ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Μέτρο Lebesgue

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

1 Μέτρο Lebesgue

1.1 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Θα θέλαμε να ορίσουμε το «μήκος» κάθε υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$, δηλαδή να αντιστοιχίσουμε σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έναν μη αρνητικό αριθμό $\lambda(A)$ (ή το $+\infty$). Είναι λογικό να ζητήσουμε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\lambda([a,b]) = b - a$ για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$.

(β) Αναλλοίωτο ως προς μεταφορές: $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Αριθμήσιμη προσθετικότητα: Αν (A_n) είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n). \tag{1.1.0.1}$$

Όπως θα δούμε, η τελευταία ιδιότητα δημιουργεί προβλήματα. Η κατασκευή που παρουσιάζουμε οφείλεται στον Vitali και βασίζεται στο «αξίωμα της επιλογής» από την Θεωρία Συνόλων, το οποίο αποδεχόμαστε.

Αξίωμα της Επιλογής: Έστω $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ μια μη κενή οικογένεια ξένων, μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου Ω. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο E που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο x_a από κάθε σύνολο X_a. Δηλαδή, υπάρχει **συνάρτηση επιλογής** $f : A \to \Omega$ με $f(a) \in X_a$ για κάθε $a \in A$.

Σημείωση. Το Αξίωμα της Επιλογής, αν και φαίνεται «αθώο», αποδεικνύεται ανεξάρτητο από τα αξιώματα (Zermelo-Fraenkel) της Θεωρίας Συνόλων.

Θεώρημα 1.1.1. *Δεν υπάρχει συνάρτηση $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ η οποία να ικανοποιεί τα (α)–(γ).*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση λ. Παρατηρήστε ότι η λ είναι μονότονη: αν $A \subseteq B$, λόγω της (γ) έχουμε

$$\lambda(B) = \lambda(A \cup (B \setminus A)) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A) \geqslant \lambda(A). \tag{1.1.0.2}$$

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0,1]$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}. \tag{1.1.0.3}$$

Παρατηρήστε ότι, αναγκαστικά, $x - y \in [-1, 1]$. Η $\sim$ χωρίζει το $[0,1]$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in [0,1] : y = x + q \text{ για κάποιον } q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}\}. \tag{1.1.0.4}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $N = \{y_a : a \in A\} \subset [0,1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο N τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$N_n := N + q_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.0.5}$$

Τα σύνολα N_n ικανοποιούν τα εξής:

1. $N_n \subseteq [-1, 2]$. Αυτό είναι απλό, αφού $N \subset [0, 1]$ και $-1 \leqslant q_n \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $N_n = N + q_n \subset [-1, 2]$ για κάθε n.

2. Αν $n \neq m$ τότε $N_n \cap N_m = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in N$ ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, δηλαδή θα είχαμε δύο στοιχεία y_a, y_b του N τα οποία θα ήταν ισοδύναμα (ως προς την $\sim$) και αυτό είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του N.

3. $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. Πράγματι, αν $x \in [0, 1]$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in N_n$.

Αφού η λ ικανοποιεί το (β), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda(N_n) = \lambda(N)$. Από τις ιδιότητες των N_n και από τη μονοτονία και την αριθμήσιμη προσθετικότητα της λ, παίρνουμε

(1.1.0.6)
$$1 = \lambda([0, 1]) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(N) \leqslant 3,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με 0 (αν $\lambda(N) = 0$) ή με $+\infty$ (αν $\lambda(N) > 0$). □

Σημείωση. Ακόμα κι αν ζητήσουμε την προσθετικότητα μόνο για ενώσεις πεπερασμένων το πλήθος ξένων ανά δύο συνόλων, αποδεικνύεται (αν δεχτούμε το Αξίωμα της Επιλογής) ότι *δεν* υπάρχει τρόπος να ορίσουμε το «μήκος» έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο πρώτες ιδιότητες και η

(1.1.0.7)
$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

για όλα τα $A, B \subset \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$.

Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής: αντί να περιορίσουμε τις απαιτήσεις μας, θα περιοριστούμε σε μια κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ στην οποία μπορεί να οριστεί το μήκος λ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (α), (β) και (γ). Αυτά θα είναι τα «μετρήσιμα» σύνολα. Το ευτύχημα είναι ότι η κλάση αυτή είναι αρκετά μεγάλη.

1.1.1 Ορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

Σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ θα αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό $\lambda^*(A) \geqslant 0$ ή $+\infty$, το **εξωτερικό μέτρο** του A.

Έστω $I = (a, b)$ ένα φραγμένο ανοικτό διάστημα. Το μήκος του I συμβολίζεται με

(1.1.1.1)
$$\ell(I) := b - a.$$

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και (I_n) είναι μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία φραγμένων ανοικτών διαστημάτων με την ιδιότητα $A \subseteq \bigcup_n I_n$, λέμε ότι η (I_n) είναι μια **κάλυψη** του A. Αν η (I_n) είναι κάλυψη του A, το άθροισμα $\sum_n \ell(I_n)$ δίνει μια «από πάνω» εκτίμηση για το «μέτρο» του A. Είναι δηλαδή λογικό να ζητήσουμε

(1.1.1.2)
$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_n \ell(I_n)$$

για όλες τις καλύψεις του A. Έτσι, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.1.2 (εξωτερικό μέτρο Lebesgue). *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το* **εξωτερικό μέτρο** *του A είναι το*

$$\lambda^*(A) = \inf\Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } A\Big\}. \tag{1.1.1.3}$$

Παρατηρήσεις 1.1.3. *(α) Μπορούμε, αν ορίσουμε $\ell(\emptyset) = 0$ και αν θεωρήσουμε το κενό σύνολο ως «διάστημα» με μηδενικό μήκος, να θεωρούμε ότι οι καλύψεις στον ορισμό είναι πάντα άπειρες αριθμήσιμες. Αν (I_n) είναι μια κάλυψη του A από πεπερασμένα το πλήθος (γνήσια) φραγμένα ανοικτά διαστήματα, την επεκτείνουμε σε «άπειρη» κάλυψη παίρνοντας επιπλέον το κενό σύνολο άπειρες φορές. Για το λόγο αυτό θα γράφουμε συνήθως $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ για τις καλύψεις συνόλων, $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$ για τις εκτιμήσεις των εξωτερικών μέτρων, και ο ορισμός μας γίνεται*

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n \text{ ανοικτό διάστημα ή } \emptyset \right\}. \tag{1.1.1.4}$$

(β) Συμφωνούμε ότι $\inf\{+\infty\} = +\infty$. Άρα, αν συμβεί να έχουμε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = +\infty, \tag{1.1.1.5}$$

τότε $\lambda^*(A) = +\infty$.

