, δηλαδή $f(-x) = f(x)$ για κάθε x, τότε όλοι οι συντελεστές b_k μηδενίζονται, και

(5.1.0.23)
$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \,\text{συν}\, kx \, d\lambda(x).$$

Αν η f είναι περιττή, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x, τότε όλοι οι συντελεστές a_k μηδενίζονται, και

(5.1.0.24)
$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \,\text{ημ}\, kx \, d\lambda(x).$$

Παρατηρήστε ότι: αν $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

(5.1.0.25)
$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\text{συν}\, kx \, d\lambda(x) - i \,\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\text{ημ}\, kx \, d\lambda(x) \\ &= \frac{a_k(f) - i b_k(f)}{2},\end{aligned}$$

και

(5.1.0.26)
$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\text{συν}\, kx \, d\lambda(x) + i \,\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\text{ημ}\, kx \, d\lambda(x) \\ &= \frac{a_k(f) + i b_k(f)}{2}.\end{aligned}$$

Επίσης,

(5.1.0.27)
$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, d\lambda(x) = \frac{a_0(f)}{2}.$$

Παίρνουμε έτσι την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.1.7. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύουν οι*

(5.1.0.28)
$$a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \quad \text{και} \quad b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)).$$

Επίσης, $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$ και

(5.1.0.29)
$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f) \,\text{συν}\, kx + b_k(f) \,\text{ημ}\, kx).$$

Απόδειξη. Οι ισότητες $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$, $a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)$ και $b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))$ προκύπτουν άμεσα από τις (5.1.0.25), (5.1.0.26) και (5.1.0.27). Για την (5.1.0.31) γράφουμε

$$\begin{aligned} s_n(f,x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} \widehat{f}(k)e^{ikx} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{-n} \widehat{f}(-k)e^{-ikx} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)(\text{συν}\, kx + i\,\text{ημ}\, kx) + \sum_{k=1}^{-n} \widehat{f}(-k)(\text{συν}\, kx - i\,\text{ημ}\, kx) \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k))\,\text{συν}\, kx + \sum_{k=1}^{n} i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))\,\text{ημ}\, kx \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\,\text{συν}\, kx + b_k(f)\,\text{ημ}\, kx), \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (5.1.0.28). □

Το βασικό πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, ή ισοδύναμα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα μήκους 2π, θα εξετάσουμε αν η ακολουθία $s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ «συγκλίνει» στην f.

Σαν ένα πρώτο παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$ στο $[-\pi, \pi)$ και την επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Η f είναι προφανώς ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier της f. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, d\lambda(x) = 0. \tag{5.1.0.30}$$

Για κάθε $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left[-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]' d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-xe^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{ik}\, d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-\pi e^{-ik\pi} - \pi e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2k}\,\frac{e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}}{i} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{ik}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{ik}\, d\lambda(x) = 0$.

Έπεται ότι

$$S(f,x) = \sum_{k\neq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{ik} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}e^{ikx} - (-1)^{-k+1}e^{-ikx}}{ik} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\eta\mu\, kx}{k}. \tag{5.1.0.31}$$

Θα μπορούσε κανείς, εναλλακτικά, να παρατηρήσει πρώτα ότι $a_k(f) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, διότι η f είναι περιττή. Αυτό σημαίνει ότι

$$S(f,x) = \sum_{k\neq 0} b_k(f)\, \eta\mu\, kx. \tag{5.1.0.32}$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, ακριβώς όπως παραπάνω, μπορείτε να υπολογίσετε τους συντελεστές $b_k(f)$ και να καταλήξετε πάλι στην (5.1.0.31).

5.2 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι η κλάση των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνή στο χώρο $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε*

$$\|f - p\|_\infty = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon. \tag{5.2.0.33}$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τέτοια ώστε $\|f - p_m\|_\infty \to 0$.

Στη συνέχεια θα δούμε και άλλες αποδείξεις του Θεωρήματος 5.2.1. Δίνουμε όμως πρώτα μία απόδειξη που είναι «ανεξάρτητη» από την θεωρία των σειρών Fourier. Ξεκινάμε με κάποιες παρατηρήσεις για τα πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Πρόταση 5.2.2. *Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n είναι πολυώνυμο των $\sigma\upsilon\nu\, x$ και $\eta\mu\, x$ βαθμού n. Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $p(t,s)$ βαθμού n ώστε*

$$T(x) = p(\sigma\upsilon\nu\, x, \eta\mu\, x). \tag{5.2.0.34}$$

Η Πρόταση 5.2.2 είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου λήμματος.

Λήμμα 5.2.3. *Για κάθε $n \geqslant 1$, οι συναρτήσεις $\sigma\upsilon\nu\, nx$ και $(\eta\mu(n+1)x)/\eta\mu\, x$ είναι πολυώνυμα του $\sigma\upsilon\nu\, x$ βαθμού n.*

Απόδειξη. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχουν $a_{0,n}, \dots, a_{n-1,n} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sigma\upsilon\nu\, nx = 2^{n-1}\sigma\upsilon\nu^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,n}\, \sigma\upsilon\nu^j x. \tag{5.2.0.35}$$

Παρατηρήστε ότι η (5.2.0.35) ισχύει τετριμμένα για $n = 1$, ενώ για $n = 2$ γνωρίζουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\, 2x = 2\,\sigma\upsilon\nu^2 x - 1. \tag{5.2.0.36}$$

Υποθέτουμε ότι η (5.2.0.35) ισχύει για το $\text{συν}\, kx$, $k \geqslant 2$. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

(5.2.0.37) $$\text{συν}[(k+1)x] + \text{συν}[(k-1)x] = 2\,\text{συν}\, kx\, \text{συν}\, x$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\text{συν}(k+1)x &= 2\,\text{συν}\, kx\, \text{συν}\, x - \text{συν}(k-1)x \\ &= 2\,\text{συν}\, x\left(2^{k-1}\,\text{συν}^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k}\,\text{συν}^j x\right) - 2^{k-2}\,\text{συν}^{k-1} x - \sum_{j=0}^{k-2} a_{j,k-1}\,\text{συν}^j x \\ &= 2^k\,\text{συν}^{k+1} x + \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\,\text{συν}^j x\end{aligned}$$

για κατάλληλους $a_{j,k+1} \in \mathbb{R}$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

(5.2.0.38) $$\text{ημ}[(k+1)x] - \text{ημ}[(k-1)x] = 2\,\text{συν}\, kx\, \text{ημ}\, x$$

δείχνουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n \geqslant 1$,

(5.2.0.39) $$\frac{\text{ημ}(n+1)x}{\text{ημ}\, x} = 2^n\,\text{συν}^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,n}\,\text{συν}^j x$$

για κατάλληλους $a_{j,n} \in \mathbb{R}$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). □

Παρατήρηση 5.2.4. *Θεωρούμε το σύνολο*

(5.2.0.40) $$B_n = \{1, \text{συν}\, x, \text{συν}^2 x, \dots, \text{συν}^n x, \text{ημ}\, x, \text{ημ}\, x\,\text{συν}\, x, \dots, \text{ημ}\, x\,\text{συν}^{n-1} x\}.$$

Από το Λήμμα 5.2.3 έχουμε

(5.2.0.41) $$\mathcal{T}_n \subseteq span(B_n),$$

όπου $span(B_n)$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από το B. Ειδικότερα, η διάσταση $dim(\mathcal{T}_n)$ του $\mathcal{T}_n$ είναι μικρότερη ή ίση από $2n+1$, κάτι που είναι φανερό και από το γεγονός ότι

(5.2.0.42) $$\mathcal{T}_n = span(A_n),$$

όπου

(5.2.0.43) $$A_n = \{1, \text{συν}\, x, \text{συν}\, 2x, \dots, \text{συν}\, nx, \text{ημ}\, x, \dots, \text{ημ}\, nx\}.$$

Παρατηρήστε ότι $card(A_n) = card(B_n) = 2n+1$ (με $card(X)$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου X).

