Απο τα Πρακτικά του 2ου Διημέρου Διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, 15-16 Μαρτίου 2003

Εικασίες και αντιπαραδείγματα – ένας δυναμικός τρόπος κατανόησης των μαθηματικών εννοιών

Ανδρέας Πούλος

Διδάκτωρ της Διδακτικής των Μαθηματικών

Είναι γνωστό ότι η απόδειξη της ορθότητας ενός μαθηματικού τύπου, μιας μαθηματικής πρότασης και γενικότερα ενός σύνθετου επιχειρήματος δεν μπορεί να θεωρηθεί έγκυρη μόνο με την «δοκιμή» κάποιων πολλών ή λίγων περιπτώσεων. Για το σκοπό αυτό επιστρατεύονται οι μέθοδοι απόδειξης των Μαθηματικών, οι οποίες είναι αποδεκτές από την κοινότητα των μαθηματικών και για το λόγο αυτό θεωρούνται έγκυρες. Αντίθετα με αυτή την πρακτική, για να καταρριφθεί ένας ισχυρισμός ή για να ελεγχθεί η ορθότητα μιας μαθηματικής πρότασης, αρκεί και ένα μόνο παράδειγμα το οποίο να έρχεται σε αντίθεση με την καθολική ισχύ του ισχυρισμού. Ένα τέτοιο παράδειγμα ονομάζεται *αντιπαράδειγμα*. Τα αντιπαραδείγματα έχουν ιδιαίτερη παιδαγωγική και διδακτική αξία και χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη διδασκαλία με σκοπό να ενισχύσουν την ορθότητα των μαθηματικών προτάσεων, να αποσαφηνίσουν κάποιες έννοιες. Ιδιαίτερα όταν έχουμε να εξετάσουμε σύνθετες μαθηματικές προτάσεις στις οποίες εμπλέκονται πολλές έννοιες, τα κατάλληλα επιλεγμένα αντιπαραδείγματα αποσαφηνίζουν την κατάσταση. Η μέθοδος διδασκαλίας με έμφαση στη χρήση αντιπαραδειγμάτων δεν είναι κάτι το καινοφανές. Στην καθημερινή εκπαιδευτική πράξη η πλειοψηφία των διδασκόντων κάνει χρήση των αντιπαραδειγμάτων ώστε να κατανοηθούν σε βάθος οι έννοιες και τα ερωτήματα που εξετάζονται. Εξάλλου είναι γνωστό ότι τη μέθοδο των αντιπαραδειγμάτων, τη μέθοδο της «δοκιμής και λάθους» την χρησιμοποιούσαν οι άριστοι των διδασκάλων. Ο Ευκλείδης για παράδειγμα εί-

ιγγράψει[1] ειδική πραγματεία τα «Ψευδάρια», η οποία σκοπό είχε
σκήσει τους μαθητές στην εύρεση των λαθών, στην αποκάλυψη
αντιφάσεων και σε μία βαθύτερη «ανάγνωση» και εξέταση των κα-
άσεων σε ένα δεύτερο επίπεδο μετά το επιφαινόμενο. Τα αντι-
ιδείγματα έπαιξαν σπουδαίο ρόλο στη βαθύτερη κατανόηση των
ήτων των μαθηματικών αντικειμένων και γενικότερα στην εξέλιξη
διων των Μαθηματικών. Υπενθυμίζουμε την ισχυρή εντύπωση που
άλεσε η δημοσίευση της αποκαλούμενης συνάρτησης Weierstrass
συνάρτησης παντού συνεχούς στο σύνολο των πραγματικών αριθ-
και πουθενά παραγωγίσιμης στο ίδιο σύνολο, επίσης τον κλονισμό
προκάλεσε το βιβλίο του μαθηματικού και φιλόσοφου Imre Lakatos
δείξεις και Ανασκευές»[2] για το ρόλο των αντιπαραδειγμάτων στη
κασία των μαθηματικών ανακαλύψεων.

αντιπαραδείγματα μπορούν να καλύψουν όλο φάσμα των εννοι-
ων σχολικών Μαθηματικών, έτσι ώστε αυτές να γίνουν καλύτερα
νοητές και λειτουργικές στη σχολική πραγματικότητα. Είναι αξιο-
ώτο όμως ότι η χρήση των αντιπαραδειγμάτων εμφανίζεται κυ-
στην τελευταία τάξη του Λυκείου κατά τη μελέτη και κατανόηση
ών του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, επειδή στο μέ-
ιυτών των σχολικών Μαθηματικών εμφανίζονται μια πληθώρα
των και αλληλοεμπλεκόμενων εννοιών, θεωρημάτων και μαθη-
ών σχέσεων.

αντιπαραδείγματα είναι επιτυχείς προσπάθειες για την απόρρι-
σμένων εικασιών. Παρά την αρνητική σημασία που έχει η λέξη
ρριψη», η διαδικασία κατασκευής ενός αντιπαραδείγματος είναι
αδικασία επιστημονική, αφού απαλλάσσει τα Μαθηματικά από
άσεις για τις οποίες είχαμε αμφιβολίες αν ήταν αληθείς ή ψευδείς.
τοποιημένος - φορμαλιστικός τρόπος διδασκαλίας των Μαθημα-
έχει διαμορφώσει σε διδάσκοντες και σε διδασκόμενους την εντύ-
ι ότι η επιστήμη αυτή αναπτύσσεται και κατασκευάζει τα θεω-
τά της χωρίς πειραματισμούς, δοκιμές και εικασίες. Σε αντίθεση
τή την πλατιά διαδεδομένη αντίληψη, η διαδικασία της μαθημα-
ανακάλυψης και της επίλυσης προβλημάτων είναι μοιραίο να προ-

ό τις μαρτυρίες που διασώθηκαν έως τις μέρες μας.
oofs and Refutations» στο αγγλικό πρωτότυπο κείμενο.