(γ) Με την παραπάνω σύμβαση, το εξωτερικό μέτρο ορίζεται καλά για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και είναι μη αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Πράγματι, κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δέχεται τουλάχιστον μία κάλυψη, την $I_n = (-n, n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

1.1.2 Ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

Οι επόμενες Προτάσεις περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue.

Πρόταση 1.1.4. *Αν $A \subseteq B$, τότε $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$.*

Απόδειξη. Αν $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Άρα,

$$\Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } A\Big\} \supseteq \Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } B\Big\}, \tag{1.1.2.1}$$

απ' όπου έπεται ότι $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$. □

Πρόταση 1.1.5. *Αν το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, τότε $\lambda^*(A) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε την ακολουθία ανοικτών διαστημάτων

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \ ,\ x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right). \tag{1.1.2.2}$$

Τότε, $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n \ell(I_n) = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \tag{1.1.2.3}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lambda^*(A) = 0$. □

Πρόταση 1.1.6. *$\lambda^*(A+x)=\lambda^*(A)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αν $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, τότε $A+x\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$, όπου $J_n=I_n+x$. Παρατηρήστε ότι $\ell(I+x)=\ell(I)=b-a$ για κάθε ανοικτό διάστημα $I=(a,b)$. Συνεπώς,

(1.1.2.4)
$$\lambda^*(A+x)\leqslant\sum_n\ell(J_n)=\sum_n\ell(I_n).$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις (I_n) του A, συμπεραίνουμε ότι

(1.1.2.5)
$$\lambda^*(A+x)\leqslant\lambda^*(A).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι $A=(A+x)-x$, οπότε εφαρμόζοντας την (1.1.2.5) (με το $A+x$ στην θέση του A και το $-x$ στην θέση του x) έχουμε $\lambda^*(A)=\lambda^*((A+x)-x)\leqslant\lambda^*(A+x)$. □

Πρόταση 1.1.7. *Για κάθε $a<b$ στο $\mathbb{R}$ ισχύει $\lambda^*([a,b])=b-a$.*

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon>0$ έχουμε $[a,b]\subset I_\varepsilon:=(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$. Άρα,

(1.1.2.6)
$$\lambda^*([a,b])\leqslant\ell(I_\varepsilon)=(b-a)+2\varepsilon.$$

Συνεπώς, $\lambda^*([a,b])\leqslant b-a$.

Για την αντίστροφη ανισότητα πρέπει να δείξουμε ότι αν (I_n) είναι μια καλυψη του $[a,b]$ από ανοικτά διαστήματα, τότε

(1.1.2.7)
$$b-a\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n).$$

Βήμα 1: Έστω ότι $[a,b]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$. Αφού το $[a,b]$ είναι συμπαγές, από το Θεώρημα Heine-Borel υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της (I_n): μπορούμε δηλαδή να βρούμε $N\in\mathbb{N}$ ώστε

(1.1.2.8)
$$[a,b]\subset I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_N.$$

Βήμα 2: Έστω ότι $[a,b]\subset(c_1,d_1)\cup\cdots\cup(c_N,d_N)$. Θα δείξουμε ότι

(1.1.2.9)
$$b-a<\sum_{n=1}^{N}(d_n-c_n).$$

Η απόδειξη της (1.1.2.9) μπορεί να γίνει με επαγωγή ως προς το N. Αν $N=1$ τότε έχουμε $[a,b]\subset(c_1,d_1)$, οπότε $c_1<a<b<d_1$ και είναι φανερό ότι $b-a<d_1-c_1$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι $[a,b]\subset(c_1,d_1)\cup\cdots\cup(c_{N+1},d_{N+1})$ και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a\in(c_1,d_1)$. Αν $d_1>b$ τότε το ζητούμενο ισχύει (αφού ήδη έχουμε $b-a<d_1-c_1$). Αν $d_1\leqslant b$, τότε $[d_1,b]\subset(c_2,d_2)\cup\cdots\cup(c_N,d_N)$ και εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση (για το $[d_1,b]$ το οποίο καλύπτεται από N ανοικτά διαστήματα) παίρνουμε

(1.1.2.10)
$$b-d_1\leqslant\sum_{n=2}^{N+1}(d_n-c_n).$$

Έχουμε και την $[a,d_1)\subset(c_1,d_1)$, άρα

(1.1.2.11)
$$d_1-a\leqslant d_1-c_1.$$

Προσθέτοντας τις (1.1.2.10) και (1.1.2.11) παίρνουμε

$$b-a=(b-d_1)+(d_1-a)\leqslant(d_1-c_1)+\sum_{n=2}^{N+1}(d_n-c_n)=\sum_{n=1}^{N+1}(d_n-c_n). \tag{1.1.2.12}$$

Από τα Βήματα 1 και 2 προκύπτει ότι

$$b-a<\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) \tag{1.1.2.13}$$

για κάθε κάλυψη (I_n) του $[a,b]$. Άρα, $\lambda^*([a,b])\geqslant b-a$. □

Παρατήρηση 1.1.8. *Από τις Προτάσεις 1.1.5 και 1.1.7 προκύπτει άμεσα ότι κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.*

Πρόταση 1.1.9. $\lambda^*((a,b))=b-a$.

Απόδειξη. Για κάθε $0<\varepsilon<(b-a)/2$ έχουμε $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\subset(a,b)\subset[a,b]$. Από την Πρόταση 1.1.4 και την Πρόταση 1.1.7,

$$(b-a)-2\varepsilon=\lambda^*([a+\varepsilon,b-\varepsilon])\leqslant\lambda^*((a,b))\leqslant\lambda^*([a,b])=b-a. \tag{1.1.2.14}$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για όλα τα «μικρά» $\varepsilon>0$, βλέπουμε ότι $\lambda^*((a,b))=b-a$. □

Πρόταση 1.1.10. $\lambda^*((a,+\infty))=+\infty$.