Πρόταση 5.2.5. *Για κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει*

(5.2.0.44) $$\mathcal{T}_n = span(B_n) = span(A_n).$$

Για την απόδειξη της Πρότασης 5.2.5 θα δείξουμε πρώτα ότι το A_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Θα χρειαστούμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.2.6 (σχέσεις ορθογωνιότητας). *Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Αν* $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ *και* $m \neq n$ *τότε*

(5.2.0.45)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{συν}\, mx\, \text{συν}\, nx \; d\lambda(x) = 0.$$

2. *Αν* $m, n = 1, 2, \ldots$ *και* $m \neq n$ *τότε*

(5.2.0.46)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ημ}\, mx\, \text{ημ}\, nx \; d\lambda(x) = 0.$$

3. *Αν* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *και* $n = 1, 2, \ldots$ *τότε*

(5.2.0.47)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{συν}\, mx\, \text{ημ}\, nx \; d\lambda(x) = 0.$$

4. *Αν* $m, n = 1, 2, \ldots$ *τότε*

(5.2.0.48)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{συν}^2\, mx \; d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ημ}^2\, nx \; d\lambda(x) = \frac{1}{2}.$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες

$$\begin{aligned}
2\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\phi &= \text{συν}(\theta-\phi) + \text{συν}(\theta+\phi),\\
2\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\phi &= \text{ημ}(\theta+\phi) + \text{ημ}(\theta-\phi),\\
2\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\phi &= \text{συν}(\theta-\phi) - \text{συν}(\theta+\phi),
\end{aligned}$$

και τις $2\,\text{συν}^2\,\theta = \text{συν}\,2\theta + 1$, $2\,\text{ημ}^2\,\theta = 1 - \text{συν}\,2\theta$. □

Πρόταση 5.2.7. *Το σύνολο* $A = \{1, \text{συν}\,x, \text{συν}\,2x, \ldots, \text{συν}\,nx, \text{ημ}\,x, \ldots, \text{ημ}\,nx\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο (πάνω από το* $\mathbb{R}$ *).*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι αν

(5.2.0.49)
$$T(x) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{n}(\nu_k\,\text{συν}\,kx + \mu_k\,\text{ημ}\,kx) \equiv 0,$$

για κάποιους $\nu_k, \mu_k \in \mathbb{R}$, τότε

(5.2.0.50)
$$\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_n = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 5.2.6. Για παράδειγμα, για κάθε $m = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} T(x)\,\text{ημ}\, mx d\lambda(x) \\ &= \nu_0 \int_{-\pi}^{\pi} \text{ημ}\, mx d\lambda(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\nu_k \int_{-\pi}^{\pi} \text{συν}\, kx\ \text{ημ}\, mx d\lambda(x) + \mu_k \int_{-\pi}^{\pi} \text{ημ}\, kx\ \text{ημ}\, mx d\lambda(x) \right) \\ &= \mu_m \int_{-\pi}^{\pi} \text{ημ}\, mx\ \text{ημ}\, mx d\lambda(x) = \mu_m, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} \text{συν}\, kx\ \text{ημ}\, mx d\lambda(x) = 0$ για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n$ και $\int_{-\pi}^{\pi} \text{ημ}\, kx\ \text{ημ}\, mx d\lambda(x) = 0$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \neq m$. Όμοια δείχνουμε ότι $\nu_m = 0$ για κάθε $m = 0, 1, \dots, n$. □

Απόδειξη της Πρότασης 5.2.5. Από την Πρόταση 5.2.7 γίνεται σαφές ότι $dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$: το A είναι μία βάση του $\mathcal{T}_n$. Επιπλέον, αφού $span(B) \supseteq \mathcal{T}_n$ και $dim(span(B)) \leqslant 2n + 1$, συμπεραίνουμε ότι, τελικά,

(5.2.0.51) $$\mathcal{T}_n = span(B) = span(A).$$

Ειδικότερα, κάθε πολυώνυμο του $\text{συν}\, x$, βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, ανήκει στην κλάση $\mathcal{T}_n$. □

Θα χρησιμοποιήσουμε το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass (μια απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα).

Θεώρημα 5.2.8. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε*

(5.2.0.52) $$\|f - p\|_\infty = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in [a, b]\} \leqslant \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ πολυωνύμων ώστε $\|f - p_m\|_\infty \to 0$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.8 θα δείξουμε ότι η κλάση $\mathcal{T}$ των πραγματικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι «πυκνή» στον χώρο των συνεχών 2π-περιοδικών πραγματικών συναρτήσεων:

Θεώρημα 5.2.9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο T ώστε*

(5.2.0.53) $$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{T_m\}$ πραγματικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - T_m\|_\infty \to 0$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με

(5.2.0.54) $$g(y) = f(\text{τοξσυν}\, y).$$

Η g είναι καλά ορισμένη, διότι $\text{τοξσυν}\, y \in [0, \pi]$ για κάθε $y \in [-1, 1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Από το Θεώρημα 5.2.8 υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_\infty < \varepsilon$. Δηλαδή,

(5.2.0.55) $$|f(\text{τοξσυν}\, y) - p(y)| < \varepsilon$$

για κάθε $y \in [-1, 1]$. Ορίζουμε $T(x) = p(\text{συν}\, x)$. Το T είναι πολυώνυμο του $\text{συν}\, x$, άρα $T \in \mathcal{T}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0, \pi]$ υπάρχει $y \in [-1, 1]$ ώστε $y = \text{συν}\, x$, και τότε,

(5.2.0.56) $$|f(x) - T(x)| = |f(x) - p(\text{συν}\, x)| = |f(\text{τοξσυν}\, y) - p(y)| < \varepsilon.$$

Αφού οι f και T είναι άρτιες συναρτήσεις, έπεται ότι

$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : -\pi \leqslant x \leqslant \pi\} < \varepsilon, \tag{5.2.0.57}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)]\,\text{ημ}\, x. \tag{5.2.0.58}$$

Παρατηρήστε ότι οι f_1 και f_2 είναι άρτιες, συνεχείς και 2π-περιοδικές. Άρα, μπορούμε να βρούμε τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1 και T_2 ώστε

$$\|f_1 - T_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \|f_2 - T_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.0.59}$$

Αν θέσουμε

$$T_3(x) = \frac{1}{2}(T_1(x)\,\text{ημ}^2 x + T_2(x)\,\text{ημ}\, x), \tag{5.2.0.60}$$

τότε $T_3 \in \mathcal{T}$ και, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} |2f(x)\,\text{ημ}^2 x - 2T_3(x)| &= |f_1(x)\,\text{ημ}^2 x + f_2(x)\,\text{ημ}\, x - T_1(x)\,\text{ημ}^2 x - T_2(x)\,\text{ημ}\, x| \\ &\leqslant |(f_1(x) - T_1(x))\,\text{ημ}^2 x| + |(f_2(x) - T_2(x))\,\text{ημ}\, x| \\ &\leqslant |f_1(x) - T_1(x)| + |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, αν ορίσουμε $f_3(x) = f(x)\,\text{ημ}^2 x$ τότε

$$\|f_3 - T_3\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.0.61}$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική. Συνεπώς, ο ίδιος συλλογισμός δείχνει ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T_4 ώστε, για τη συνάρτηση $f_4(x) = g(x)\,\text{ημ}^2 x$ να ισχύει $\|f_4 - T_4\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Αν ορίσουμε $T_5(x) = T_4(x + \pi/2)$, τότε το T_5 είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν θέσουμε $y = x + \pi/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)\,\text{συν}^2 x - T_5(x)| &= |f(x)\,\text{συν}^2 x - T_4(x + \pi/2)| \\ &= |f(y - \pi/2)\,\text{ημ}^2 y - T_4(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{5.2.0.62}$$

Συνεπώς,

$$\|f_5 - T_5\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.2.0.63}$$

όπου $f_5(x) = f(x)\,\text{συν}^2 x$.

Παρατηρήστε ότι $f = f_3 + f_5$, διότι $f(x) = f(x)\,\text{ημ}^2 x + f(x)\,\text{συν}^2 x$. Ορίζουμε $T = T_3 + T_5$. Τότε, $T \in \mathcal{T}$ και

$$\begin{aligned} \|f - T\|_\infty &= \|(f_3 + f_5) - (T_3 + T_5)\|_\infty \\ &\leqslant \|f_3 - T_3\|_\infty + \|f_5 - T_5\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.2.0.64}$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. $\square$

Πόρισμα 5.2.10. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση με την ιδιότητα*

(5.2.0.65)
$$a_k(f) = b_k(f) = 0$$

για κάθε k. Τότε, $f \equiv 0$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος είναι φανερό ότι

(5.2.0.66)
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)\,d\lambda(x) = 0$$

για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο T. Από το Θεώρημα 5.2.9 υπάρχει ακολουθία $\{T_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - T_m\|_\infty \to 0$. Τότε, για κάθε m έχουμε

(5.2.0.67)
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,d\lambda(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,d\lambda(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_m(x)\,d\lambda(x)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(f(x) - T_m(x))\,d\lambda(x).\end{aligned}$$

Άρα,

(5.2.0.68)
$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,d\lambda(x) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty\|f - T_m\|_\infty d\lambda(x) = 2\pi\|f\|_\infty\|f - T_m\|_\infty \to 0.$$

Έπεται ότι

(5.2.0.69)
$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,d\lambda(x) = 0,$$

και, αφού η f είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv 0$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Γράφουμε $f = u + iv$ και, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ βρίσκουμε πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1, T_2 τέτοια ώστε

(5.2.0.70)
$$\|u - T_1\|_\infty \leqslant \varepsilon/\sqrt{2} \ \text{ και } \ \|v - T_2\|_\infty \leqslant \varepsilon/\sqrt{2}.$$