κύπτουν «υποψίες» για την ορθότητα ή μη κάποιων προτάσεων. Από
την άποψη αυτή κάθε πρόταση η οποία δεν έχει αποδειχθεί παρά τις
επίμονες προσπάθειες μπορούμε να την ονομάσουμε «εικασία». Αν δια-
πιστωθεί η ορθότητα ή το λανθασμένο μιας εικασίας, τότε αυτόματα
αυτή μετατρέπεται σε μαθηματικό θεώρημα. Για παράδειγμα, το απο-
καλούμενο Πυθαγόρειο θεώρημα είχε εμπειρικά ανακαλυφθεί και από
πολιτισμούς πριν τον Ελληνικό. Από καθαρά μαθηματική άποψη πα-
ρέμενε εικασία - παρ' ότι αυτή λέξη άρχισε να αποκτά νόημα μόνο όταν
η έννοια της απόδειξης άρχισε να θεωρείται αναγκαίο στάδιο στην ανά-
πτυξη των Μαθηματικών. Για τους Έλληνες φιλόσοφους-μαθηματικούς
αυτή η εμπειρική διαπίστωση η οποία εκφράζεται στο Πυθαγόρειο θε-
ώρημα έπρεπε μέσω λογικών επιχειρημάτων να αναδείξει την ισχύ και
την εγκυρότητά της σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ανεξάρτητα από τα
μήκη των πλευρών του ή να απορριφθεί από κάποιο αντιπαράδειγμα.
Σε αντιστοιχία με το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκεται η αποκαλούμενη
εικασία του Φερμά. Είχε διαπιστωθεί εμπειρικά ότι η εξίσωση
$x^v + y^v = z^v$ με x, y, z, v φυσικούς αριθμούς δεν έχει λύση για αριθμούς
$v \geq 3$. Αυτή η πρόταση η οποία σήμερα είναι θεώρημα χάρις στις προ-
σπάθειες του Άγγλου μαθηματικού Andrew Wiles, παρέμεινε εικασία
για περισσότερα από 350 χρόνια.

Για λόγους που σχετίζονται με κοινωνιολογικές πλευρές και όψεις
της μαθηματικής επιστήμης, οι μαθηματικοί ακούσια αποφεύγουν να
τονίσουν το τεράστιο πλήθος των εικασιών που έχουν διατυπωθεί και
συνεχώς συσσωρεύονται σε κάθε ενεργό κλάδο της επιστήμης τους.
Ορισμένες από τις εικασίες αυτές διατυπώθηκαν πρόσφατα, κάποιες
άλλες όμως έχουν ηλικία δεκαετιών και άλλες εκατοντάδων ετών. Η πο-
ρεία αντιμετώπισης πολλών εικασιών είχε θετική έκβαση και έγινε δυ-
νατόν να απορριφθούν με αντιπαραδείγματα. Στις περιπτώσεις αυτές,
ο δρόμος της έρευνας ήταν ιδιαίτερα κοπιαστικός και ο χρόνος που
απαιτήθηκε επιμηκύνθηκε υπερβολικά. Υπάρχουν εικασίες, για την κα-
τανόηση του περιεχομένου των οποίων αρκούν τα στοιχειώδη (Σχολι-
κά) Μαθηματικά και μάλιστα πολλές από αυτές είναι διάσημες.

Η εισήγηση αυτή ουσιαστικά επιχειρεί μία παράλληλη αντιμετώπι-
ση από την πλευρά της διδακτικής των Μαθηματικών των εννοιών
«αντιπαράδειγμα» και «εικασία» με σκοπό να αναδείξει την παιδαγω-
γική χρησιμότητα αυτής της θεώρησης κατά τη διδασκαλία τους.

Οι εικασίες και τα αντιπαραδείγματα από την οπτική γωνία της διδακτικής των μαθηματικών