Απόδειξη. Για κάθε $N\in\mathbb{N}$ έχουμε $(a,+\infty)\supset(a,a+N)$, άρα

$$\lambda^*((a,+\infty))\geqslant a+N-a=N. \tag{1.1.2.15}$$

Άρα, $\lambda^*((a+\infty))=+\infty$. □

Πρόταση 1.1.11 (αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου). *Για κάθε πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ισχύει*

$$\lambda^*\left(\bigcup_n A_n\right)\leqslant\sum_n\lambda^*(A_n). \tag{1.1.2.16}$$

Απόδειξη. Αν το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι $+\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum\limits_n\lambda^*(A_n)<+\infty$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κάλυψη (J_s) του $\bigcup\limits_n A_n$ από ανοικτά διαστήματα, ώστε $\sum\limits_s\ell(J_s)<\sum\limits_n\lambda^*(A_n)+\varepsilon$.

Για κάθε n θεωρούμε κάλυψη $(I_n^k)_k$ του A_n με την ιδιότητα

$$\sum_k\ell(I_n^k)<\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{1.1.2.17}$$

Αν πάρουμε σαν (J_s) την (αριθμήσιμη) οικογένεια $(I_n^k)_{n,k}$ όλων αυτών των ανοικτών διαστημάτων, τότε

$$\bigcup_n A_n\subset\bigcup_{n,k}I_n^k \tag{1.1.2.18}$$

και

$$\sum_{n,k}\ell(I_n^k)=\sum_n\sum_k\ell(I_n^k)<\sum_n\left(\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)=\sum_n\lambda^*(A_n)+\varepsilon. \tag{1.1.2.19}$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έπεται η (1.1.2.16). □

1.1.3 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$

Σε αυτήν την υποπαράγραφο δίνουμε εν συντομία τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$ για $d > 1$. Η ιδέα του ορισμού αλλά και οι αποδείξεις των ιδιοτήτων είναι γενικά ίδιες με εκείνες της προηγούμενης παραγράφου. Τον ρόλο των διαστημάτων (a, b) παίζουν τώρα τα ανοικτά ορθογώνια $I = \prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j)$, $-\infty < a_j \leqslant b_j < \infty$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$, τα οποία ονομάζουμε και πάλι *ανοικτά διαστήματα*. Παρατηρήστε ότι το κενό σύνολο είναι κι αυτό ανοικτό διάστημα (έχουμε επιτρέψει την ισότητα $a_j = b_j$, και τότε $(a_j, b_j) = \emptyset$). Η οικογένεια $\mathcal{C}$ των ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}^d$ είναι *σ-κάλυψη* του $\mathbb{R}^d$: έχουμε

(1.1.3.1)
$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)^d.$$

Για κάθε ανοικτό διάστημα $I = \prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j)$ του $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε

(1.1.3.2)
$$\ell(I) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j).$$

Η $\mathcal{C}$ και η ℓ επάγουν το εξωτερικό μέτρο λ^* στον $\mathbb{R}^d$. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ το **εξωτερικό μέτρο Lebesgue** του A είναι το

(1.1.3.3)
$$\lambda_d^*(A) = \inf\left\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } A \right\}.$$

Για ευκολία θα συμβολίζουμε το λ_d με λ. Στο επόμενο θεώρημα συνοψίζουμε τις βασικές ιδιότητες του λ_d^*.

Θεώρημα 1.1.12. *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $\lambda := \lambda_d$ ικανοποιεί τα εξής:*

(α) Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε $\lambda_d^*(A) \leqslant \lambda_d^*(B)$.

(β) Αν το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε $\lambda_d^*(A) = 0$.

(γ) Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ισχύει $\lambda_d^*(A + x) = \lambda_d^*(A)$.

(δ) Για κάθε πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ ισχύει

(1.1.3.4)
$$\lambda_d^*\left(\bigcup_n A_n \right) \leqslant \sum_n \lambda_d^*(A_n).$$

(ε) Για κάθε κλειστό διάστημα $I = \prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j)$ στον $\mathbb{R}^d$ ισχύει $\lambda_d^*(I) = \ell(I) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη των (α), (γ) και (δ) είναι ακριβώς η ίδια με την απόδειξη των Προτάσεων 1.1.4, 1.1.6 και 1.1.11 αντίστοιχα. Για την απόδειξη του (β) δουλεύουμε όπως στην Πρόταση 1.1.5: Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο σύνολο $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ θεωρούμε μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων I_n με $x_n \in I_n$ και $\ell(I_n) = \varepsilon 2^n$ (μπορούμε να θεωρήσουμε ανοικτό κύβο I_n που έχει κέντρο το x_n και μήκος ακμής ίσο με $(\varepsilon/2^n)^{1/d}$). Τότε, $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

(1.1.3.5)
$$\sum_n \ell(I_n) = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_d^*(A) = 0$.

Μένει να δείξουμε το (ε). Η ανισότητα $\lambda_d^*(I) \leqslant \ell(I)$ είναι απλή. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ καλύπτουμε το I με το ανοικτό διάστημα $J_\varepsilon = \prod_{j=1}^{d}(a_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon)$, οπότε

(1.1.3.6) $$\lambda_d^*(I) \leqslant \ell(J_\varepsilon) = \prod_{j=1}^{d}(b_j - a_j + 2\varepsilon).$$

Αφού

(1.1.3.7) $$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\prod_{j=1}^{d}(b_j - a_j + 2\varepsilon) = \prod_{j=1}^{d}(b_j - a_j) = \ell(I),$$

έπεται ότι $\lambda_d^*(I) \leqslant \ell(I)$.