Παρατηρήστε ότι αν ορίσουμε $p = u + iv$ τότε

(5.2.0.71)
$$|f(x) - p(x)|^2 = |u(x) - T_1(x)|^2 + |v(x) - T_2(x)|^2 \leqslant \|u - T_1\|_\infty^2 + \|v - T_2\|_\infty^2 \leqslant \varepsilon^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

(5.2.0.72)
$$\|f - p\|_\infty = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon.$$

Μένει να δείξουμε ότι η $p = u + iv$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε τα T_1, T_2 να γράφονται στη μορφή

(5.2.0.73)
$$T_1(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k\,\text{συν}\,kx + b_k\,\text{ημ}\,kx) \ \text{ και } \ T_2(x) = \sum_{k=0}^{n}(t_k\,\text{συν}\,kx + s_k\,\text{ημ}\,kx),$$

όπου $a_k, b_k, t_k, s_k \in \mathbb{R}$. Αν ορίσουμε $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ και $d_k = \frac{t_k - is_k}{2}$, τότε από τους υπολογισμούς της Παρατήρησης 5.1.6 βλέπουμε ότι

$$p(x) = T_1(x) + iT_2(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} + i \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} (c_k + id_k) e^{ikx}, \tag{5.2.0.74}$$

δηλαδή το p είναι (μιγαδικό) τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n. □

Πόρισμα 5.2.11. *Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση με*

$$\widehat{f}(k) = 0 \tag{5.2.0.75}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.

Απόδειξη. Ακριβώς όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 5.2.10, από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος είναι φανερό ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x)\, d\lambda(x) = 0 \tag{5.2.0.76}$$

για κάθε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p. Από το Θεώρημα 5.2.1 υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - p_m\|_\infty \to 0$. Τότε, για κάθε m έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, d\lambda(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, d\lambda(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{p_m(x)}\, d\lambda(x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{f(x) - p_m(x)}\, d\lambda(x). \end{aligned} \tag{5.2.0.77}$$

Άρα,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, d\lambda(x) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty \|f - p_m\|_\infty d\lambda(x) = 2\pi \|f\|_\infty \|f - p_m\|_\infty \to 0. \tag{5.2.0.78}$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, d\lambda(x) = 0, \tag{5.2.0.79}$$

και, αφού η $|f|^2$ είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $|f| \equiv 0$, δηλαδή $f \equiv 0$. □

5.3 Βασικές ιδιότητες των σειρών Fourier

Σε αυτήν την παράγραφο συγκεντρώνουμε βασικές και χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιούμε συχνά στα επόμενα. Κάποιες πολύ στοιχειώδεις ιδιότητες είναι οι εξής:

1. Αν $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ και $\alpha \in \mathbb{C}$ τότε

   $$\widehat{f + \alpha g}(k) = \widehat{f}(k) + \alpha\, \widehat{g}(k) \tag{5.3.0.80}$$

   για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

2. Αν $g \in L_1(\mathbb{T})$ τότε

(5.3.0.81)
$$\widehat{\overline{g}}(k) = \overline{\widehat{g}(-k)}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

3. Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f_\alpha(t) = f(t+\alpha)$, τότε

(5.3.0.82)
$$\widehat{f_\alpha}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t+\alpha)e^{-ikt}dt = e^{ik\alpha}\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

4. Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$ και $g_n(t) = f(t)e^{int}$, τότε

(5.3.0.83)
$$\widehat{g_n}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{int}e^{-ikt}dt = \widehat{f}(k-n)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Όπως είδαμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

(5.3.0.84)
$$|\widehat{f}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|\,d\lambda(x) = \|f\|_1.$$

Με άλλα λόγια, η $\{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Ισχύει όμως κάτι ισχυρότερο:

Θεώρημα 5.3.1 (Riemann-Lebesgue). *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Τότε,*

(5.3.0.85)
$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L_1(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p_ε ώστε

(5.3.0.86)
$$\|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon.$$

Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα 4.2.10 (οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L_1(\mathbb{T})$) και το Θεώρημα 5.2.1 (τα τριγωνομετρικά πολύώνυμα είναι πυκνά στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, άρα και στον $(C(\mathbb{T})), \|\cdot\|_1)$). Έστω $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ο βαθμός του p_ε. Για κάθε $|k| > n_0$ ισχύει

(5.3.0.87)
$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x) - p_\varepsilon(x))e^{-ikx}d\lambda(x) = \widehat{f - p_\varepsilon}(k)$$

διότι $\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = 0$. Συνεπώς,

(5.3.0.88)
$$|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f - p_\varepsilon}(k)| \leqslant \|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$$

για κάθε $|k| > n$. Έπεται το ζητούμενο.

$\boxed{+}$

Οι επόμενες προτάσεις δίνουν τους συντελεστές Fourier των συναρτήσεων που προκύπτουν αν ολοκληρώσουμε ή παραγωγίσουμε μια συνάρτηση.

Πρόταση 5.3.2. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και έστω F το αόριστο ολοκλήρωμα της f:*

$$F(x) = c + \int_0^x f(t)\,d\lambda(t), \qquad x \in \mathbb{T}. \tag{5.3.0.89}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = F(x) - \widehat{f}(0)x$. Τότε,

$$\widehat{G}(k) = \frac{\widehat{f}(k)}{ik} \tag{5.3.0.90}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. Παρατηρήστε αρχικά ότι

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,d\lambda(t) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\,d\lambda(t) = 2\pi\widehat{f}(0). \tag{5.3.0.91}$$

Άρα, αν $\widehat{f}(0) \neq 0$ τότε η F δεν είναι 2π-περιοδική. Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = F(x) - \widehat{f}(0)x$. Η G είναι 2π-περιοδική, απολύτως συνεχής, και $G'(x) = f(x) - \widehat{f}(0)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Για κάθε $k \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{G}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} G(t)e^{-ikt}d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{G(t)e^{-ikt}}{-ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi(ik)}\int_{\mathbb{T}} (f(t) - \widehat{f}(0))e^{-ikt}d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{(ik)}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

$\boxed{+}$

Παρατήρηση 5.3.3. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε*

$$\begin{aligned}2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = f(x)\,\frac{-e^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik}\int_{\mathbb{T}} f'(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{ik}\int_{\mathbb{T}} f'(x)e^{-ikx}d\lambda(x),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π-περιοδική,

$$f(x)\,\frac{-e^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f'(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{ik}\widehat{f'}(k) \tag{5.3.0.92}$$

για κάθε $k \neq 0$. Από την περιοδικότητα της f είναι φανερό ότι

$$2\pi\widehat{f'}(0) = \int_{\mathbb{T}} f'(x) = f(\pi) - f(-\pi) = 0. \tag{5.3.0.93}$$

Συνεπώς,

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.3.0.94}$$

Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k) \tag{5.3.0.95}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και επαγωγικά έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.3.4. *Έστω $f \in C^m(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε,*

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m\widehat{f}(k) \tag{5.3.0.96}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και

$$\lim_{|k|\to\infty} [k^m\widehat{f}(k)] = 0. \tag{5.3.0.97}$$

Ειδικότερα, υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{|k|^m}. \tag{5.3.0.98}$$

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.5, την οποία εφαρμόζουμε, διαδοχικά, m φορές. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από το λήμμα Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 5.3.1) το οποίο εφαρμόζουμε για την $f^{(m)}$. ⊣

Γενικότερα, η (5.3.0.94) ισχύει για τις απολύτως συνεχείς συναρτήσεις.

Πρόταση 5.3.5. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αν η f είναι απολύτως συνεχής, τότε*

$$\widehat{f'}(k) = (ik)\widehat{f}(k) \tag{5.3.0.99}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και $\lim_{|k|\to\infty} [k\widehat{f}(k)] = 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} f'(t)\,d\lambda(t) \tag{5.3.0.100}$$

διότι η f είναι απολύτως συνεχής. Κατόπιν, εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.3.2.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\widehat{f'}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$, το οποίο έπεται από το λήμμα Riemann-Lebesgue αφού $f' \in L_1(\mathbb{T})$. ⊣

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν τα μερικά αθροίσματα s_n της τριγωνομετρικής σειράς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{5.3.0.101}$$

συγκλίνουν σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ως προς την $\|\cdot\|_1$, τότε $c_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε k.