Κατά την διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια αλλά και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, οι μαθητές μαθαίνουν ένα πλήθος ορισμών, κάποιες μαθηματικές προτάσεις με ή χωρίς τις αποδείξεις τους και ασκούνται στην κατανόηση αυτών των μαθηματικών εννοιών και των θεωρημάτων με την επίλυση προβλημάτων και ασκήσεων. Αυτός ο τρόπος διδασκαλίας είναι ο συνήθης και απ' ότι φαίνεται ο κύριος τρόπος βελτίωσής του - όχι της αναθεώρησης ή της ανατροπής του - είναι ο εμπλουτισμός του με καλύτερα επιλεγμένες σειρές προβλημάτων και ασκήσεων. Ακόμη και στον τυπικό τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών η αξιοποίηση των αντιπαραδειγμάτων τον εμπλουτίζει και τον βελτιώνει. Θεωρούμε όμως ότι η χρήση των αντιπαραδειγμάτων έχει πολύ καλύτερα διδακτικά αποτελέσματα σε έναν ριζικά αναθεωρημένο τρόπο διδασκαλίας κυρίως για μαθητές που έχουν κορεστεί από την τυποποιημένη διδασκαλία και οι οποίοι επιδιώκουν να κατανοήσουν σε βάθος και σε πληρότητα τις μαθηματικές έννοιες. Επίσης, η χρήση των αντιπαραδειγμάτων είναι ένα ιδιαίτερα αποτελεσματικό κριτήριο για να μετρήσουμε τον βαθμό κατανόησης εκ μέρους των μαθητών των διδασκόμενων εννοιών. Δηλαδή, τα αντιπαραδείγματα είναι ένα εργαλείο πειραματισμού και ως τέτοιο έχει χρησιμοποιηθεί από αρκετούς ερευνητές. Θα περιγράψουμε επιλεκτικά κάποιες τέτοιες έρευνες ώστε να γίνει κατανοητή η αξία των αντιπαραδειγμάτων ως εργαλείων της Διδακτικής των Μαθηματικών. Οι Randall R. Dahlberg και David L. Housman του Allegheng College ερεύνησαν 11 απόφοιτους, οι οποίοι είχαν διδαχθεί Μαθηματικά επιπέδου Εισαγωγής στην Ανάλυση πραγματικών συναρτήσεων, συνήθη Άλγεβρα, Γραμμική Άλγεβρα και θεωρία Συνόλων. Οι ερευνητές μαγνητοφώνησαν ατομικές συνεντεύξεις των αποφοίτων για να διαπιστώσουν πόσο έχουν κατανοήσει τον τυπικό ορισμό της συνάρτησης. Όρισαν μια συνάρτηση ως «καλή» αν κάθε ακέραια τιμή του πεδίου ορισμού της είναι ρίζα της. Στη συνέχεια ζήτησαν από τα υποκείμενα της έρευνας να δώσουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα «καλών» συναρτήσεων. Σε επόμενη φάση της πειραματικής διαδικασίας δόθηκαν οι συναρτήσεις $f(x) = ημ(πx)$ και $f(x) = 0$ για εξεταστούν αν είναι «καλές». Σε επόμενη φάση δόθηκαν για μελέτη τέσσερις εικασίες όπως «καμία πολυωνυμική συνάρτηση δεν είναι καλή». Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές χρησιμοποίησαν 4 βασικές στρατηγικές προσέγγισης και χειρισμού αυτής της «νέας» έννοιας ανάλογα με το επίπεδο των γνώσεων και τον βαθμό κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης, της έννοιας της ρίζας, κ.λπ. Κατά την ανάλυση των συμπερασμάτων της έρευνας οι Dahlberg και Housman θεωρούν ότι είναι χρήσιμο να εισάγουμε τους μαθητές σε νέες έννοιες προτείνοντάς τους να δίνουν δικά τους παραδείγματα, από τα οποία θα προκύπτει με τι τρόπο κατανοούν τις έννοιες που έχουν ήδη διδαχθεί, αλλά και αντιπαραδείγματα τα οποία θα έχουν ακριβώς τον ίδιο στόχο.

Οι ερευνητές Orit Hazzan και Rina Zarkis του Τεχνολογικού Ινστιτούτου του Ισραήλ πειραματίστηκαν σε τρεις ομάδες υποψήφιων δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ζητώντας παραδείγματα: α) ενός εξαψήφιου αριθμού ο οποίος να διαιρείται με το 9 και το 17, β) μιας συνάρτησης f για την οποία να ισχύει $f(3) = -2$ και γ) ενός δειγματικού χώρου στον οποίο κάθε ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 2/7. Στη συνέχεια ζήτησαν από τους φοιτητές να εξηγήσουν πώς κατασκεύασαν τα παραδείγματά τους και να δώσουν 5 επιπλέον παραδείγματα. Οι φοιτητές προσέγγισαν το ερώτημα με μια ποικιλία τρόπων ξεκινώντας με δοκιμές όπως για παράδειγμα κάποιοι διάλεξαν έναν αριθμό στην τύχη και έλεγξαν αν διαιρείται με το 9. Άλλοι διάλεξαν έναν αριθμό Ν, ο οποίος κατά την διαίρεσή του με το 17 να αφήνει υπόλοιπο 2 και χρησιμοποίησαν τον αριθμό Ν – 2 για την επόμενη δοκιμή. Ας σημειωθεί ότι ελάχιστοι φοιτητές έδωσαν «απλά παραδείγματα» όπως τον αριθμό 170.000 ως εξαψήφιο διαιρετό με το 17 ή την $y = -2$ ως παράδειγμα της ζητούμενης συνάρτησης.

Τα κατασκευαστικά παραδείγματα όπως τα προηγούμενα αποδεικνύονται δυσκολότερα από τον έλεγχο της διαιρετότητας ενός αριθμού, από τον υπολογισμό της τιμής μιας συνάρτησης ή από την εύρεση της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Επειδή περιέχουν το στοιχείο της αβεβαιότητας και της ελευθερίας στις επιλογές, δημιουργούν προβληματισμούς ως προς την ορθότητα των επιλογών. Άρα το ζητούμενο της «κατασκευής παραδειγμάτων» είναι ένα παιδαγωγικό εργαλείο για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών[3].