Για την αντίστροφη ανισότητα πρέπει να δείξουμε ότι αν (J_n) είναι μια κάλυψη του I από ανοικτά διαστήματα, τότε

(1.1.3.8) $$\ell(I) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\ell(J_n).$$

Αφού το I είναι συμπαγές, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $I \subset J_1 \cup \cdots \cup J_N$. Δείχνουμε ότι

(1.1.3.9) $$\ell(I) \leqslant \sum_{n=1}^{N}\ell(J_n).$$

Για την απόδειξη της (1.1.3.9) δείχνουμε προηγουμένως τα εξής:

1. Έστω $I = \prod_{j=1}^{d}[a_j, b_j]$. Για κάθε $j = 1, \ldots, d$ θεωρούμε μια διαμέριση $a_j = c_j^0 < c_j^1 < \cdots < c_j^{m_j} = b_j$ του $[a_j, b_j]$ και, για κάθε $1 \leqslant i_1 \leqslant m_1, \ldots, 1 \leqslant i_k \leqslant m_k$ ορίζουμε $J_{i_1,\ldots,i_k} = \prod_{j=1}^{k}(c_j^{i_j-1}, c_j^{i_j}]$. Τότε,

   (1.1.3.10) $$\ell(I) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant m_1,\ldots,1\leqslant i_k\leqslant m_k}\ell(J_{i_1,\ldots,i_k}).$$

2. Έστω $I, J_1, \ldots, J_s$ κλειστά διαστήματα στον $\mathbb{R}^d$. Υποθέτουμε ότι τα $J_1, \ldots, J_s$ είναι μη επικαλυπτόμενα (έχουν ξένα εσωτερικά) και ότι $I = J_1 \cup \cdots \cup J_s$. Τότε,

   (1.1.3.11) $$\ell(I) = \ell(J_1) + \cdots + \ell(J_s).$$

Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. □

1.2 Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

Ο αρχικός μας στόχος ήταν να πετύχουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα του «μέτρου»: θα θέλαμε λοιπόν να ισχύει η

(1.2.0.12) $$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)$$

αν τα A_n είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (και γενικότερα, του $\mathbb{R}^d$). Το εξωτερικό μέτρο που ορίσαμε δεν έχει την ιδιότητα της προσθετικότητας: ακόμα κι αν περιοριστούμε στην περίπτωση *δύο* ξένων υποσυνόλων A και B του $[0, 1]$, μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα (δείτε τις ασκήσεις) όπου

$$\lambda^*(A \cup B) < \lambda^*(A) + \lambda^*(B). \tag{1.2.0.13}$$

Αυτό που θα κάνουμε είναι να περιοριστούμε σε μια κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο περιορισμός της «συνάρτησης εξωτερικού μέτρου» λ^* στην $\mathcal{M}$ να ικανοποιεί την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας. Η $\mathcal{M}$ είναι η κλάση των **Lebesgue μετρήσιμων συνόλων**. Η διαδικασία είναι η ίδια στον $\mathbb{R}^d$ για κάθε $d \geqslant 1$.

Ορισμός 1.2.1 (Lebesgue μετρήσιμο σύνολο). *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται* **Lebesgue μετρήσιμο** *αν για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει*

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c). \tag{1.2.0.14}$$

Δηλαδή, ένα σύνολο είναι μετρήσιμο αν «χωρίζει σωστά» – ως προς το εξωτερικό μέτρο – οποιοδήποτε άλλο σύνολο. Η κλάση των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathcal{M}$.

Παρατήρηση 1.2.2. *Από την $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$ και από την υποπροσθετικότητα του λ^*, έχουμε πάντα την ανισότητα*

$$\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c). \tag{1.2.0.15}$$

Αυτό λοιπόν που χρειαζόμαστε για να δείξουμε τη μετρησιμότητα του A είναι η αντίστροφη ανισότητα

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) \tag{1.2.0.16}$$

για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$.

1.2.1 Βασικές ιδιότητες της κλάσης των μετρήσιμων συνόλων

Οι επόμενες Προτάσεις περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες της κλάσης των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

Πρόταση 1.2.3. *Αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε $A \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε, $X \cap A \subseteq A$ άρα $\lambda^*(X \cap A) = 0$. Επίσης, $X \supseteq X \cap A^c$ άρα

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c). \tag{1.2.1.1}$$

Από την Παρατήρηση 1.2.2 έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.2.4. *Το συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A \in \mathcal{M}$ τότε $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A^c) + \lambda^*(X \cap (A^c)^c), \tag{1.2.1.2}$$

όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι $A \in \mathcal{M}$ και η ισότητα μετά προκύπτει από το γεγονός ότι $A = (A^c)^c$. Από την Παρατήρηση 1.2.2 έπεται το ζητούμενο. □.

Πρόταση 1.2.5. *Η ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Παρατηρούμε ότι

(1.2.1.3) $$X \cap (A \cup B) = X \cap (A \cup (A^c \cap B)) = (X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B)$$

και, χρησιμοποιώντας τη μετρησιμότητα των A και B, έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda^*(X \cap (A \cup B)) + \lambda^*(X \cap (A \cup B)^c) &= \lambda^*((X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B)) \\ &\quad + \lambda^*(X \cap (A \cup B)^c) \\ &\leqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*((X \cap A^c) \cap B) \\ &\quad + \lambda^*((X \cap A^c) \cap B^c) \\ &\leqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) \\ &= \lambda^*(X). \end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 1.2.2 έπεται ότι το $A \cup B$ είναι μετρήσιμο. □

Πρόταση 1.2.6. *Η τομή δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ και χρησιμοποιούμε τις Προτάσεις 1.2.4 και 1.2.5. □

Πρόταση 1.2.7. *Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$ τότε, για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}^d$,*

(1.2.1.4) $$\lambda^*(X \cap (A \cup B)) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap B).$$

Απόδειξη. Αρκεί να υποθέσουμε ότι το ένα από τα δύο σύνολα, ας πούμε το A, είναι μετρήσιμο. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda^*(X \cap (A \cup B)) &= \lambda^*([X \cap (A \cup B)] \cap A) + \lambda^*([X \cap (A \cup B)] \cap A^c) \\ &= \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(x \cap B), \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $[X \cap (A \cup B)] \cap A^c = (X \cap A \cap A^c) \cup (X \cap B \cap A^c) = X \cap B$ και $[X \cap (A \cup B)] \cap A = (X \cap A) \cup (X \cap A \cap B) = X \cap A$, λόγω της $A \cap B = \emptyset$. □

Πόρισμα 1.2.8. *Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$, τότε*

(1.2.1.5) $$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Απόδειξη. Παίρνουμε $X = \mathbb{R}^d$ στην Πρόταση 1.2.7. □