Πρόταση 5.3.6. *Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ μια τριγωνομετρική σειρά και έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αν $\|s_n - f\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$, τότε*

$$c_k = \widehat{f}(k) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}. \tag{5.3.0.102}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x) - s_n(x))e^{-ikx} d\lambda(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s_n(x)e^{-ikx} d\lambda(x). \tag{5.3.0.103}$$

Παρατηρούμε ότι, αν $n \geqslant |k|$ τότε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s_n(x)e^{-ikx} d\lambda(x) = c_k. \tag{5.3.0.104}$$

Άρα, για κάθε $n \geqslant |k|$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k) - c_k| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x) - s_n(x))e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x) - s_n(x)|\, d\lambda(x) = \|f - s_n\|_1 \to 0 \end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Έπεται ότι $c_k = \widehat{f}(k)$. $\boxed{+}$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.3.6 και το θεώρημα μοναδικότητας (Πόρισμα 5.2.11) μπορούμε να δώσουμε καταφατική απάντηση στο ερώτημα της σημειακής σύγκλισης της $s_n(f)$ στην f αν η f είναι συνεχής και η σειρά των συντελεστών Fourier της f συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 5.3.7. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty. \tag{5.3.0.105}$$

Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f. \tag{5.3.0.106}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$ βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

(5.3.0.107)
$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

είναι ομοιόμορφα βασική: πράγματι, για κάθε $m > n$ έχουμε

(5.3.0.108)
$$\|s_m(f) - s_n(f)\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{T}} |s_m(f)(x) - s_n(f,x)| \leqslant \sum_{n<|k|\leqslant m} |\widehat{f}(k)| \to 0$$

όταν $m, n \to \infty$. Συνεπώς, η $\{s_n(f)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Ειδικότερα,

(5.3.0.109)
$$\|s_n(f) - g\|_1 \leqslant \|s_n(f) - g\|_\infty \to 0,$$

οπότε η Πρόταση 5.3.6 μας εξασφαλίζει ότι

(5.3.0.110)
$$\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αφού οι συνεχείς συναρτήσεις f και g έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, από το Πόρισμα 5.2.11 συμπεραίνουμε ότι $g \equiv f$. Συνεπώς, $s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f$. □

Η υπόθεση $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$ εξασφαλίζεται, για παράδειγμα, αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 5.3.4, αφού υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

(5.3.0.111)
$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{|k|^2}.$$

Συνεπώς, έχουμε το εξής:

Πρόταση 5.3.8. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι η f'' είναι συνεχής. Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.* □

Παρατήρηση 5.3.9. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 5.3.7 είναι να δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ να συγκλίνει: αυτό εξασφαλίζει, όπως είδαμε, την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S(f)$ στην f. Είδαμε ότι αρκεί η συνέχεια της f''. Όπως θα δούμε αργότερα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ εξασφαλίζεται και με ασθενέστερες υποθέσεις για την f. Αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Ακόμα ασθενέστερη συνθήκη για την f είναι να ικανοποιεί συνθήκη Hölder τάξης $\alpha > 1/2$: δηλαδή, να υπάρχει $M > 0$ ώστε*

(5.3.0.112)
$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με κάποιες παρατηρήσεις για τους συντελεστές Fourier της συνέλιξης δύο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.3.10. *Έστω $f, g \in L_1(\mathbb{T})$. Αν $f * g$ είναι η συνέλιξη των f και g, η οποία ορίζεται μέσω της*

(5.3.0.113)
$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)\, d\lambda(t),$$

τότε

(5.3.0.114)
$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η $f * g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$, είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, και $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t)\, d\lambda(t) \right) e^{-ikx} d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-ikt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) e^{-k(x-t)} d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-ikt} \widehat{f}(k)\, d\lambda(t) \\
&= \widehat{f}(k) \widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

$\boxed{+}$

Πόρισμα 5.3.11. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αν $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N τότε η συνέλιξη $f * p$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από N, το οποίο δίνεται από την*

(5.3.0.115)
$$(f * p)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
(f * p)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) p(x-t)\, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik(x-t)}\, d\lambda(t) \\
&= \sum_{k=-N}^{N} c_k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt}\, d\lambda(t) \right) e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} c_k \widehat{f}(k) e^{ikx},
\end{aligned}$$

άρα η $f * g$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από N.

$\boxed{+}$

5.3.1 Μοναδικότητα σειρών Fourier

Είδαμε ότι αν μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier $\widehat{f}(k)$ ίσους με μηδέν, τότε $f \equiv 0$. Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με το ακόλουθο ισχυρότερο θεώρημα μοναδικότητας.

Θεώρημα 5.3.12. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in \mathbb{T}$ τότε $f(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f ορίζεται στο $[-\pi, \pi]$ και ότι $x_0 = 0$. (Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση: αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η $g(x) = f(x + x_0)$ είναι συνεχής στο 0 – υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.)

Θα υποθέσουμε ότι $f(0) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο (τελείως ανάλογα αποκλείουμε την περίπτωση $f(0) < 0$). Η ιδέα είναι να ορίσουμε κατάλληλη ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τα οποία παρουσιάζουν «κορυφή» στο σημείο 0 και από αυτή τους την ιδιότητα να συμπεράνουμε ότι

(5.3.1.1)
$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_m(\theta) f(\theta)\, d\theta = +\infty.$$

Αυτό είναι προφανώς άτοπο, αφού η υπόθεση ότι $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ δείχνει ότι όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ίσα με 0.

Αρχικά, εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας για την f στο σημείο 0, βρίσκουμε $0 < \delta < \pi/2$ ώστε $f(x) > f(0)/2$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.

Παρατηρούμε ότι $\text{συν}\, x \leqslant \text{συν}\, \delta < 1$ αν $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$. Συνεπώς, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

(5.3.1.2)
$$|\varepsilon + \text{συν}\, x| < 1 - \varepsilon/2$$

για κάθε $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$. Αρκεί να επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \frac{2(1-\text{συν}\,\delta)}{3}$. Τότε, αν $\varepsilon + \text{συν}\, x \geqslant 0$ έχουμε $|\varepsilon + \text{συν}\, x| = \varepsilon + \text{συν}\, x \leqslant \varepsilon + \text{συν}\, \delta < 1 - \varepsilon/2$ από την επιλογή του ε, ενώ αν $\varepsilon + \text{συν}\, x < 0$ έχουμε $|\varepsilon + \text{συν}\, x| = -\text{συν}\, x - \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon < 1 - \varepsilon/2$.

Ορίζουμε

(5.3.1.3)
$$p(x) = \varepsilon + \text{συν}\, x, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Τότε, $p(0) = 1 + \varepsilon$, συνεπώς υπάρχει $0 < \eta < \delta$ ώστε

(5.3.1.4)
$$p(x) \geqslant 1 + \varepsilon/2, \qquad x \in (-\eta, \eta).$$

Τώρα, για κάθε $m = 1, 2, \ldots$, ορίζουμε

(5.3.1.5)
$$p_m(x) = [p(x)]^m = (\varepsilon + \text{συν}\, x)^m.$$

Παρατηρήστε ότι κάθε p_m είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί). Αφού $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

(5.3.1.6)
$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x)\, d\lambda(x) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Γράφουμε

(5.3.1.7)
$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x)\, d\lambda(x) = \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} p_m(x) f(x)\, d\lambda(x) + \int_{\eta\leqslant|x|<\delta} p_m(x) f(x)\, d\lambda(x) + \int_{|x|<\eta} p_m(x) f(x)\, d\lambda(x),$$

και παρατηρούμε ότι:

1. Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε $|p_m(x)f(x)| \leqslant (1-\varepsilon/2)^m|f(x)| \leqslant |f(x)|$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $K_\delta := \{x : \delta \leqslant |x| \leqslant \pi\}$. Αφού $|p_m(x)f(x)| \leqslant (1-\varepsilon/2)^m|f(x)| \to 0$ σε κάθε $x \in K_\delta$ για το οποίο $|f(x)| < \infty$, έχουμε $p_m(x)f(x) \to 0$ σχεδόν παντού στο K_δ, και εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

(5.3.1.8) $$\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) \to 0$$

όταν $m \to \infty$.

2. Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

(5.3.1.9) $$\int_{\eta\leqslant|x|<\delta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) \geqslant 0$$

διότι $p(x) \geqslant 0$ και $f(x) \geqslant 0$ στο $\{x : \eta \leqslant |x| < \delta\}$.

3. Για το τρίτο ολοκλήρωμα ισχύει το κάτω φράγμα

(5.3.1.10) $$\int_{|x|<\eta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) \geqslant 2\eta\frac{f(0)}{2}(1+\varepsilon/2)^m.$$

Αφού

(5.3.1.11) $$\lim_{m\to\infty}(1+\varepsilon/2)^m = +\infty,$$

συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

(5.3.1.12) $$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) = +\infty.$$

Έτσι, οδηγούμαστε σε άτοπο στην περίπτωση που η f παίρνει πραγματικές τιμές.