3 Στις βιβλιογραφικές μας αναφορές μπορεί ο ενδιαφερόμενος να βρει αρκετές εργασίες που είναι προσανατολισμένες προς μια τέτοια προοπτική.

Το ζήτημα της κατασκευής παραδειγμάτων σχετίζεται άμεσα με την κατασκευή αντιπαραδειγμάτων. Ας αναφερθούμε σε μια σχετική έρευνα. Αυτή διεξήχθη από τους Irit Peled και Orit Zaslavsky μεταξύ καθηγητών Μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με κάποια χρόνια διδασκαλίας στην τάξη. Τους ζητήθηκε να δώσουν αντιπαραδείγματα - με έμμεσο τρόπο ώστε να μην είναι φανερό ότι πρόκειται για προτάσεις που δεν ισχύουν - για τα εξής δύο ζητούμενα:

Α) Δύο ορθογώνια με ίσες διαγώνιες είναι ίσα.

Β) Δύο παραλληλόγραμμα με μια πλευρά και μια διαγώνιο αντίστοιχα ίσες είναι ίσα.

Ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα της έρευνας η οποία για τον σκοπό του βιβλίου δεν έχει σημαντικό ενδιαφέρον, οι ερευνητές ταξινόμησαν τα αντιπαραδείγματα σε τρεις κατηγορίες: σε ειδικά, σε ημι-γενικά και σε γενικευμένα. Αυτή ταξινόμηση είναι χρήσιμη και για άλλες σχετικές έρευνες και πρόθεσή μας είναι να την αξιοποιήσουμε. Ένα αντιπαράδειγμα θεωρείται *ειδικό* όταν έρχεται σε αντίθεση μεν με την ορθότητα της ζητούμενης πρότασης ή στόχο, αλλά δεν παρέχει κάποια ένδειξη ή ιδέα για το πώς μπορεί να αξιοποιηθεί για την κατασκευή άλλων αντιπαραδειγμάτων για το ίδιο ερώτημα. Ένα αντιπαράδειγμα ονομάζεται *ημι-γενικό* όταν μπορεί να μας δώσει κάποιες ιδέες για την κατασκευή παρόμοιων ή σχετικών αντιπαραδειγμάτων, αλλά δεν καλύπτει όλες τις δυνατές μορφές αντιπαραδειγμάτων. Τέλος, ένα αντιπαράδειγμα αποκαλείται *γενικό* όταν παρέχει όλα τα επιχειρήματα που αποδεικνύουν γιατί μια εικασία είναι λανθασμένη και προτείνει μια γενική μέθοδο κατασκευής όλων των σχετικών αντιπαραδειγμάτων. Δίνουμε παραδείγματα των τριών μορφών αντιπαραδειγμάτων με βάση την εικασία «δύο ορθογώνια με ίσες διαγώνιες είναι ίσα». Ένα ειδικό αντιπαράδειγμα είναι ο προσεκτικός σχεδιασμός δύο άνισων ορθογωνίων τα οποία όμως έχουν ίσες διαγώνιες. Ένα ημι-γενικό αντιπαράδειγμα είναι η κατασκευή ορθογωνίων με ίσες διαγώνιες με τέτοιον τρόπο ώστε στο μεν πρώτο να τέμνονται κάθετα και στο δεύτερο να σχηματίζουν οξεία γωνία 45°. Ένα γενικευμένο αντιπαράδειγμα είναι η κατασκευή δύο ισοσκελών τριγώνων με ίσες πλευρές και διαφορετικές γωνίες, οι ίσες προεκτάσεις των ίσων πλευρών σχηματίζουν ορθογώνια τα οποία δεν είναι ίσα, όπως προκύπτει από την ισότητα των τριγώνων.

Δεν είναι όλοι οι ερευνητές σύμφωνοι σε όλα τα σημεία σχετικά μ
τον ρόλο που θα πρέπει να παίζουν τα αντιπαραδείγματα στις δι
φορες βαθμίδες της μαθηματικής εκπαίδευσης. Για παράδειγμα οι Ann
και John Selden στο άρθρο τους που φέρει τον τίτλο «Ο ρόλος των π
ραδειγμάτων στην μάθηση των Μαθηματικών»[4] αναφέρουν τα εξή
«Επειδή η επιτυχία στα Μαθηματικά, ειδικά σε προχωρημένο μετ
πτυχιακό και πτυχιακό επίπεδο φαίνεται ότι σχετίζεται με την ικαν
τητα κατασκευής παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, τίθεται
ερώτημα ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος για ν' αναπτυχθεί αυτή η ικ
νότητα;». Τι ρόλο θα παίζουν όμως αυτά στις χαμηλότερες βαθμίδ
της εκπαίδευσης; Μπορούν οι μικροί μαθητές να κατασκευάζουν π
ραδείγματα και αντιπαραδείγματα ή απλώς αποστηθίζουν τα ήδη π
κατασκευασμένα από άλλους; Τι είναι πιο εύκολο να κατασκευάσει
ποιος, παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα, ή αυτό το ερώτημα αποκτά ν
μα μόνο για κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα, εικασία και απορία;