Πόρισμα 1.2.9. *Αν $B_1, \dots, B_m$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα στην $\mathcal{M}$ τότε, για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$,*

(1.2.1.6) $$\lambda^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) = \sum_{i=n}^{m} \lambda^*(X \cap B_n).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς m, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2.7. □

Πρόταση 1.2.10. *Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c, \ldots,\ B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}), \ldots. \tag{1.2.1.7}$$

Από τις ιδιότητες που έχουμε αποδείξει, κάθε B_n είναι μετρήσιμο σύνολο. Από τον τρόπο ορισμού τους, τα B_n είναι ξένα ανά δύο και

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{1.2.1.8}$$

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το $B_1 \cup \cdots \cup B_m$ είναι μετρήσιμο, άρα

$$\begin{aligned}
\lambda^*(X) &= \lambda^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) + \lambda^*(X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus A),
\end{aligned}$$

από το Πόρισμα 1.2.9 και τον εγκλεισμό $X \setminus A \subseteq X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)$. Αφήνοντας το $m \to \infty$, παίρνουμε

$$\lambda^*(X) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus A) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \setminus A), \tag{1.2.1.9}$$

λόγω της αριθμήσιμης υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου. Άρα, το A είναι μετρήσιμο. □

1.3 Μέτρο Lebesgue

Συνοψίζουμε όσα έχουμε κάνει ως τώρα. Ορίσαμε το εξωτερικό μέτρο $\lambda^*(A)$ για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$. Θεωρήσαμε μια κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τα οποία ονομάσαμε μετρήσιμα σύνολα. Είδαμε ότι αυτή η κλάση έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$.
2. $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$.
3. Αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τις σ-**άλγεβρες**:

Ορισμός 1.3.1 (σ-άλγεβρα). *Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. *Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.*
3. *Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Με άλλα λόγια, μια κλάση υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν είναι «κλειστή ως προς συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις». Έπεται ότι είναι κλειστή και ως προς αριθμήσιμες τομές και διαφορές:

(iv) *Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}. \tag{1.3.0.10}$$

(v) *Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.*

Παρατήρηση 1.3.2. *Με βάση τον Ορισμό 1.3.1 η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι σ-άλγεβρα. Ειδικότερα, αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, και αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \setminus B \in \mathcal{M}$.*

1.3.1 Μέτρο Lebesgue

Ορίζουμε $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ με $A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$. Δηλαδή, η λ είναι ο περιορισμός της συνολοσυνάρτησης λ^* (του εξωτερικού μέτρου) στην κλάση $\mathcal{M}$. Η συνάρτηση λ ονομάζεται **μέτρο Lebesgue** ή απλά **μέτρο**.

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ Lebesgue μετρήσιμο $\}$. Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και η συνολοσυνάρτηση $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ που ορίζεται μέσω της*

$$A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A) \tag{1.3.1.1}$$

είναι **αριθμήσιμα προσθετική** *(ή, σ-προσθετική). Δηλαδή, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων ($A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε n και $A_n \cap A_m = \emptyset$ αν $n \neq m$), τότε*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n). \tag{1.3.1.2}$$

Απόδειξη. Μένει να δείξουμε ότι το μέτρο λ είναι αριθμήσιμα προσθετική συνολοσυνάρτηση. Έστω A_n, $n \in \mathbb{N}$, ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα. Από την Πρόταση 1.2.10 το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο.

Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία του μέτρου και το Πόρισμα 1.2.8, βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{1.3.1.3}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \tag{1.3.1.4}$$

Η αντίστροφη ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{1.3.1.5}$$

προκύπτει άμεσα από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του (εξωτερικού) μέτρου (Πρόταση 1.1.11). □

1.3.2 Borel σύνολα και Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

Ποια σύνολα είναι μετρήσιμα; Ήδη γνωρίζουμε ότι τα σύνολα που έχουν εξωτερικό μέτρο 0 (και τα συμπληρώματά τους) ανήκουν στην $\mathcal{M}$. Όπως θα δούμε, η $\mathcal{M}$ είναι αρκετά πλούσια: όλα τα «καλά» - από τοπολογική άποψη - υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.

Πρόταση 1.3.4. *Όλα τα διαστήματα I του $\mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη μόνο για την περίπτωση $d = 1$ (η περίπτωση $d > 1$ αφήνεται για τις ασκήσεις). Θεωρούμε πρώτα τυχούσα κλειστή ημιευθεία της μορφής $J = [a, +\infty)$. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{1.3.2.1}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, αρκεί να δείξουμε ότι αν $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία κάλυψη του X από ανοιχτά διαστήματα, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geqslant \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{1.3.2.2}$$

Έστω ότι $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, και ας υποθέσουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ (αλλιώς, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon \geqslant \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{1.3.2.3}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$I_n' = I_n \cap (a, +\infty) \quad , \quad I_n'' = I_n \cap (-\infty, a), \tag{1.3.2.4}$$

και

$$I_0 = \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{1.3.2.5}$$

Καθένα από τα I_n', I_n'' είναι ανοιχτό διάστημα ή το κενό σύνολο, και (εξηγήστε γιατί)

$$\ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I_n''). \tag{1.3.2.6}$$

Επίσης,

$$X \cap [a, +\infty) \subseteq I_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n' \tag{1.3.2.7}$$

και

$$X \cap (-\infty, a) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n''. \tag{1.3.2.8}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty, a)) &\leqslant \ell(I_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n') + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n'') \\ &= \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (\ell(I_n') + \ell(I_n'')) \\ &= \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το $J = [a, +\infty)$ είναι μετρήσιμο.

Αν $J = (a, +\infty)$, τότε γράφοντας

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, +\infty) \tag{1.3.2.9}$$

και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2.10 και το αποτέλεσμα για κλειστές ημιευθείες, βλέπουμε ότι $J \in \mathcal{M}$.

Τώρα, βλέπουμε αμεσως ότι τα $(-\infty, a)$ και $(-\infty, a]$ είναι μετρήσιμα σύνολα ως συμπληρώματα μετρήσιμων συνόλων.

