ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Εισαγωγικές Έννοιες

Ευάγγελος Ράπτης

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1.1 Στοιχεία θεωρίας συνόλων - Γραμμικά συστήματα

1.1.1 Εισαγωγή

Η Γραμμική άλγεβρα είναι μέρος της προσπάθειας να κατανοήσουμε το $\chi \acute{\omega} \rho o$ και τον $\kappa \acute{o} \sigma \mu o$ γύρω μας. Θα δούμε στην αρχή σημαντικές έννοιες όπως τα **σύνολα** και οι **απεικονίσεις.**

1.1.2 Πορεία μελέτης

1. Δείτε από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα» τον ορισμό του συνόλου.
2. Δείτε και εδώ μία άλλη ματιά για τα σύνολα.
3. Δείτε και εδώ την ελληνική εκδοχή των παραπάνω.
4. Δείτε τον ορισμό της ισότητας συνόλων:

   Ορισμός 1.1.1. *Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα (θα συμβολίζουμε $A = B$) εάν και μόνο εάν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.*

5. Δείτε προσεκτικά τον ορισμό του κενού συνόλου:

   Ορισμός 1.1.2. *Το σύνολο που δεν έχει στοιχεία το λέμε* **κενό σύνολο** *και το συμβολίζουμε με το σύμβολο $\emptyset$.*

6. Δείτε από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα» τον ορισμό της τομής δύο συνόλων, της ένωσης δύο συνόλων και της διαφοράς δύο συνόλων.

1.1.3 Γραμμικά συστήματα

Σε επόμενα μαθήματα θα μελετήσουμε συστηματικά τα γραμμικά συστήματα, διότι είναι σημαντικό μέρος της Γραμμικής άλγεβρας. Στο σημερινό μάθημα απλά θέτουμε τα ερωτήματα. Αρχίζουμε με ένα παράδειγμα γραμμικού συστήματος τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

Ερωτήματα

1. Τι είναι το σύνολο λύσεων του συστήματος (Σ);
2. Ποια είναι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του (Σ);
3. Υπάρχουν άλλα συστήματα με το ίδιο σύνολο λύσεων;
4. Έχει το σύστημα (Σ) πεπερασμένο ή άπειρο σύνολο λύσεων;
5. Ποιο είναι το «απλούστερο» κατά την γνώμη σας γραμμικό σύστημα με το ίδιο σύνολο λύσεων όπως το (Σ);

1.2 Εσωτερικά γινόμενα - Πίνακες

1.2.1 Εσωτερικά γινόμενα

1. Το σύνολο ζευγών πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^2$. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε το *εσωτερικό γινόμενο* ως εξής:

$$(\alpha_1, \alpha_2) \cdot (\beta_1, \beta_2) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$$

2. Το σύνολο τριάδων πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^3$. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε το *εσωτερικό γινόμενο* ως εξής:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$$

Τα εσωτερικά γινόμενα έχουν έναν σημαντικό ρόλο στη μελέτη της Γραμμικής άλγεβρας. Θα δούμε αρκετά στα επόμενα μαθήματα.

1.2.2 Αρχίζοντας τη μελέτη της Γραμμικής άλγεβρας

1. Δείτε ξανά μία εισαγωγή στην Γραμμική άλγεβρα του καθηγητή W.Strang, MIT εδώ.

2. Διαβάστε την **Εισαγωγή** από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».

3. Ρίξτε επίσης μια ματιά και στη διεύθυνση Εγκυκλοπαίδεια wikipedia. Στη διεύθυνση αυτή θα βρείτε και άλλα ιστορικά στοιχεία, όπως και υλικό για τη Γραμμική άλγεβρα.

4. Αρχίζουμε να μελετάμε τους **πίνακες**. Οι πίνακες είναι πρωταρχικής σημασίας στο μάθημα αυτό. Συνοπτικά μιλώντας (ο ακριβής ορισμός θα δοθεί στη συνέχεια) **πίνακας** είναι μία $\text{ορθογώνια διευθέτηση αντικειμένων}$. Για παράδειγμα το σύμβολο:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

είναι ένας πίνακας 4 γραμμών και 3 στηλών ή ένας 4×3 πίνακας.
Ο όρος στα αγγλικά είναι matrix.

5. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι κύριος στόχος του μαθήματος είναι να μελετήσει τη **δομή** του συνόλου λύσεων Λ του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu} \cdot x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu} \cdot x_\nu = \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1} \cdot x_1 + \alpha_{\mu 2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu} \cdot x_\nu = \beta_\mu \end{array} \qquad (\Sigma)$$

όπου τα α_{ij}, β_i είναι συντελεστές[1].

[1] Χωρίς λάθος μπορούμε να θεωρούμε ότι οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί. Σε επόμενα μαθήματα θα αποσαφηνίσουμε περισσότερο το ρόλο των συντελεστών.

6. Δείτε επίσης το βίντεο εδώ και μελετήστε ένα δικό σας ομογενές σύστημα.

7. Μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

   Ορισμός 1.2.1. *Σύνολο λύσεων του συστήματος* (Σ) *είναι το σύνολο* $\Lambda = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu\}$ *που έχει την ιδιότητα αν θέσουμε*
   $$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \cdots, x_\nu = \xi_\nu$$
   τότε όλες οι εξισώσεις του συστήματος επαληθεύονται.

   Σε κάθε γραμμικό σύστημα (Σ) όπως πιο πάνω αντιστοιχούν δύο πίνακες:
   $$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{pmatrix}$$
   και ο πίνακας
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

   Ορισμός 1.2.2. *Ο πίνακας* $\mathbf{A}$ *ονομάζεται* **πίνακας του συστήματος**. *Ο πίνακας* $\mathbf{E}$ *ονομάζεται* **επαυξημένος πίνακας του συστήματος**.

   Εύκολα παρατηρούμε ότι το ζεύγος των πινάκων A και E κωδικοποιούν πλήρως όλες τις πληροφορίες του συστήματος.

1.2.3 Μελέτη εισαγωγικών εννοιών

1. Δείτε από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» τον ορισμό του **καρτεσιανού γινομένου συνόλων**.

2. Δείτε από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» τον ορισμό της **σχέσης ισοδυναμίας**.

Ορισμός 1.2.3. *Έστω* A *ένα μη-κενό σύνολο.* **Διαμέριση** *του συνόλου* A *είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του* $A_i, i \in I$ *με τις παρακάτω ιδιότητες*

1. $A_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I$

2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ *εάν* $i \neq j$

3. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$

Θα πρέπει κανείς να σταθεί πολύ στον ορισμό αυτό ξεκινώντας τη μελέτη στην Άλγεβρα. Στο σημείο αυτό δείτε το βίντεο εδώ.

Κάθε διαμέριση δημιουργεί μία σχέση μεταξύ των στοιχείων του A ως εξής:

Το στοιχείο x του A σχετίζεται με το στοιχείο y του A εάν το x και το y βρίσκονται σε κάποιο A_i και τα δύο.

Θα συμβολίζουμε $x \sim y$.

Η παραπάνω σχέση έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $x \sim x$ για κάθε στοιχείο x του A. Αυτό είναι άμεσο. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **αυτοπαθής**.
2. Αν $x \sim y$ τότε $x, y \in A_i$ για κάποιο A_i και άρα $y, x \in A_i$, δηλαδή $y \sim x$. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **συμμετρική**.
3. Αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε τα $x, y, z \in A_i$ για κάποιο κοινό A_i οπότε $x \sim z$. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **μεταβατική**.

Μπορούμε εδώ να διατυπώσουμε την παρακάτω:

Πρόταση 1.2.4. *Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Κάθε διαμέριση του συνόλου A επάγει (δημιουργεί) μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A.*

Απόδειξη Άμεση από την παραπάνω συζήτηση. Στην πραγματικότητα αν A ένα μη κενό σύνολο, μία σχέση ισοδυναμίας στο A είναι ένα μη κενό υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A \times A$, δηλαδή $R \subseteq A \times A$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $(x, x) \in R$ για κάθε $x \in A$
2. Αν $(x, y) \in R$, τότε $(y, x) \in R$
3. Αν $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$, τότε $(x, z) \in R$

Πολλές φορές θα συμβολίζουμε ή $(x, y) \in R$ ή xRy ή $x \sim y$. Με βάση αυτόν το γενικό ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας στο μη κενό σύνολο A δημιουργούμε υποσύνολα ως εξής: Αν $x \in A$, τότε

$$[x] = \{y \in A \mid y \sim x\}$$

Κάθε υποσύνολο $[x]$ όπως παραπάνω θα το ονομάζουμε **κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το** x.

Πρόταση 1.2.5. *Έστω $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο μη-κενό σύνολο A.*

1. *Κάθε κλάση ισοδυναμίας $[x]$ περιέχει το x διότι $x \sim x$. Άρα κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι μη-κενό σύνολο.*
2. *Αν $[x]$,$[y]$ δύο κλάσεις ισοδυναμίας, τότε είτε $[x] = [y]$ είτε $[x] \cap [y] = \emptyset$.*
3. $\bigcup\limits_{x \in A} [x] = A$

Απόδειξη: Το σημείο 1 έχει ήδη αποδειχθεί.
Για το σημείο 2 τώρα. Αν $[x] \cap [y] = \emptyset$ είναι δεκτό. Αν $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $\omega \in [x] \cap [y]$ και έτσι $x \sim \omega$ και $y \sim \omega$. Τότε όμως λόγω της μεταβατικής ιδιότητας έχουμε $x \sim y$ και έτσι $[x] = [y]$.

Η τρίτη απαίτηση είναι άμεση, διότι κάθε $x \in [x]$ και έτσι $\bigcup_{x \in A} [x] = A$.

Καταλήγουμε έτσι ότι το σύνολο $[x] \mid x \in A$, δηλαδή το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας σχηματίζει μία διαμέριση του A.

Καταλήξαμε στο παρακάτω πολύ σημαντικό:

Θεώρημα 1.2.6. *Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Υπάρχει μία $1-1$ και επί σχέση*

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{I}$$

όπου $\mathcal{D}$ το σύνολο των διαμερίσεων του A και $\mathcal{I}$ το σύνολο των σχέσεων ισοδυναμίας. Κάθε διαμέριση απεικονίζεται σε μία σχέση ισοδυναμίας που περιγράψαμε πιο πάνω. Αντίστροφα κάθε σχέση ισοδυναμίας δημιουργεί μία διαμέριση που επίσης περιγράψαμε πιο πάνω. Η μία απεικόνιση είναι αντίστροφη της άλλης.

Ορισμός 1.2.7. *Έστω A ένα μη κενό σύνολο και $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο αυτό.*

1. *Το σύνολο $\{[x], x \in A\}$ δηλαδή το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας λέγεται σύνολο-πηλίκο και συμβολίζεται $A/\sim$.*

2. *Η απεικόνιση $A \longrightarrow A/\sim$ με $x \longmapsto [x]$ λέγεται* **προβολή**.

1.2.4 Και άλλες σκέψεις

1. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη σχέση:

   $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow$ η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι ακέραιος αριθμός

   Εξετάστε εάν η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας. Βρείτε και τις κλάσεις ισοδυναμίας, αν είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας. Σκεφθείτε μία γεωμετρική προσέγγιση.

2. Στο σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ ορίζουμε τη σχέση:

   $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow$ το 2 διαιρεί τη διαφορά $\alpha - \beta$

   Δείξτε ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας. Βρείτε και τις κλάσεις ισοδυναμίας.

1.3 Πίνακες και γραμμικά συστήματα

1.3.1 Μελέτη εισαγωγικών εννοιών

1. Δείτε από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» τον ορισμό της απεικόνισης και τα παραδείγματα.