Στη γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Αν θέσουμε $g(x) = \overline{f(x)}$, έχουμε

(5.3.1.13) $$u(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} \quad \text{και} \quad v(x) = \frac{f(x)-g(x)}{2i}.$$

Παρατηρούμε ότι

(5.3.1.14) $$\widehat{g}(k) = \overline{\widehat{f}(k)} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Έπεται ότι

(5.3.1.15) $$\widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k)+\widehat{g}(k)}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \widehat{v}(k) = \frac{\widehat{f}(k)-\widehat{g}(k)}{2i} = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Από τη συνέχεια των u και v στο x_0, από το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier των u και v μηδενίζονται και από το αποτέλεσμα στην πραγματική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Άρα, $f(x_0) = u(x_0) + iv(x_0) = 0$. □

5.4 Ο πυρήνας του Dirichlet

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι

$$\begin{aligned} s_n(f,x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}d\lambda(t)\right)e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)d\lambda(t), \end{aligned}$$

δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.4.1. *Ο n-οστός πυρήνας του Dirichlet είναι η συνάρτηση*

(5.4.0.16)
$$D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iky}, \quad n \geqslant 0.$$

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ο προηγούμενος υπολογισμός μας δίνει το εξής.

Λήμμα 5.4.2. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει*

(5.4.0.17)
$$s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D_n(x-t)\,d\lambda(t).$$

Παρατήρηση 5.4.3. *Θα χρησιμοποιούμε συχνά τις παρακάτω βασικές ιδιότητες του πυρήνα D_n.*

1. *Από τον Ορισμό 5.4.1 παίρνουμε: αν $0 < |y| \leqslant \pi$ τότε*

$$\begin{aligned} D_n(y) &= e^{-iny}\sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)y} = e^{-iny}\sum_{k=0}^{2n} e^{iky} \\ &= e^{-iny}\frac{e^{i(2n+1)y}-1}{e^{iy}-1} = \frac{e^{i(n+1)y}-e^{-iny}}{e^{iy}-1} \\ &= \frac{e^{iy/2}\left(e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)}{e^{iy/2}(e^{iy/2}-e^{-iy/2})} \\ &= \frac{\text{ημ}\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\text{ημ}\,\frac{y}{2}}. \end{aligned}$$

2. *Πάλι από τον ορισμό της D_n, και από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, έχουμε*

(5.4.0.18)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(y)\,d\lambda(y) = 1,$$

για κάθε n. Παρατηρήστε ότι η D_n είναι άρτια συνάρτηση. Άρα, μπορούμε επίσης να γράψουμε την προηγούμενη ισότητα στη μορφή

(5.4.0.19)
$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(y)\,d\lambda(y) = 1.$$

3. *Τα δύο βασικά άνω φράγματα για την $|D_n(y)|$ είναι:*

$$|D_n(y)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} |e^{iky}| = 2n+1 \tag{5.4.0.20}$$

με ισότητα όταν $y=0$, και

$$|D_n(y)| = \left| \frac{\text{ημ}\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\text{ημ}\,\frac{y}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\text{ημ}\,\frac{y}{2}} \leqslant \frac{\pi}{y}, \qquad 0<y<\pi, \tag{5.4.0.21}$$

η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι $\text{ημ}\,t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ για κάθε $t \in (0,\pi/2)$. Αφού η D_n είναι άρτια, συμπεραίνουμε ότι

$$|D_n(y)| \leqslant \frac{\pi}{|y|}, \qquad 0<|y|<\pi. \tag{5.4.0.22}$$

Ορισμός 5.4.4. *Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε*

$$D_n^*(y) = \frac{D_{n-1}(y)+D_n(y)}{2}, \qquad y \in \mathbb{T}. \tag{5.4.0.23}$$

Παρατηρήστε ότι

$$D_n^*(y) = \frac{1}{\text{ημ}\,\frac{y}{2}}\Big(\text{ημ}\,(n-\frac{1}{2})y + \text{ημ}\,(n+\frac{1}{2})y\Big) = \frac{\text{ημ}(ny)}{\text{εφ}\,\frac{y}{2}}. \tag{5.4.0.24}$$

Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $t \in \mathbb{T}$ θέτουμε

$$s_n^*(f,x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t) D_n^*(x-t)\,d\lambda(t). \tag{5.4.0.25}$$

Δεδομένου ότι

$$D_n(y) - D_n^*(y) = \frac{D_n(y)-D_{n-1}(y)}{2} = \frac{e^{iny}+e^{-iny}}{2} = \text{συν}(ny), \tag{5.4.0.26}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$s_n(f,x) = s_n^*(f,x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,\text{συν}\,n(x-t)\,d\lambda(t). \tag{5.4.0.27}$$

Λήμμα 5.4.5. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει*

$$s_n(f,x) - s_n^*(f,x) \to 0 \ \text{ καθώς το } n \to \infty. \tag{5.4.0.28}$$

Απόδειξη. Λόγω της (5.4.0.27) αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,\text{συν}\,n(x-t)\,d\lambda(t) &= \text{συν}(nx)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,\text{συν}(nt)\,d\lambda(t)\\ &\quad + \text{ημ}(nx)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,\text{ημ}(nt)\,d\lambda(t) \to 0,\end{aligned} \tag{5.4.0.29}$$

το οποίο ισχύει από το λήμμα Riemann-Lebesgue. $\boxed{+}$

Παρατήρηση 5.4.6. *Θεωρούμε την συνάρτηση*

(5.4.0.30)
$$\phi(y) = \frac{1}{\text{εφ}\,\frac{y}{2}} - \frac{2}{y}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\lim_{y\to 0}\phi(y)$ *υπάρχει, άρα* $\phi \in L_\infty(\mathbb{T})$*. Αν λοιπόν* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *τότε* $f\phi \in L_1(\mathbb{T})$*, και από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε*

(5.4.0.31)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\phi(x-t)\,\text{ημ}\,n(x-t)\,d\lambda(t) \to 0.$$

Έπεται ότι

(5.4.0.32)
$$s_n^*(f,x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\text{ημ}\,n(x-t)}{x-t}\,d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\phi(x-t)\,\text{ημ}\,n(x-t)\,d\lambda(t) \to 0.$$

Από το Λήμμα 5.4.5 καταλήγουμε στην

(5.4.0.33)
$$s_n(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\text{ημ}\,n(x-t)}{x-t}\,d\lambda(t) \to 0.$$

Παρατήρηση 5.4.7. *Αφού* $D_n^* = \frac{1}{2}(D_{n-1}+D_n)$*, οι βασικές ιδιότητες της* D_n^* *προκύπτουν άμεσα από αυτές της* D_n*. Έχουμε ότι η* D_n^* *είναι άρτια συνάρτηση, και*

(5.4.0.34)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n^*(y)\,d\lambda(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n^*(y)\,d\lambda(y) = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$*. Τα δύο βασικά άνω φράγματα για την* $|D_n^*(y)|$ *είναι:*

(5.4.0.35)
$$|D_n^*(y)| \leqslant \frac{1}{2}(|D_{n-1}(y)| + |D_n(y)|) \leqslant \frac{1}{2}\left((2n-1)+(2n+1)\right) = 2n$$

με ισότητα όταν $y=0$*, και*

(5.4.0.36)
$$|D_n^*(y)| \leqslant \frac{\pi}{|y|}, \qquad 0 < |y| < \pi.$$

5.5 Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν συνεχείς 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ που η σειρά Fourier τους αποκλίνει σε κάποιο σημείο. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη είναι έμμεση και χρησιμοποιεί την αρχή ομοιόμορφου φράγματος (θεώρημα Banach-Steinhaus) ενώ η δεύτερη είναι κατασκευαστική.

Ορισμός 5.5.1 (σταθερές Lebesgue). *Για κάθε* $n \geqslant 0$*, η* n*-οστή σταθερά Lebesgue* L_n *ορίζεται ως εξής:*

(5.5.0.37)
$$L_n = \|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(y)|\,d\lambda(y).$$

Στην επόμενη πρόταση υπολογίζουμε την τάξη μεγέθους της σταθεράς L_n για μεγάλες τιμές του n.

Πρόταση 5.5.2. *Ισχύει*

(5.5.0.38)
$$L_n \sim \frac{4lnn}{\pi^2}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Σημείωση. Ο συμβολισμός $a_n \sim b_n$ σημαίνει ότι η ακολουθία $\{a_n - b_n\}$ είναι φραγμένη: υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε $|a_n - b_n| \leqslant A$ για κάθε n. Ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε την ίδια ιδιότητα είναι να γράψουμε $a_n - b_n = O(1)$. Γράφοντας $a_n = b_n + o(1)$ εννοούμε ότι $a_n - b_n \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Απόδειξη. Αφού η D_n είναι άρτια και $\text{ημ}\,\frac{t}{2} > 0$ στο $(0, \pi)$, έχουμε

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\text{ημ}((n+1/2)t)| \left(\frac{1}{\text{ημ}\,\frac{t}{2}} - \frac{2}{t} \right) d\lambda(t) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\text{ημ}((n+1/2)t)| \,\frac{1}{t}\, d\lambda(t) = A_n + B_n. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι φραγμένος: αφού η $\phi(t) = \left(\frac{1}{\text{ημ}\,\frac{t}{2}} - \frac{2}{t} \right)$ είναι φραγμένη, έχουμε $A_n = O(1)$. Για τον δεύτερο όρο, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \left(n + \frac{1}{2}\right) t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi+\pi/2} |\,\text{ημ}\, s|\, \frac{d\lambda(s)}{s} = \frac{2}{\pi} \int_\pi^{n\pi} |\,\text{ημ}\, s|\, \frac{d\lambda(s)}{s} + O(1) \\ &= C_n + O(1), \end{aligned}$$

αφού, λόγω της $\lim\limits_{s\to 0^+} \frac{\text{ημ}\, s}{s} = 1$, έχουμε

(5.5.0.39)
$$\int_0^\pi \frac{\text{ημ}\, s}{s}\, d\lambda(s) = O(1) \quad \text{και} \quad \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2} \frac{|\,\text{ημ}\, s|}{s}\, d\lambda(s) \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι

(5.5.0.40)
$$C_n := \frac{2}{\pi} \int_\pi^{n\pi} |\,\text{ημ}\, s|\, \frac{d\lambda(s)}{s} = \frac{4}{\pi^2} lnn + O(1).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\,\text{ημ}\, s|}{s}\, d\lambda(s) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\,\text{ημ}(k\pi + t)|}{k\pi + t}\, d\lambda(t) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\text{ημ}\, t) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi + t}\, d\lambda(t). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in (0, \pi)$,

(5.5.0.41)
$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leqslant \frac{1}{k\pi + t} \leqslant \frac{1}{k\pi},$$

άρα

(5.5.0.42)
$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+t} \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Τα δύο αθροίσματα $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}$ και $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ είναι $lnn + O(1)$. Αφού $\int_0^{\pi} \text{ημ}\, t\, d\lambda(t) = 2$, καταλήγουμε στην

(5.5.0.43)
$$C_n = \frac{4}{\pi^2} lnn + O(1)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

$\boxed{+}$

Πόρισμα 5.5.3. *Για κάθε $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ και $n \geqslant 2$ ισχύει*

(5.5.0.44)
$$|s_n(f,x)| \leqslant C(lnn)\,\|f\|_\infty,$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} |s_n(f,x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|\,|D_n(t)|\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \|f\|_\infty |D_n(t)|\,d\lambda(t) \\ &= \|D_n\|_1 \|f\|_\infty \leqslant C\cdot lnn\,\|f\|_\infty \end{aligned}$$

διότι $\|D_n\|_1 = L_n \leqslant C\cdot lnn$ από την Πρόταση 5.5.2.

$\boxed{+}$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ για την οποία η ακολουθία $s_n(f,0)$ δεν είναι φραγμένη (άρα, δεν συγκλίνει). Η επόμενη πρόταση συνδέει το πρόβλημα με την συμπεριφορά της ακολουθίας (L_n).

Πρόταση 5.5.4. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$*

(5.5.0.45)
$$\sup_{f\in C(\mathbb{T}),\|f\|_\infty\leqslant 1} |s_n(f,0)| = L_n.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{T}$ και

(5.5.0.46)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)|\,d\lambda(x) < \delta.$$

Η συνάρτηση $g(x) = \text{sign}\, D_n(x)$, όπου $\text{sign}\, u$ είναι το πρόσημο του u και $\text{sign}\, 0 = 0$, είναι Riemann ολοκληρώσιμη (έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, όσα είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει πρόσημο η D_n) και $\|g\|_\infty = 1$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ώστε $\|f\|_\infty \leqslant 1$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \text{sign}\, D_n(x)|\, d\lambda(x) < \frac{\varepsilon}{2n+1}. \tag{5.5.0.47}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} |s_n(f,0)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(y) D_n(-y)\, d\lambda(y) \right| \\ &\geqslant \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \text{sign}\, D_n(y) D_n(-y)\, d\lambda(y) \right| - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y) - g(y)||D_n(-y)|\, d\lambda(y) \\ &\geqslant \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \text{sign}\, D_n(y) D_n(y)\, d\lambda(y) \right| - \frac{\varepsilon \|D_n\|_\infty}{2n+1} \\ &\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(y)|\, d\lambda(y) - \varepsilon, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η D_n, άρα και η $\text{sign}\, D_n$, είναι άρτια, καθώς και την $\|D_n\|_\infty = 2n+1$. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $|s_n(f,0)| \geqslant L_n - \varepsilon$.

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$ έχουμε

$$|s_n(f,0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\, |D_n(y)|\, dy \leqslant \|D_n\|_1 \|f\|_\infty \leqslant L_n, \tag{5.5.0.48}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\boxed{+}$

Από την Πρόταση 5.5.4 και την Πρόταση 5.5.2, για κάθε n υπάρχει $f_n \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$|s_n(f_n, 0)| \sim L_n \sim \frac{4}{\pi^2} lnn. \tag{5.5.0.49}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει *μία* $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$\sup_n |s_n(f,0)| = +\infty. \tag{5.5.0.50}$$

Ειδικότερα, η f έχει σειρά Fourier η οποία αποκλίνει στο σημείο 0. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus. Για λόγους πληρότητας δίνουμε την (σχετικά απλή) απόδειξή του, η οποία βασίζεται στο θεώρημα Baire.

Πρόταση 5.5.5. *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$\sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

(5.5.0.51) $$A_m = \{x \in X : \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant m\}.$$

Κάθε A_m είναι κλειστό υποσύνολο του X: αυτό φαίνεται αμέσως αν γράψουμε

$$A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X : |f_n(x)| \leqslant m\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-m, m])$$

και θυμηθούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η αντίστροφη εικόνα του $[-m, m]$ μέσω της f_n είναι κλειστό υποσύνολο του X και ότι η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύολο.

Παρατηρήστε ότι $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \in X$. Από την υπόθεση, η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M_x > 0$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant M_x$. Υπάρχει $m = m(x) \in \mathbb{N}$ με $m \geqslant M_x$. Τότε, $x \in A_m$.

Ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το θεώρημα Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο A_{m_0} έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στην $B(x_0, r)$: για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant m_0$. $\boxed{+}$

Ορισμός 5.5.6. *Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής (γραμμική απεικόνιση). Λέμε ότι ο T είναι φραγμένος αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε*

$$\|Tx\|_Y \leqslant M\,\|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$.

Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μια ακολουθία $\{T_n\}$ φραγμένων γραμμικών τελεστών $T_n : X \to Y$ για τους οποίους ισχύει

$$\sup_n \|T_n(x)\|_Y < \infty$$

για κάθε $x \in X$. Αν ο X είναι πλήρης, η γραμμικότητα των T_n και η απλή ιδέα της απόδειξης της Πρότασης 5.5.5 μας δίνουν ότι οι T_n είναι ομοιόμορφα φραγμένοι. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής:

Θεώρημα 5.5.7 (αρχή ομοιόμορφου φράγματος, Banach-Steinhaus)**.** *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και έστω $\{T_n\}$ μια ακολουθία από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

(5.5.0.52) $$\sup_n \|Tx\|_Y < +\infty.$$

Τότε, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$,

(5.5.0.53) $$\|Tx\|_Y \leqslant M\,\|x\|_X.$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \|T(x)\|_Y$. Κάθε f_n είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι ο T_n είναι φραγμένος, άρα υπάρχει $M_n > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n(x)\|_Y \leqslant M_n\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Αν $x, y \in X$, τότε

(5.5.0.54) $$|f_n(x) - f_n(y)| = |\,\|T_n(x)\|_Y - \|T_n(y)\|_Y\,| \leqslant \|T_n(x) - T_n(y)\|_Y = \|T_n(x-y)\|_Y \leqslant M_n\|x-y\|_X.$$

Από την υπόθεσή μας, για κάθε $x \in X$ ισχύει

(5.5.0.55) $$\sup_n |f_n(x)| = \sup_n \|T_n(x)\|_Y < +\infty.$$

Από την Πρόταση 5.5.5 υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

(5.5.0.56) $$|f_n(x)| = \|T_n(x)\|_Y \leqslant M_1.$$

Έστω $x \in X$ με $\|x\|_X \leqslant 1$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|T(x_0 + (r/2)x)\|_Y \leqslant M_1$ και $\|T(x_0)\|_Y \leqslant M_1$ (γιατί $x_0, x_0 + (r/2)x \in B(x_0, r)$). Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|T_n(x)\|_Y &= \frac{2}{r}\|T_n((r/2)x)\|_Y = \frac{2}{r}\|T_n(x_0 + (r/2)x) - T_n(x_0)\|_Y \\ &\leqslant \frac{2}{r}\left(\|T_n(x_0 + (r/2)x)\|_Y + \|T_n(x_0)\|_Y\right) \leqslant \frac{4M_1}{r}.\end{aligned}$$

Τώρα, για κάθε $x \neq 0$ θέτουμε $x_1 = x/\|x\|_X$ και παρατηρούμε ότι $\|x_1\|_X = 1$, άρα

(5.5.0.57) $$\|T_n(x)\|_Y = \|T_n(\|x\|_X x_1)\|_X = \|x\|_X \|T_n(x_1)\|_Y \leqslant \frac{4M_1}{r}\|x\|_X$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε το ζητούμενο έπεται με $M = 4M_1/r$.

$\boxed{+}$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus για τους γραμμικούς τελεστές $f \mapsto s_n(f, 0)$, $f \in C(\mathbb{T})$.

Θεώρημα 5.5.8. *Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε*

(5.5.0.58) $$\sup_n |s_n(f, 0)| = +\infty.$$

Απόδειξη. Για κάθε n θεωρούμε τον τελεστή $T_n : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ με

(5.5.0.59) $$T_n(f) = s_n(f, 0).$$

Κάθε T_n είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

(5.5.0.60) $$\|T_n\| = \sup\{|s_n(f, 0)| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1\} = L_n.$$

Ας υποθέσουμε ότι, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ ισχύει

(5.5.0.61) $$\sup_n |T_n(f)| = \sup_n |s_n(f, 0)| < \infty.$$

Από το θεώρημα Banach-Steinhaus υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|s_n(f, 0)| = |T_n(f)| \leqslant M$$

για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Από την Πρόταση 5.5.4 παίρνουμε

(5.5.0.62) $$L_n = \sup_{f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1} |s_n(f, 0)| \leqslant M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η (L_n) είναι φραγμένη, το οποίο είναι άτοπο από την Πρόταση 5.5.2.

Συνεπώς, υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\limsup_n |s_n(f, 0)| = +\infty$. Ειδικότερα, η σειρά Fourier της f αποκλίνει στο σημείο 0.

$\boxed{+}$

5.5.1 Μια κατασκευή του Lebesgue

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια κατασκευαστική απόδειξη της ύπαρξης συνεχούς $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ για την οποία

(5.5.1.1) $$\limsup_{n\to\infty} |s_n(f,0)| = \infty.$$

Το επιχείρημα οφείλεται στον Lebesgue. Στην Παρατήρηση 5.4.6 είδαμε ότι, για κάθε $f \in L_1(\mathbb{T})$ και για κάθε $t \in \mathbb{T}$,

(5.5.1.2) $$s_n(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\text{ημ}\, n(x-t)}{x-t}\, d\lambda(t) \to 0.$$

Θα ορίσουμε μια άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, θέτοντας

(5.5.1.3) $$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \text{ημ}(n_k t)\chi_{I_k}(t), \qquad 0 < t < \pi,$$

όπου $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών που θα επιλεγεί κατάλληλα, χ_{I_k} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $I_k = \left(\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}\right]$, και $\{c_k\}$ είναι μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών που θα επιλεγεί κατάλληλα. Παρατηρήστε ότι αν ο n_k είναι πολλαπλάσιο του n_{k-1} τότε η f θα είναι συνεχής (και ίση με 0) σε όλα τα σημεία π/n_k και ότι η υπόθεση $c_k \to 0$ εξασφαλίζει ότι η f είναι συνεχής στο 0 αν θέσουμε $f(0) = 0$. Κατόπιν, επεκτείνουμε την f στο $[-\pi, 0)$ ώστε να γίνει άρτια συνάρτηση, και τέλος, την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Επειδή τα διαστήματα I_k έχουν ξένους φορείς, αυτό που περιμένουμε από την (5.5.1.2) είναι ότι, αν επιλέξουμε κατάλληλα τις παραμέτρους, ο βασικός όρος στο μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f,0)$ θα είναι ο k-οστός, δηλαδή ο $c_k\, \text{ημ}(n_k t)\chi_{I_k}(t)$.

Αρχικά ορίζουμε $c_1 = 1$, $n_1 = 2$ και $I_1 = (\pi/2, \pi]$. Στο I_1 έχουμε

(5.5.1.4) $$f(t) = c_1\, \text{ημ}(n_1 t).$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$, τους $c_1, \dots, c_{k-1}$, και τα διαστήματα I_j, $j = 1, \dots, k-1$. Ορίζουμε

(5.5.1.5) $$\phi(t) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j\, \text{ημ}(n_j t)\chi_{I_j}(t) \quad \text{αν } t \in (\pi/n_{k-1}, \pi]$$

και $\phi(t) = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε ότι η $t \mapsto \phi(t)/t$ είναι φραγμένη: πράγματι, η ϕ μηδενίζεται στο $[0, \pi/n_{k-1}]$, άρα

(5.5.1.6) $$|\phi(t)| \leqslant c_1 \leqslant \frac{c_1 n_{k-1}}{\pi} t.$$

Από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε

(5.5.1.7) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\, \text{ημ}(nt)\, d\lambda(t) = 0.$$

Ορίζουμε $n_k = n_{k-1}N_k$, όπου ο $N_k \geqslant 2^k$ είναι αρκετά μεγάλος ώστε να ισχύει

(5.5.1.8) $$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\, \text{ημ}(n_k t)\, d\lambda(t)\right| < 1.$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $I_k = (\pi/n_k, \pi/n_{k-1}]$ και ορίζουμε $f(t) = c_k\, \eta\mu(n_k t)$ στο I_k, όπου $0 < c_k < c_{k-1} < 1$ τον οποίο θα επιλέξουμε. Για να εκτιμήσουμε το μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f,0)$ αρκεί, από την (5.5.1.2), να εκτιμήσουμε το

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\eta\mu(n_k t)\frac{d\lambda(t)}{t} = \frac{2}{\pi}\left(\int_{(0,\pi/n_k]} + \int_{(\pi/n_k,\pi/n_{k-1}]} + \int_{(\pi/n_{k-1},\pi]}\right)$$
$$=: A_k + B_k + C_k.$$

Από την (5.5.1.8) βλέπουμε ότι $C_k = O(1)$: στο $(\pi/n_{k-1},\pi]$ έχουμε $f(t) = \phi(t)$, άρα

$$\left|\int_0^{\pi} f(t)\,\eta\mu(n_k t)\frac{d\lambda(t)}{t}\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\,\eta\mu(n_k t)\,d\lambda(t)\right| < \frac{\pi}{2}. \tag{5.5.1.9}$$

Επίσης, ανεξάρτητα από τον τρόπο επιλογής των c_k, από την $\eta\mu\, y \leqslant y$ στο $(0,\pi)$ και την $0 < c_k \leqslant 1$ έχουμε

$$|A_k| \leqslant \int_{(0,\pi/n_k]} |\,\eta\mu(n_k t)|\frac{d\lambda(t)}{t} \leqslant n_k\frac{\pi}{n_k} = \pi. \tag{5.5.1.10}$$

Τέλος,

$$B_k = c_k\int_{I_k} (\eta\mu\, n_k t)^2\frac{d\lambda(t)}{t} = c_k\int_{I_k}\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2n_k t)}{2t}\,d\lambda(t)$$
$$= \frac{c_k}{2}\int_{I_k}\frac{d\lambda(t)}{t} - \frac{c_k}{2}\int_{I_k}\sigma\upsilon\nu(2n_k t)\frac{d\lambda(t)}{t}$$
$$=: B_k' - B_k''.$$

Για τον B_k' έχουμε

$$B_k' = \frac{c_k}{2}\int_{I_k}\frac{d\lambda(t)}{t} = \frac{c_k}{2}ln\left(\frac{n_k}{n_{k-1}}\right) = \frac{c_k}{2}(lnN_k). \tag{5.5.1.11}$$

Επιλέγοντας $c_k = (lnN_k)^{-\epsilon}$, όπου $0 < \epsilon < 1$, έχουμε $c_k \to 0$ και

$$B_k' = \frac{1}{2}(lnN_k)^{1-\epsilon} \to \infty \tag{5.5.1.12}$$

καθώς το $k \to \infty$. Το ολοκλήρωμα στον όρο B_k'' ισούται με

$$\int_{I_k}\sigma\upsilon\nu(2n_k t)\frac{d\lambda(t)}{t} = \frac{\eta\mu(2n_k t)}{2n_k t}\Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} + \int_{I_k}\frac{\eta\mu(2n_k t)}{2n_k}\,\frac{d\lambda(t)}{t^2}. \tag{5.5.1.13}$$

Από την επιλογή των n_k έχουμε ότι

$$\frac{\eta\mu(2n_k t)}{2n_k t}\Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} = \frac{\eta\mu(2\pi)}{2\pi} - \frac{\eta\mu(2\pi N_k)}{2\pi N_k} = 0. \tag{5.5.1.14}$$

Επίσης,

$$\left|\int_{I_k}\frac{\eta\mu(2n_k t)}{2n_k}\,\frac{d\lambda(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n_k}\int_{\pi/n_k}^{\infty}\frac{d\lambda(t)}{t^2} = \frac{1}{2n_k}\,\frac{n_k}{\pi} = \frac{1}{2\pi} = O(1). \tag{5.5.1.15}$$

Συγκεντρώνοντας όλες τις εκτιμήσεις μας, βλέπουμε ότι

$$s_{n_k}(f,0) = \frac{1}{2}(lnN_k)^{1-\epsilon} + O(1), \tag{5.5.1.16}$$

απ' όπου έπεται ότι $s_{n_k}(f,0) \to \infty$.

5.6 Θεώρημα Dini και θεώρημα Marcinkiewicz

Το θεώρημα Dini μας δίνει μια ικανή συνθήκη για την σύγκλιση της σειράς Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε δεδομένο σημείο.

Θεώρημα 5.6.1 (Dini). *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και έστω $x \in \mathbb{T}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha \in \mathbb{C}$ ώστε*

(5.6.0.17)
$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha \right| \frac{d\lambda(t)}{t} < \infty.$$

Τότε,

(5.6.0.18)
$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = \alpha.$$

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 5.4.5 αρκεί να δείξουμε ότι

(5.6.0.19)
$$s_n^*(f,x) - \alpha \to 0.$$

Αφού

(5.6.0.20)
$$\begin{aligned} s_n^*(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)\frac{\text{ημ}(nt)}{\text{εφ}\,\frac{t}{2}}\,d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\text{ημ}(nt)}{\text{εφ}\,\frac{t}{2}}\,d\lambda(t) \end{aligned}$$

και

(5.6.0.21)
$$\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \alpha D_n^*(t)\,d\lambda(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \alpha\frac{\text{ημ}(nt)}{\text{εφ}\,\frac{t}{2}}\,d\lambda(t),$$

έχουμε

(5.6.0.22)
$$s_n^*(f,x) - \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\frac{\text{ημ}(nt)}{\text{εφ}\,\frac{t}{2}}\,d\lambda(t).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

(5.6.0.23)
$$F_x(t) := \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\frac{1}{\text{εφ}\,\frac{t}{2}}$$

γράφεται στη μορφή

(5.6.0.24)
$$\begin{aligned} F_t(x) = A_t(x) + B_t(x) &:= \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\frac{1}{t} \\ &+ \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\phi(t), \end{aligned}$$

όπου $\phi(t) = \frac{1}{\text{εφ}\,\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$. Έχουμε δει ότι $\phi \in L_\infty$, άρα η B_x είναι ολοκληρώσιμη (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση, η A_x είναι επίσης ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, $F_x \in L_1$ και έπεται ότι

(5.6.0.25)
$$s_n^*(f,x) - \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_x(t)\,\text{ημ}(nt)\,d\lambda(t) \to 0$$

από το λήμμα Riemann-Lebesgue. $\boxplus$

Παρατηρήσεις 5.6.2. *(α) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

(5.6.0.26)
$$f(x+0)=\lim_{t\to x^+}f(t) \quad \text{και} \quad f(x-0)=\lim_{t\to x^-}f(t).$$

Αν η (5.6.0.17) ικανοποιείται για κάποιον α, τότε έχουμε αναγκαστικά

(5.6.0.27)
$$\alpha=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Πράγματι, αν είχαμε $\left|\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}-\alpha\right|=r>0$, τότε θα υπήρχε $\delta\in(0,\pi)$ ώστε: αν $0<t<\delta$ τότε

(5.6.0.28)
$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\alpha\right|\geqslant\frac{r}{2}.$$

Όμως τότε θα είχαμε

(5.6.0.29)
$$\int_0^\delta\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\alpha\right|\frac{d\lambda(t)}{t}\geqslant\int_0^\delta\frac{r}{2t}\,d\lambda(t)=\infty,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο x και αν ικανοποιείται η (5.6.0.17) τότε έχουμε αναγκαστικά $\alpha=f(x)$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x. Τότε, η συνάρτηση

(5.6.0.30)
$$t\mapsto\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

είναι φραγμένη σε μια περιοχή του 0. Άρα, υπάρχουν $\delta\in(0,\pi)$ και $M>0$ ώστε: αν $0<|t|<\delta$ τότε $|f(x+t)-f(x)|\leqslant M|t|$. Δηλαδή, για κάθε $0<t<\delta$,

(5.6.0.31)
$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{2}\big[|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|\big]\leqslant Mt.$$

Συνεπώς,

(5.6.0.32)
$$\int_0^\delta\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|\frac{d\lambda(t)}{t}\leqslant\int_0^\delta Mt\,\frac{d\lambda(t)}{t}=M\delta<\infty,$$

και

(5.6.0.33)
$$\int_\delta^\pi\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|\frac{d\lambda(t)}{t}$$
$$\leqslant\frac{1}{\delta}\int_0^\pi\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|d\lambda(t)<\infty$$

(εξηγήστε γιατί), άρα η (5.6.0.17) ικανοποιείται με $\alpha=f(x)$. Έτσι έχουμε το εξής:

Θεώρημα 5.6.3. *Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$ και έστω $x\in\mathbb{T}$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε,*

(5.6.0.34)
$$\lim_{n\to\infty}s_n(f,x)=f(x).$$

Μια σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος 5.6.3 είναι η *αρχή τοπικότητας του Riemann*: η σύγκλιση ή μη της ακολουθίας $s_n(f,x)$ εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά της f *σε μια περιοχή του* x. Αυτό δεν είναι καθόλου προφανές αν σκεφτούμε ότι τα μερικά αθροίσματα $s_n(f,x)$ ορίζονται μέσω των συντελεστών Fourier $\widehat{f}(k)$, $|k|\leq n$, της f και οι συντελεστές Fourier προκύπτουν με ολοκλήρωση στο $[-\pi,\pi]$, δηλαδή παίρνουν υπόψη τις τιμές της f σε *ολόκληρο το* $[-\pi,\pi]$.

Θεώρημα 5.6.4. *Έστω $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x\in\mathbb{T}$ και για κάποιο ανοικτό διάστημα $I\subset\mathbb{T}$ ώστε $x\in I$, ισχύει*

(5.6.0.35) $$f(t)=g(t)\qquad \text{για κάθε}\ \ t\in I.$$

Τότε,

(5.6.0.36) $$s_n(f,x)-s_n(g,x)\to 0.$$

Ειδικότερα, η $\{s_n(f,x)\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\{s_n(g,x)\}$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $h=f-g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$. Η h είναι ολοκληρώσιμη και $h(t)=0$ για κάθε $t\in I$. Αφού το x είναι εσωτερικό σημείο του I, η h είναι παραγωγίσιμη στο x, με $h'(x)=0$.

Από το Θεώρημα 5.6.3 βλέπουμε ότι

(5.6.0.37) $$s_n(h,x)\to h(x)=0.$$

Όμως,

(5.6.0.38) $$s_n(h,x)=s_n(f-g,x)=s_n(f,x)-s_n(g,x).$$

Έπεται το ζητούμενο. $\boxed{+}$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ένα απλό κριτήριο που εξασφαλίζει ότι $s_n(f,x)\to f(x)$ σχεδόν παντού.

Θεώρημα 5.6.5 (Marcinkiewicz). *Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$. Για καθε $t\in\mathbb{T}$ ορίζουμε*

(5.6.0.39) $$w_1(f,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x+t)-f(x)|\,d\lambda(x).$$

Αν

(5.6.0.40) $$\int_0^{\pi} w_1(f,t)\frac{d\lambda(t)}{t}<\infty,$$

τότε $s_n(f,x)\to f(x)$ σχεδόν παντου στο $\mathbb{T}$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_0^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,\frac{d\lambda(t)}{t}\right)d\lambda(x) &= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x+t)-f(x)|\,d\lambda(x)\right)\frac{d\lambda(t)}{t}\\ &= \int_0^{\pi} w_1(f,t)\,\frac{d\lambda(t)}{t}<\infty.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \, \frac{d\lambda(t)}{t} < \infty \tag{5.6.0.41}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} w_1(f,-t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-t) - f(x)| \, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}-t} |f(s) - f(s+x)| \, d\lambda(s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}-t} |f(s+t) - f(s)| \, d\lambda(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(s+t) - f(s)| \, d\lambda(s) \\ &= w_1(f,t). \end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας τον αρχικό υπολογισμό βλέπουμε τώρα ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_0^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \, \frac{d\lambda(t)}{t} \right) d\lambda(x) = \int_0^{\pi} w_1(f,-t) \, \frac{d\lambda(t)}{t} < \infty, \tag{5.6.0.42}$$

άρα

$$\int_0^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \, \frac{d\lambda(t)}{t} < \infty \tag{5.6.0.43}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Τώρα,

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right| \frac{d\lambda(t)}{t} < \infty \tag{5.6.0.44}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$, και από το θεώρημα Dini έπεται ότι $s_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$. $\boxed{+}$