Τέλος, εύκολα βλέπουμε ότι διαστήματα της μορφής $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ και (a, b) είναι μετρήσιμα. Για παράδειγμα,

$$[a, b] = \mathbb{R} \setminus \big((-\infty, a) \cup (b, +\infty)\big) \tag{1.3.2.10}$$

δηλαδή το $[a, b]$ είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα του μετρήσιμου συνόλου $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. □

Ορισμός 1.3.5 (Borel σ-άλγεβρα). *Η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ που περιέχει όλα τα ανοικτά διαστήματα λέγεται* ***σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του*** *$\mathbb{R}$ (ή Borel σ-άλγεβρα) και συμβολίζεται με $\mathcal{B}$. Τυπικά, ορίζουμε*

$$\mathcal{B} = \bigcap \{\mathcal{A} \subseteq P(\mathbb{R}) : \mathcal{A} \ \ \sigma - \textit{άλγεβρα και κάθε ανοικτό διάστημα ανήκει στην } \mathcal{A}\}, \tag{1.3.2.11}$$

και ελέγχουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, ότι κάθε ανοικτό διάστημα ανήκει στην $\mathcal{B}$ και ότι $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που έχει αυτήν την ιδιότητα.

Από τον ορισμό της Borel σ-άλγεβρας, από το γεγονός ότι η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και από την Πρόταση 1.3.4 συμπεραίνουμε ότι κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο:

Πρόταση 1.3.6. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. □

Πρόταση 1.3.7. *Κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι σύνολο Borel, άρα είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων - και μάλιστα ξένων ανά δύο (γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση για $d = 1$, η περίπτωση $d > 1$ θα εξηγηθεί στις ασκήσεις). Αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά διαστήματα, η $\mathcal{B}$ περιέχει όλα τα ανοικτά, άρα και όλα τα κλειστά, σύνολα. □

Παρατηρήσεις 1.3.8. *(α) Η Borel σ-άλγεβρα περιέχει πολύ περισσότερα σύνολα από τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Όλες οι αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα λεγόμενα G_δ-**σύνολα**) είναι Borel σύνολα, όλες οι αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα λεγόμενα F_σ-**σύνολα**) είναι Borel σύνολα, και ούτω καθεξής.*

(β) Η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων: υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel. Μπορεί κανείς να δώσει παράδειγμα συνόλου που δεν είναι Borel και έχει εξωτερικό μέτρο 0 (άρα, είναι μετρήσιμο). Θα περιγράψουμε τέτοια παραδείγματα αργότερα.

1.3.3 Περιγραφή των μετρήσιμων συνόλων

Τα μετρήσιμα σύνολα προσεγγίζονται από Borel σύνολα, με την εξής έννοια:

Πρόταση 1.3.9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) Το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

(iii) Υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $A \subseteq B$ και $\lambda^*(B \setminus A) = 0$.

Απόδειξη. (i) ⇒ (ii). Υποθέτουμε ότι το A είναι μετρήσιμο και, αρχικά, ότι $\lambda(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του $\lambda(A) = \lambda^*(A)$, υπάρχει ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

(1.3.3.1)
$$\sum_n \lambda(I_n) = \sum_n \ell(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon.$$

Ορίζουμε $G = \bigcup_n I_n$. Το G είναι ανοικτό σύνολο, $A \subseteq G$ και έχουμε

(1.3.3.2)
$$\lambda(A) \leqslant \lambda(G) = \lambda\left(\bigcup_n I_n\right) \leqslant \sum_n \lambda(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon.$$

Αφού τα A και G είναι μετρήσιμα, έχουμε ότι το $G \setminus A$ είναι μετρήσιμο και

$$\lambda(G) = \lambda(A \cup (G \setminus A)) = \lambda(A) + \lambda(G \setminus A) \tag{1.3.3.3}$$

από το Πόρισμα 1.2.8. Συνεπώς,

$$\lambda^*(G \setminus A) = \lambda(G \setminus A) = \lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon, \tag{1.3.3.4}$$

από την (1.3.3.2).

Έστω τώρα ότι $\lambda(A) = +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap (-n, n)$. Κάθε A_n είναι μετρήσιμο, $\lambda(A_n) < +\infty$ και $A = \bigcup_n A_n$. Με βάση την περίπτωση που εξετάσαμε παραπάνω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε ανοικτό σύνολο G_n ώστε $A_n \subseteq G_n$ και $\lambda(G_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$. Ορίζουμε $G = \bigcup_n G_n$. Τότε, το G είναι ανοικτό σύνολο, $G = \bigcup_n G_n \supseteq \bigcup_n A_n = A$ και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$G \setminus A = \left(\bigcup_n G_n\right) \setminus \left(\bigcup_n A_n\right) \subseteq \bigcup_n (G_n \setminus A_n). \tag{1.3.3.5}$$

Συνεπώς,

$$\lambda(G \setminus A) \leqslant \lambda\left(\bigcup_n (G_n \setminus A_n)\right) \leqslant \sum_n \lambda(G_n \setminus A_n) < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \tag{1.3.3.6}$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει το (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό $G_k \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G_k$ και $\lambda^*(G_k \setminus A) < 1/k$. Ορίζουμε $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Το B είναι G_δ-σύνολο και $A \subseteq B$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda^*(B \setminus A) \leqslant \lambda^*(G_k \setminus A) < \frac{1}{k} \tag{1.3.3.7}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\lambda^*(B \setminus A) = 0. \tag{1.3.3.8}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(A \cup (B \setminus A)) \leqslant \lambda^*(B) + \lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(A). \tag{1.3.3.9}$$

Αφού $A \subseteq B$, ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$. Συνεπώς, $\lambda^*(B) = \lambda^*(A)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $A \subseteq B$ και $\lambda^*(B \setminus A) = 0$. Από την Πρόταση 1.2.3 το $B \setminus A$ είναι μετρήσιμο. Το B ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων). Άρα, το B είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A = B \setminus (B \setminus A) \tag{1.3.3.10}$$

συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο. □

1.3.4 Συνέχεια του μέτρου Lebesgue

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο ακόμα ιδιότητες του μέτρου Lebesgue, οι οποίες είναι συνέπειες της αριθμήσιμης προσθετικότητας:

Πρόταση 1.3.10. *(i) Αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε*

(1.3.4.1) $$\lambda(A_n) \to \lambda(A).$$

(ii) Αν (B_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\lambda(B_1) < +\infty$ και $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, τότε

(1.3.4.2) $$\lambda(B_n) \to \lambda(B).$$

Απόδειξη: (i) Γράφουμε το A σαν ξένη ένωση:

(1.3.4.3) $$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \cdots,$$

και χρησιμοποιώντας την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda(A_1) + \lambda(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \lambda(A_n \setminus A_{n-1}) + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(\lambda(A_1) + \lambda(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \lambda(A_n \setminus A_{n-1})\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n). \end{aligned}$$

(ii) Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $C, D \in \mathcal{M}$ με $D \subset C$ και $\lambda(D) < +\infty$, τότε

(1.3.4.4) $$\lambda(C \setminus D) = \lambda(C) - \lambda(D).$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = B_1 \setminus B_n$. Τότε, η (A_n) είναι αύξουσα, οπότε

(1.3.4.5) $$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_1 \setminus B_n)\right) = \lambda\left(B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lambda(B_1) - \lambda(B),$$

από το (i). Επίσης,

(1.3.4.6) $$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\lambda(B_1) - \lambda(B_n)\big) = \lambda(B_1) - \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n).$$

Άρα, $\lambda(B) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n)$. □

Παρατήρηση 1.3.11. *Η υπόθεση $\lambda(B_1) < +\infty$ στο (ii) μπορεί να αντικατασταθεί από την $\lambda(B_k) < +\infty$ για κάποιο k (εξηγήστε γιατί). Δεν μπορούμε όμως να την αφαιρέσουμε τελείως: αν $B_n = [n, +\infty)$, τότε $B_n \searrow \emptyset$ αλλά $\lambda(B_n) = +\infty$ για κάθε n ενώ $\lambda(\emptyset) = 0$.*

1.4 Το σύνολο του Cantor και το σύνολο του Vitali

Έχουμε ήδη συζητήσει το σύνολο του Cantor και την κατασκευή του Vitali. Έχοντας πλέον ορίσει το μέτρο Lebesgue λ στο $\mathbb{R}$ επιστρέφουμε σε αυτά τα δύο σύνολα για να τα δούμε μέσα στο πλαίσιο που έχουμε αναπτύξει.

1.4.1 Το σύνολο του Cantor

Όπως είδαμε στην εισαγωγή, το σύνολο του Cantor ορίζεται ως η τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$. Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε C_1 το σύνολο που απομένει. Το C_1 αποτελείται από δύο ξένα κλειστά διαστήματα μήκους $1/3$. Χωρίζουμε καθένα από αυτά σε τρία ίσα διαστήματα, από καθένα από αυτά αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα, και ονομάζουμε C_2 το κλειστό σύνολο που απομένει. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο C_n έτσι ώστε η ακολουθία (C_n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.
2. Το C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το σύνολο του Cantor είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n. \tag{1.4.1.1}$$

Τα διαστήματα της μορφής $[k/3^n, (k+1)/3^n]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται τριαδικά διαστήματα.

Το C είναι μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το C είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το C έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Το C είναι τέλειο σύνολο*, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης του C.

Απόδειξη. Είδαμε ότι το C είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C, παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο C, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο x, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C. □

(2) *Το C έχει μέτρο ίσο με 0.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$ και $\lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$, αφού το C_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα,

$$\lambda(C) \leqslant \lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n} \tag{1.4.1.2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda(C) = 0$. □

Παρατήρηση. Ειδικότερα, το C δεν περιέχει κανένα διάστημα.

(3) *Το C είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Από ένα γενικό θεώρημα της Τοπολογίας, κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού δείξαμε ότι το C είναι τέλειο, έπεται ο ισχυρισμός. Θα δώσουμε όμως μια δεύτερη απόδειξη, η οποία μάς δίνει την αφορμή να δούμε μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου C που παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον.

Μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση Φ του C στο σύνολο

(1.4.1.3) $$\{0,2\}^{\mathbb{N}} = \{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} : \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\}.$$

Το $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). ΄Αρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση Φ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε n, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n.

Με βάση αυτήν την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x) = [0,1/3]$ (δηλαδή, αν $x \in [0,1/3]$) και $\alpha_1^x = 2$ αν $I_1(x) = [2/3,1]$ (δηλαδή, αν $x \in [2/3,1]$).

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε n, αν $I_n(x) = [k/3^n, (k+1)/3^n]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $[k/3^n, (k/3^n)+(1/3^{n+1})]$, $[(k/3^n)+(2/3^{n+1}), (k+1)/3^n]$: εκείνο που περιέχει το x. Θέτουμε $\alpha_{n+1}^x = 0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha_{n+1}^x = 2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε για κάποιο n θα ισχύει $I_n(x) \neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x-y| \leqslant \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν n_0 είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των α_n^x βλέπουμε ότι $\alpha_{n_0}^x \neq \alpha_{n_0}^y$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha_n^y)_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi : C \to \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x) = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα προς ένα.

Αντίστροφα, αν $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από 0 ή 2, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ με $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, ώστε για κάθε n το I_n να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $I_1 = [0,1/3]$ αν $\alpha_1 = 0$ ή $I_1 = [2/3,1]$ αν $\alpha_1 = 2$.

(β) Γενικά, το I_{n+1} ορίζεται να είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του I_n που περιέχονται στο C_{n+1}: το αριστερό αν $\alpha_{n+1} = 0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1} = 2$.