2. Πότε μία απεικόνιση λέγεται ότι είναι $1-1$; Πότε λέγεται επί;

1.3.2 Πορεία μελέτης

1. Μελετήστε την παράγραφο 2.1 του κεφαλαίου 2 (**Πίνακες και Γραμμικές εξισώσεις**) σελίδα 29 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».

2. Μελετήστε τους ορισμούς 2.2.1 , 2.2.2 , 2.2.3 , 2.2.4 καθώς και τα παραδείγματα 2.2.5 , 2.2.6 και 2.2.7 σελ 31 και 32 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».

3. Δείτε στη διεύθυνση εδώ σχετικά με τους πίνακες.

1.3.3 Ασκήσεις

Οι λύσεις των παρακάτω ασκήσεων να γίνουν στοιχειωδώς.

1. Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του παρακάτω συστήματος

$$\begin{aligned} 3x+5y+6z &= 28 \\ x+y+z &= 6 \end{aligned}$$

δηλαδή να βρεθεί το σύνολο Λ όλων των τριάδων (ξ_1,ξ_2,ξ_3) πραγματικών αριθμών, έτσι ώστε αν αντικαταστήσουμε $x=\xi_1, y=\xi_2, z=\xi_3$ να ικανοποιούνται και οι δύο εξισώσεις του συστήματος.

2. Να κάνετε το ίδιο και για το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x+5y+6z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{aligned}$$

3. Αν Λ το σύνολο λύσεων του πρώτου συστήματος και Λ' το σύνολο λύσεων του δευτέρου, να βρεθεί η τομή $\Lambda \cap \Lambda'$.

1.3.4 Σχόλια για τις προτεινόμενες ασκήσεις

1. Για την πρώτη άσκηση βρίσκουμε με οποιονδήποτε τρόπο ότι υπάρχει έστω και μία τριάδα (ξ_1,ξ_2,ξ_3) πραγματικών αριθμών, που είναι λύση. Αργότερα θα πούμε «σίγουρες» διαδικασίες για εύρεση λύσης. Μετά (αφού δηλαδή εξασφαλίσουμε ότι το σύνολο λύσεων Λ είναι μη-κενό) σκεφθείτε «γεωμετρικά» τι περιμένουμε να είναι το Λ. Η πρώτη εξίσωση, λοιπόν, η $3x+5y+6z=28$ του συστήματος από μόνη της παριστάνει ένα επίπεδο στον χώρο που ζούμε[2]. Το ίδιο και η δεύτερη εξίσωση $x+y+z=6$ παριστάνει ένα επίπεδο. Επιστρατεύουμε εδώ τη φαντασία μας για να

[2] Αυτό χρειάζεται απόδειξη.

μαντέψουμε το αποτέλεσμα και τη μαθηματική μας διαίσθηση για να προχωρήσουμε αυστηρά. Αν τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα, τότε δεν τέμνονται και έτσι το σύστημα **δεν** έχει λύσεις, δηλαδή το Λ είναι το κενό σύνολο. Υπάρχουν τώρα οι περιπτώσεις τα δύο επίπεδα να ταυτίζονται ή τα δύο επίπεδα να τέμνονται αλλά να μην ταυτίζονται.

Σκεφθείτε λίγο την προσέγγιση αυτή αφού πρώτα δείτε και το βίντεο εδώ.

2. Η δεύτερη άσκηση αντιμετωπίζεται όπως και η προηγούμενη. Μόνο που στην περίπτωση αυτή κατά προφανή τρόπο το σύστημα έχει λύση την $(0,0,0)$. Σύστημα σαν αυτό το ονομάζουμε **ομογενές σύστημα**.

3. Για το τρίτο ερώτημα σκεφθείτε ότι έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα 4 εξισώσεων.

1.4 Πίνακες και γραμμικά συστήματα

1.4.1 Πίνακες και γραμμικά συστήματα

Θεωρούμε ξανά το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu} \cdot x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu} \cdot x_\nu = \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1} \cdot x_1 + \alpha_{\mu 2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu} \cdot x_\nu = \beta_\mu \end{array} \qquad (\Sigma)$$

1. Αν «ξεχάσουμε» τα $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ και τα σύμβολα της πρόσθεσης, καταλήγουμε σε δύο πίνακες:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \cdots & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \alpha_{3\nu} & \beta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \cdots & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{pmatrix}$$

2. Μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

   Ορισμός 1.4.1. *Ο πίνακας A λέγεται* **πίνακας του συστήματος** *και ο πίνακας C λέγεται* **επαυξημένος πίνακας του συστήματος**.

3. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας A του συστήματος και ο επαυξημένος πίνακας C του συστήματος έχουν **όλες** τις πληροφορίες του συστήματος.

4. **Σημαντικό ερώτημα:** Πως μπορούμε να ορίσουμε αυστηρά ότι ένα σύστημα είναι απλούστερο από κάποιο άλλο;
   Είναι δυνατόν ένα σύστημα (Σ) να μετασχηματισθεί σε κάποιο άλλο απλούστερο (Σ'), ώστε το σύνολο λύσεων του (Σ) να είναι ίσο με το σύνολο λύσεων του (Σ');

5. Το σύνολο των πινάκων με μ γραμμές και ν στήλες και συντελεστές πραγματικούς αριθμούς , το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$.

6. Στο σύνολο των πινάκων ορίζουμε ορισμένες πράξεις:

   6. 1. την πράξη της πρόσθεσης

   6. 2. Την πράξη της αφαίρεσης

   6. 3. Την πράξη του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού με πίνακα

1.4.2 Πορεία μελέτης

1. Μελετήστε την παράγραφο 2.3 του κεφαλαίου 2 (**Πίνακες και Γραμμικές εξισώσεις**) από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» και ιδιαίτερα δείτε τον τρόπο που γίνονται οι παραπάνω τρείς πράξεις.
2. Κατεβάστε και ξεφυλίστε ένα βιβλίο Γραμμικής άλγεβρας κάνοντας κλικ εδώ.
3. Δείτε ξανά στη διεύθυνση εδώ σχετικά με τους πίνακες και τις πράξεις μεταξύ πινάκων.

1.4.3 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών πινάκων

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει επίσης στο μάθημα αυτό είναι ποιές είναι οι αλλαγές που μπορούμε να κάνουμε στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{1\nu}\cdot x_\nu=\beta_1 \\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{2\nu}\cdot x_\nu=\beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu1}\cdot x_1+\alpha_{\mu2}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{\mu\nu}\cdot x_\nu=\beta_\mu \end{array} \qquad (\Sigma)$$

έτσι ώστε το σύστημα να γίνει πιο απλό ως προς τη λύση του. Ποιές είναι οι επιπτώσεις των αλλαγών αυτών στον πίνακα του συστήματος και στον επαυξημένο;

1. Θεωρούμε το παραπάνω σύστημα (Σ) και το σύστημα:

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_{11}+\alpha_{21})\cdot x_1+(\alpha_{12}+\alpha_{22})\cdot x_2+\cdots+(\alpha_{1\nu}+\alpha_{2\nu})\cdot x_\nu &=& \beta_1+\beta_2 \\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{2\nu}\cdot x_\nu &=& \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\ \alpha_{\mu1}\cdot x_1+\alpha_{\mu2}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{\mu\nu}\cdot x_\nu &=& \beta_\mu \end{array} \qquad (\Sigma')$$

2. Παρατηρούμε ότι το δεύτερο σύστημα το πήραμε προσθέτοντας στην πρώτη εξίσωση τη δεύτερη. Παρατηρούμε επίσης ότι η επίπτωση στους αντίστοιχους πίνακες είναι:
   2\. 1. Ο πίνακας A' του συστήματος Σ' προκύπτει από τον πίνακα A του συστήματος Σ προσθέτοντας στην πρώτη γραμμή τη δεύτερη γραμμή.
   2\. 2. Ο επαυξημένος πίνακας C' του συστήματος Σ' προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα C του συστήματος Σ προσθέτοντας στην πρώτη γραμμή τη δεύτερη γραμμή.
3. **Σημαντική παρατήρηση**. Το σύνολο λύσεων Λ του συστήματος (Σ) είναι ίσο με το σύνολο λύσεων Λ' του συστήματος (Σ').

   Απόδειξη[3] Έστω $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\nu)$ ένα στοιχείο του Λ. Τότε η ν-άδα αυτή ικανοποιεί κάθε εξίσωση του Λ και προφανώς κάθε εξίσωση του Λ' και αντίστροφα.
4. Αν κάποια εξίσωση του συστήματος (Σ) πολλαπλασιασθεί με ένα αριθμό διαφορετικό του μηδενός προκύπτει ένα σύστημα (Σ'), του οποίου το σύνολο λύσεων εξακολουθεί να είναι το ίδιο με το σύνολο λύσεων του (Σ).
5. Αν αλλάξουμε τη θέση δύο εξισώσεων του (Σ) το σύνολο λύσεων **δεν** μεταβάλλεται.

[3] Ο αναγνώστης καλείται να κάνει την απόδειξη λεπτομερώς.

6. Παρατηρούμε λοιπόν ότι μπορούμε να κάνουμε κάποιους μετασχηματισμούς στο γραμμικό σύστημα (Σ), χωρίς να μεταβληθεί το σύνολο λύσεων Λ, με σκοπό πάντα να καταλήξουμε σε απλούστερο σύστημα.

7. Οι μετασχηματισμοί του συστήματος (Σ), οδηγούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς τους δύο πίνακες A του συστήματος και C του επαυξημένου πίνακα του συστήματος.

   7. 1. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του πίνακα με ένα στοιχείο $\lambda \neq 0$

   7. 2. Πολλαπλασιασμός της κ-γραμμής με λ και πρόσθεσης του αποτελέσματος στην i-γραμμή , $\kappa \neq i$

   7. 3. εναλλαγή δύο γραμμών

8. Μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

   Ορισμός 1.4.2. *Οι παραπάνω μετασχηματισμοί πινάκων λέγονται* **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών**. *Δύο πίνακες A και B που προκύπτει ο ένας από τον άλλον με επαναλάψη στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών λέγονται* **γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες**.

1.4.4 Πορεία μελέτης

1. Μελετήστε καλά τα παραπάνω.
2. Δείτε τον ορισμό του **κλιμακωτού πίνακα** από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».
3. Δείτε τον ορισμό του **ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα** από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».
4. Δείτε ξανά το βίντεο με την ομιλία του καθηγητή G.Strang εδώ.

1.4.5 Και άλλες Ασκήσεις

1. Έστω (Σ) και (Σ') δύο γραμμικά συστήματα των οποίων οι επαυξημένοι πίνακες C και C' αντίστοιχα ικανοποιούν τη σχέση $C' = \lambda \cdot C$ με $\lambda \neq 0$. Εξετάστε εάν τα σύνολα λύσεων του (Σ) και (Σ') είναι ίσα.

2. Δύο γραμμικά συστήματα (Σ) και (Σ') έχουν επαυξημένους πίνακες C και C' αντίστοιχα. Η μόνη διαφορά των πινάκων αυτών είναι ότι η πρώτη γραμμή του C' είναι το άθροισμα της πρώτης και της δεύτερης γραμμής του C. Εξετάστε εάν το (Σ) και το (Σ') έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

3. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
   Να βρείτε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα A', ο οποίος να είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A.

4. Δείξτε ότι δύο οποιοιδήποτε ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες γραμμοϊσοδύναμοι με τον πίνακα A είναι ίσοι. Διατυπώστε και αποδείξτε ένα θεώρημα σχετικά με τους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες κάθε πίνακα.