Αντίστοιχα παιδαγωγικά ερωτήματα τίθενται για το ρόλο των ει
σιών στη μαθηματική εκπαίδευση. Έως ποιο επίπεδο δυσκολίας π
πει να διατυπώνονται τα ερωτήματα - εικασίες που θα θέτει ο δι
σκων; Θα είναι μόνον απλές εφαρμογές της θεωρίας; Θα περιέχ
στοιχεία πρωτοτυπίας και μιας μικρής έρευνας; Μήπως πρέπει να α
θεωρήσουμε ή να προσαρμόσουμε τη διδασκαλία για να ανταποκρι
νται οι μαθητές στην αντιμετώπιση εικασιών και στην κατασκευή α
παραδειγμάτων ή πρέπει να διαμορφώσουμε τέτοιες συνθήκες δι
σκαλίας που να ενσωματώνουν τη δυναμική και την παιδαγωγική ο
των εικασιών και των αντιπαραδειγμάτων; Η εξοικείωση με τον χε
σμό των εικασιών στα Μαθηματικά και κατ' επέκταση με προτάσει
οποίες είναι διατυπωμένες με τέτοιον τρόπο ώστε να μην προκύπ
εκ των προτέρων το τελικό συμπέρασμα, είναι μια διαδικασία μέσω
οποίας ο εκπαιδευόμενος εισέρχεται βαθμιαία στο κλίμα και στη λ
κή της μαθηματικής ανακάλυψης. Αυτό είναι ένα από τα βασικά
τούμενα (προφανώς όχι το μόνο) της μαθηματικής εκπαίδευσης,
λαδή να προετοιμάσει τις νεώτερες γενιές μαθηματικών και επιστ
νων ώστε να είναι σε θέση όχι μόνο να χειρίζονται τα Μαθηματικά
λά και να κάνουν νέες ανακαλύψεις σε αυτά για την προώθηση της
στήμης.

4 Δες τις βιβλιογραφικές παραπομπές.

Τέλος θεωρούμε ουσιώδες να σημειώσουμε ότι πολλά αντιπαραδείγματα δεν προέκυψαν από εικασίες, αλλά ως «εξαιρέσεις» ή αρνήσεις που οι μαθηματικοί θεωρούσαν έως τότε ως αληθείς επειδή δεν είχαν προβλέψει όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μπορεί να περιέχει ένα συγκεκριμένο σύνολο μαθηματικών αντικειμένων.

Οι εικασίες και τα αντιπαραδείγματα από την οπτική της φιλοσοφίας των μαθηματικών

Το έργο του I. Lakatos «Αποδείξεις και Ανασκευές» έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ερμηνεία των διαδικασιών που συμβαίνουν κατά την παραγωγή και απόδειξη των μαθηματικών θεωρημάτων και για τη διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών. Θεωρείται έργο - σταθμός στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, αναπτύσσει τα επιχειρήματα και τις θέσεις του μελετώντας διεξοδικά την ιστορική εξέλιξη συγκεκριμένων εικασιών. Για το λόγο αυτό το έργο του Lakatos απετέλεσε το θεωρητικό υπόβαθρο της δόμησης και προσανατολισμού της εργασίας που προσπαθούμε να συγκροτήσουμε.

Ο ίδιος ο Lakatos θεωρεί ότι σκοπός του έργου του είναι η προσέγγιση ορισμένων προβλημάτων της μεθοδολογίας των Μαθηματικών[5]. Ως «μεθοδολογία» θεωρεί την «ευρετική μέθοδο» του Polya και την «λογική της ανακάλυψης» του Popper[6]. Παράλληλα διακηρύσσει - και αυτή είναι η κεντρική του ιδέα - ότι τα Μαθηματικά δεν αναπτύσσονται με την μονότονη προσθήκη αναμφισβήτητων θεωρημάτων, αλλά με τη βελτίωση υποθέσεων με τη δοκιμή και την κριτική, με τη λογική των αποδείξεων και των ανασκευών[7]. Υπογραμμίζει το γεγονός ότι οι εικασίες (ή τα θεωρήματα) προηγούνται των αποδείξεων στην ευρετική διαδοχή, κάτι που ήταν κοινός τόπος για τους αρχαίους μαθηματικούς και σημειώνει την ρήση του Polya ότι «πρέπει να μαντέψεις ένα μαθηματικό θεώρημα πριν το αποδείξεις»[9]. Το μαθηματικό πρόβλημα που εξετάζει είναι η σχέση που υπάρχει μεταξύ του αριθμού των κορυφών,

5 Στο εξής θα αναφερόμαστε στο βιβλίο του Lakatos «Αποδείξεις και ανασκευές», (δες στις βιβλιογραφικές παραπομπές).
6 Δες Lakatos σελ. 19.
7 Δες Lakatos σελ. 23.
8 Δες Lakatos σελ. 29.
9 Δες Lakatos σελ. 30.

εδρών και ακμών ενός πολυέδρου. Πρόκειται για τον περίφημο τύ
K + E = A + 2 που ανακάλυψαν και «απέδειξαν» οι Καρτέσιος και 'C
λερ. Θέτουμε την λέξη απέδειξαν σε εισαγωγικά, διότι οι δύο αυτοί
γάλοι μαθηματικοί απέδειξαν τον συγκεκριμένο τύπο για μία ορισμέ
μορφή πολυέδρων και όχι στην γενική του περίπτωση. Για τον τύ
αυτό άλλοι μαθηματικοί βρήκαν περιπτώσεις πολυέδρων στα οπο
δεν μπορεί να εφαρμοστεί, δηλαδή ανακαλύφθηκαν αντιπαραδείγμ
τα. Τα αντιπαραδείγματα είναι λοιπόν μία μορφή κριτικής σε κάπο
δημιουργία όπως είναι η διατύπωση μιας μαθηματικής πρότασης; Σύ
φωνα με τον Lakatos αυτό ισχύει. «Οι εικασίες μπορούν να αγνοήσο
τη δυσφορία ή τις υποψίες, όχι όμως και τα αντιπαραδείγματα»[10].
κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος είναι επίσης μια σοβαρή και δη
ουργική εργασία, αφού διευκολύνει τη δουλειά του μαθηματικού ή κ
λύτερα είναι μέρος της δουλειάς του. «Ένα αντιπαράδειγμα ανασκε
άζει μία εικασία όσο και δέκα αντιπαραδείγματα»[11]. Είναι αξιοσημεί
το ότι δύο επιστήμονες οι Lhuiller και Hessel βρήκαν αντιπαράδειγ
για τον τύπο K + E = A + 2 από μία εργασία τους σε ένα θέμα εντ
λώς άσχετο με τη θεωρητική Γεωμετρία. Μελέτησαν ορυκτολογικές συ
λογές παρατηρώντας διπλούς κρυστάλλους στους οποίους ο εξωτερ
κός κρύσταλλος είναι θειϊκού μολύβδου και ο εσωτερικός φθοριούχο
ασβεστίου. Βεβαίως οι γεωμέτρες βρήκαν αντιπαραδείγματα στα οπο
δεν ισχύει ο τύπος του Όυλερ μελετώντας τα λεγόμενα αστεροειδή π
λύεδρα, τα οποία πιθανώς είχε μελετήσει ο Αρχιμήδης και σίγουρα
αστρονόμος Κέπλερ.

Μία άλλη λειτουργία των αντιπαραδειγμάτων είναι ότι ο εντοπισμ
τους τροποποιεί - μερικές φορές ριζικά - τους ορισμούς των εννοιώ
«Νέοι ορισμοί προτείνονται και εξετάζονται όταν εμφανίζονται αντ
παραδείγματα»[12]. Θα μπορούσε κάποιος να μετριάσει τη βαρύτητ
της λέξης αντιπαράδειγμα, η οποία έχει έναν οξύ και επιθετικό τόν
απέναντι σε όσους έχουν κοπιάσει να επινοήσουν αποδείξεις, χρησ
μοποιώντας τη λέξη «εξαίρεση»[13]. Έτσι με τη χρήση αυτού του όρο
μπορούμε να ταξινομήσουμε τις μαθηματικές προτάσεις (τα θεωρή
ματα) σε τρεις κατηγορίες:

10 Δες Lakatos σελ. 31.
11 Δες Lakatos σελ. 35.
12 Δες Lakatos σελ. 39.
13 Δες Lakatos σελ. 49.

Α) Όσες αληθεύουν καθολικά χωρίς περιορισμούς και εξαιρέσεις, όπως λ.χ. ότι το άθροισμα των γωνιών των επίπεδων τριγώνων είναι 180°.

Β) Όσες στηρίζονται σε ψευδείς αρχές και δεν μπορούν με κανένα τρόπο να γίνουν αποδεκτές.

Γ) Όσες στηρίζονται σε αληθείς αρχές και παρά ταύτα επιδέχονται περιορισμούς και εξαιρέσεις σε ορισμένες περιπτώσεις.

Ο Lakatos διακρίνει τα αντιπαραδείγματα σε καθολικά και τοπικά, ανάλογα με το μέγεθος και την ένταση της ισχύος ή της βαρύτητας που εμπεριέχουν για την ανασκευή ριζική ή τοπική μιας εικασίας.

Η αλήθεια ή όχι μιας μαθηματικής πρότασης με τη βοήθεια των αντιπαραδειγμάτων για τον Lakatos έχει ανάλογη σημασία με τη σχεδίαση των «κρίσιμων πειραμάτων» που χρησιμοποιούν οι φυσικές επιστήμες για την απόρριψη μιας ερευνητικής υπόθεσης. Την ιδέα και πρακτική αυτή μελέτησε διεξοδικά ο φιλόσοφος Karl Popper, από το έργο του οποίου επηρεάστηκε ο Lakatos, στα έργα του για την επαληθευσιμότητα ή διαψευσιμότητα των επιστημονικών θεωριών[14]. Η ίδια μέθοδος της κατασκευής αντιπαραδειγμάτων βοηθά στη βελτίωση και αναμόρφωση της ίδιας της μαθηματικής πρότασης και αποκαλύπτει την εσωτερική ενότητα ανάμεσα στη «λογική της ανακάλυψης» και στη «λογική της αιτιολόγησης»[15].

Για λόγους που σχετίζονται με κοινωνικούς παράγοντες που επιδρούν στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης, στη διδασκαλία και στη διάδοσή της, για πολύν καιρό τα αντιπαραδείγματα αποσιωπούνταν, εξορκίζονταν ως τέρατα ή καταχωρίζονταν ως εξαιρέσεις. Η ευρετική μέθοδος και η ανακάλυψη καθολικών αντιπαραδειγμάτων στη διαδικασία της απόδειξης ήταν πρακτικά άγνωστη στα άτυπα Μαθηματικά του πρώιμου 19ου αιώνα[16].

Ο Lakatos θεωρεί ότι δεν υπάρχουν στεγανά ανάμεσα στις αποδείξεις και στις ανασκευές, δηλαδή ανάμεσα στην αρχική μορφή σύλληψης ενός συμπεράσματος (ενός θεωρήματος) και στις διασκευασμένες εκδοχές του που προέρχονται κατά τη διαδικασία αποκλεισμού των

14 Δες Lakatos σελ. 53.
15 Δες Lakatos σελ. 67.
16 Δες Lakatos σελ. 82.

εξαιρέσεων, τον έλεγχο των ειδικών περιπτώσεων και τον έλεγχο των ορίων ισχύος και εγκυρότητας αυτού του συμπεράσματος. Συνοψίζει μάλιστα τη διαδικασία ανακάλυψης σε τρεις ευρετικούς κανόνες[17]:

Α) Απόδειξη και ανασκευή της εικασία με την αναζήτηση αντιπαραδειγμάτων.

Β) Αν βρεθεί καθολικό αντιπαράδειγμα, τροποποιούμε την αρχική εικασία, ώστε να μην απορρίπτεται από αυτό.

Γ) Αν βρεθεί τοπικό αντιπαράδειγμα, ελέγχουμε αν πρόκειται για καθολικό αντιπαράδειγμα και προχωρούμε στο βήμα Β.

Η ανακάλυψη μιας πληθώρας αντιπαραδειγμάτων σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών έχει καταστήσει τους μαθηματικούς ιδιαίτερα προσεκτικούς, τόσο ως προς τη διατύπωση εικασιών, τόσο και ως προς τη συστηματική διερεύνηση των δυνατών και «αδύνατων» περιπτώσεων και εκδοχών. Τον 18ο αιώνα τα «παραπλανητικά» σχήματα οδήγησαν σε αναξιοπιστία τις γεωμετρικές αποδείξεις, και τον 19ο αιώνα ξαναπήρε τα σκήπτρα η αριθμητική διαίσθηση με τη βοήθεια της θεωρίας των πραγματικών αριθμών[18]. Αυτή η πρακτική έχει επηρεάσει και τα Σχολικά Μαθηματικά και στα οποία οι γεωμετρικού τύπου αποδείξεις και προσεγγίσεις θεωρούνται κατώτερες από τις αριθμητικο-αναλυτικές, κάτι που επηρεάζει ασφαλώς και τον τρόπο διδασκαλίας τους και τη δόμηση των σχολικών Αναλυτικών προγραμμάτων. Η σύγχρονη μαθηματική «επανάσταση της αυστηρότητας» είναι ουσιαστικά η επαναφορά της Αριθμητικής ως κυρίαρχης θεωρίας μέσω ενός τεράστιου προγράμματος αριθμητικοποίησης των Μαθηματικών από τον Cauchy και τον Weierstrass[19]. Όμως η άκριτη αποδοχή αυτού του προγράμματος ως καθολικού υποδείγματος και στα Σχολικά Μαθηματικά παράγει πολλά εμπόδια κατανόησης των εννοιών και θυσιάζει την αποτελεσματικότητα στο βωμό της αυστηρότητας.

Η ανασκευή των μαθηματικών εικασιών επηρεάζει σημαντικά και τη διαμόρφωση των εννοιών που εμπλέκονται με αυτές. Δεν είναι λοιπόν καθόλου τυχαίο ότι οι ορισμοί των Μαθηματικών αποκτούν τέτοια μορφή και τρόπο διατύπωσης που πολλές φορές φαίνονται παράξενοι και

17 Δες Lakatos σελ. 84.
18 Δες Lakatos σελ. 88.
19 Δες Lakatos σελ. 185.

μυστηριώδεις. Οι μαθηματικοί συνήθως αποφεύγουν τα μακροσκελή θεωρήματα προσφεύγοντας στο εναλλακτικό τέχνασμα των μακροσκελών ορισμών κι έτσι στα θεωρήματα εμφανίζονται μόνο οι όροι που έχουν οριστεί (π.χ. «κανονικό πολύεδρο»). Όμως οι ορισμοί καταλαμβάνουν τεράστιο χώρο στις «αυστηρές» διατυπώσεις ενός θέματος, ενώ τα τέρατα (δηλ. τα αντιπαραδείγματα) που οδήγησαν σε αυτούς σπανίως μνημονεύονται. Έτσι για παράδειγμα ο ορισμός του «κανονικού πολυέδρου» καταλαμβάνει 45 γραμμές στην Βρετανική Εγκυκλοπαίδεια του 1962[20]. Είναι κοινό μυστικό στους ερευνητές μαθηματικούς ότι «τόσο οι εικασίες όσο και οι έννοιες πρέπει να περάσουν από το καθαρτήριο των αποδείξεων και των εικασιών»[21].

Ένα άλλο σημείο που θεωρούμε ότι έχει ενδιαφέρον είναι ότι η φιλοσοφική έρευνα και μελέτη της Λογικής των μαθηματικών ανακαλύψεων, οδήγησε τον Lakatos στη σύγκριση της ευρετικής μεθόδου των Μαθηματικών με την έρευνα στις άλλες επιστήμες. Η μαθηματική ευρετική μοιάζει πολύ με την επιστημονική ευρετική, όχι μόνο επειδή και οι δύο είναι επαγωγικές, αλλά επειδή και οι δύο χαρακτηρίζονται από εικασίες, αποδείξεις και ανασκευές. Η αναζωογόνηση της μαθηματικής ευρετικής τον 20ο αιώνα οφείλεται στον G. Polya. Η επιμονή του στις ομοιότητες, ανάμεσα στην επιστημονική και μαθηματική ευρετική, είναι σύμφωνα με τον Lakatos, από τα κύρια χαρακτηριστικά της αξιοθαύμαστης εργασίας του[22].

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των βασικών θέσεων του Lakatos για την πορεία της ευρετικής διαδικασίας, καταγράφουμε τα στάδια της όπως τα έχει συνοψίζει ο ίδιος[23].

Το σχήμα της μαθηματικής ανακάλυψης αποτελείται από τα εξής στάδια:

1) Διατυπώνεται κάποια αρχική εικασία.

2) Παρουσιάζεται μια απόδειξη: ένα σχηματικό νοητικό πείραμα ή επιχείρημα που αποσυνθέτει την αρχική εικασία σε ένα σύνολο υποεικασιών ή λημμάτων.

20 Δες Lakatos σελ. 89.
21 Δες Lakatos σελ. 141.
22 Δες Lakatos σελ. 117.
23 Δες Lakatos σελ. 190-191.

3) Αναδύονται «καθολικά» αντιπαραδείγματα.

4) Επανεξετάζεται η απόδειξη: εντοπίζονται τα «ένοχα λήμματα» για τα οποία το καθολικό αντιπαράδειγμα είναι και τοπικό.

Τα παραπάνω 4 στάδια αποτελούν τον ουσιώδη πυρήνα της αποδεικτικής ανάλυσης. Συχνά όμως εμφανίζονται μερικά ακόμα τυπικά στάδια:

5) Επανεξετάζονται οι αποδείξεις άλλων θεωρημάτων για να διαπιστωθεί αν απαντάται σ' αυτές το νεότευκτο λήμμα ή η καινοφανής αποδεικτικής καταγωγής έννοια. Τα νέα στοιχεία ίσως βρεθούν στη διασταύρωση πολλών αποδείξεων αποκτώντας έτσι ιδιαίτερο βάρος.

6) Ελέγχονται οι αποδεκτές συνέπειες της αρχικής και τώρα πλέον ανασκευασμένης εικασίας.

7) Αντιπαραδείγματα μεταστρέφονται σε νέα παραδείγματα νέες περιοχές μελέτης ανοίγονται.

Είναι σημαντικό όμως να υπογραμμιστεί ότι η ευρετική της μαθηματικής ανακάλυψης σε επίπεδο ερευνητών διαφέρει από την ευρετική που ακολουθείται κατά τη μελέτη εικασιών σε απλά μαθηματικά προβλήματα και ερωτήματα. Συνεπώς η Διδακτική των Μαθηματικών έχει πολύ δρόμο ακόμη να διανύσει ώστε να καταλήξει σε ασφαλή συμπεράσματα για τις διαδικασίες, νοητικές και άλλες που ακολουθούν οι λύτες των προβλημάτων, πόσο μάλλον να καταλήξει σε προτάσεις σαφείς και εφαρμόσιμες. Επιπλέον πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι το έργο του Lakatos όσο σημαντικό κι αν είναι για την επιστημονική μελέτη και προώθηση της ευρετικής μεθόδου υπόκειται το ίδιο σε ανασκευές και αναθεωρήσεις, κάτι που είναι μοιραίο για όλα τα ανθρώπινα δημιουργήματα.

Βιβλιογραφία

Bernard R. Gelbaum & John Olmsted & J. M. Olmsted, P. Halmos (Editor): (1990). *Theorems and Counterexamples in Mathematics.* Springer-Verlag. N.Y.

Gary L. Wise & Eric B. Hall: (1993). *Counterexamples in Probability and Real Analysis.* Oxford University Press.

Gupta S.L. & Rani Nisha: (1993). *Fundamental Real Analysis.* Vika Publ. House. New Delhi. 3η ανατύπωση 2000.

Iorda Stoianov & Jordan M. Stoyanov (1997). *Counterexamples in Probability, 2e edition.* J. Wiley and Son.

Selden John & Selden Annie: (1995). *Unpacking the logic of mathematical statements.* Educ. Studies in Mathematics, 29, 123-151.

Worrall John & Currie Gregory (Eds): (1978). *Mathematics, science and epistemology.* Vol. 2. In memorial of Imre Lakatos. Cambridge Univ. Press, Ανατύπωση 1993.

Lakatos Imre: (1996). *Αποδείξεις και Ανασκευές. Η Λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης. Χωρίς όνομα μεταφραστή.* Πρώτη αγγλική έκδοση 1976 με 10 επανεκδόσεις. Εκδόσεις Τροχαλία. Αθήνα.