Αφού τα μήκη των διαστημάτων I_n φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

(1.4.1.4) $$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n \subset C_n$ για κάθε n, είναι φανερό ότι $x \in C$. Επίσης, $I_n(x) = I_n$ για κάθε n, και από τον τρόπο ορισμού των I_n έχουμε

(1.4.1.5) $$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} = \Phi(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η Φ είναι επί του $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, άρα το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο τρόπος ορισμού της Φ μάς οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor. Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \in [0,1]$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) λέγεται **τριαδική παράσταση** του x. Γράφουμε $x = (a_1, a_2, \dots)$ αντί της $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός x στο διάστημα $[0,1]$ έχει τριαδική παράσταση. Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να επιλεγεί ως εξής: Χωρίζουμε το $[0,1]$ στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/3]$, $(1/3,2/3)$ και $[2/3,1]$. Θέτουμε

$$a_1 = \begin{cases} 0, & x \in [0,1/3] \\ 1, & x \in (1/3,2/3) \\ 2, & x \in [2/3,1] \end{cases}$$

Με αυτόν τον ορισμό, σε κάθε περίπτωση έχουμε

(1.4.1.6)
$$\frac{a_1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in [0,1/3]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/9]$, $(1/9,2/9)$, $[2/9,1/3]$ και θέτουμε $a_2 = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το a_2 όταν $x \in (1/3,2/3)$ ή $x \in [2/3,1]$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε

(1.4.1.7)
$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} \leqslant x \leqslant \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}.$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των a_n με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε για κάθε n να έχουμε

(1.4.1.8)
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leqslant x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}.$$

Αφού λοιπόν

(1.4.1.9)
$$0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leqslant \frac{1}{3^n},$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ συγκλίνει στον x, δηλαδή

(1.4.1.10)
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

Παραδείγματα. Ελέγξτε ότι $1/8 = (0,1,0,1,0,1,\dots)$ και $1/4 = (2,0,2,0,2,0,\dots)$.

Είναι φανερό ότι αν $x \neq y$ τότε η τριαδική παράσταση του x είναι διαφορετική από αυτήν του y, αφού μια σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια.

Υπάρχουν όμως αριθμοί $x \in [0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, αν $x = 1/3$ τότε

(1.4.1.11)
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0}{3^k} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}.$$

(Με τον τρόπο επιλογής της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θα βρίσκαμε την δεύτερη παράσταση).

Γενικότερα, ισχύει το εξής: Ο $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο x είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x = k/3^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $1 \leqslant k \leqslant 3^n$ (αφήνεται ως άσκηση).

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω $x \in [0,1]$. Τότε, $x \in C$ αν και μόνο αν ο x έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.* □

Απόδειξη. Έστω $x \in [0,1]$. Αν η ακολουθία (a_n) επιλεγεί με τον τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε ισχύει το εξής: $x \in C$ αν και μόνο αν $a_n \neq 1$ για κάθε n. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $x \in C$ τότε ο x έχει μία τριαδική παράσταση που περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2. Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. □

1.4.2 Το λήμμα του Steinhaus και το σύνολο του Vitali

Στην §1.3.2 ορίσαμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και την μεγαλύτερη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Από τους ορισμούς έπονται άμεσα οι εγκλεισμοί

(1.4.2.1)
$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Το ερώτημα όμως αν αυτοί οι δύο εγκλεισμοί είναι γνήσιοι (δηλαδή, αν υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι μετρήσιμα και αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel) δεν είναι καθόλου απλό. Ουσιαστικά, είδαμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου στην §1.1 (το σύνολο N που ορίζεται εκεί, με βάση τον ορισμό των μετρήσιμων συνόλων που δώσαμε αργότερα, είναι μη μετρήσιμο). Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου, χρησιμοποιώντας το **λήμμα του Steinhaus**.

Πρόταση 1.4.2 (Steinhaus). *Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > 0$. Τότε, το «σύνολο διαφορών»*

(1.4.2.2)
$$A - A := \{x - y : x \in A, y \in A\}$$

του A περιέχει διάστημα της μορφής $(-t,t)$ για κάποιο $t > 0$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ (αν $\lambda(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t,t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t,t)$).

Έστω λοιπόν A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$. Από την Πρόταση 1.3.9, για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\lambda(G) < (1+\varepsilon)\lambda(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

(1.4.2.3)
$$\lambda(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Από την $\lambda(G) < (1+\varepsilon)\lambda(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

(1.4.2.4)
$$\ell(I_k) \leqslant (1+\varepsilon)\lambda(A \cap I_k).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα I ώστε

(1.4.2.5) $$\lambda(A \cap I) \geqslant \frac{3\ell(I)}{4}.$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

(1.4.2.6) $$(A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t).$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t, t)$ ώστε τα σύνολα $A \cap I$ και $(A \cap I) + s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I \cup (I + s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I) + |s|$. Έπεται ότι

(1.4.2.7) $$2\lambda(A \cap I) = \lambda(A \cap I) + \lambda((A \cap I) + s) \leqslant \ell(I) + s < \frac{3\ell(I)}{2},$$

δηλαδή $\lambda(A \cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t)$. □

Θεώρημα 1.4.3. *Υπάρχει μη μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $\mathbb{R}$ ως εξής:

(1.4.2.8) $$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Η $\sim$ χωρίζει το $\mathbb{R}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

(1.4.2.9) $$E_x = \{y \in \mathbb{R} : y = x + q \text{ για κάποιον } q \in \mathbb{Q}\}.$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a : a \in A\} \subset \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

(1.4.2.10) $$E_n := E + q_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

1. Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in E$ ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του E.
2. $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q}$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Ας υποθέσουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda(E_n) = \lambda(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

(1.4.2.11) $$+\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E).$$

Συνεπώς, $\lambda(E) > 0$. Από το λήμμα του Steinhaus, το $E - E$ περιέχει διάστημα $(-t, t)$ για κάποιον $t > 0$. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι το $E - E$ δεν μπορεί να περιέχει ρητό διαφορετικό από το 0: αν $x \neq y$ στο E τότε ο $x - y$ είναι άρρητος, από τον τρόπο ορισμού του E. Έπεται ότι το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο. □

Παρατήρηση 1.4.4. *Με μια παραλλαγή αυτού του επιχειρήματος μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο. Χρησιμοποιώντας τα σύνολα E_n που ορίστηκαν στην (1.4.2.10) γράφουμε*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n), \tag{1.4.2.12}$$

και υποθέτοντας ότι κάθε $A \cap E_n$ είναι μετρήσιμο καταλήγουμε στην

$$0 < \lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap E_n). \tag{1.4.2.13}$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(A \cap E_n) > 0$ και από το λήμμα του Steinhaus το $A \cap E_n - A \cap E_n$, άρα και το $E_n - E_n$, περιέχει διάστημα $(-t, t)$ για κάποιον $t > 0$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο.