ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ ΜΙΑΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Κολέζα Ευγενία, Μαθηματικός-Καθηγήτρια Παν. Ιωαννίνων
Φακούδης Ευάγγελος, Μαθηματικός-Γυμνάσιο Σουφλίου

Εισαγωγή

Τα τελευταία δύο χρόνια έγινε πράξη η αλλαγή των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών σε Δημοτικό και Γυμνάσιο και η εφαρμογή του Δ.Ε.Π.Π.Σ. και του Α.Π.Σ. Αυτό αναμένεται να φέρει σημαντικές αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση αφού οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν κύρια το σχολικό εγχειρίδιο ως το βασικότερο εργαλείο πάνω στο οποίο στηρίζουν τη διδασκαλία τους. Η αξιολόγηση λοιπόν και η κριτική στάση στα σχολικά εγχειρίδια είναι όχι μόνο χρήσιμη αλλά αναγκαία. Εμείς, έχοντας την πρόθεση να ασχοληθούμε με την έννοια της συνάρτησης γιατί διαπερνά τυπικά και άτυπα όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, δημιουργεί ένα πλούσιο πεδίο αναπαραστάσεων, ενοποιεί πολλές περιοχές των μαθηματικών, αλλά και άλλων γνωστικών πεδίων, κάναμε μια ανασκόπηση στην διεθνή βιβλιογραφία για την έννοια της συνάρτησης και την εισαγωγή της στα παγκόσμια αναλυτικά προγράμματα την οποία σας παρουσιάζουμε σήμερα.

Η διαχρονική σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τη μαθηματική εκπαίδευση-Τάσεις και Αντιλήψεις.

Τα Μαθηματικά δεν αφορούν μόνο στη μελέτη αριθμών και σχημάτων, αλλά επίσης τη μελέτη σχέσεων και κανονικοτήτων (Steen, 1990). Η συνάρτηση ως μια μορφή σχέσης είναι βασικό στοιχείο για τα Μαθηματικά, με ευρύτατες εφαρμογές στις άλλες επιστήμες και την καθημερινή ζωή. Η έννοια της συνάρτησης «γεννήθηκε ως αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης αναζήτησης ενός μαθηματικού μοντέλου των φυσικών φαινομένων που περιλαμβάνουν μεταβλητές ποσότητες» (Sfard, 1991:14).

Τις ρίζες της έννοιας της συνάρτησης όπως τη γνωρίζουμε σήμερα πρέπει να τις αναζητήσουμε μάλλον στον 14^{ο} αιώνα στις εργασίες του Γάλλου μαθηματικού Nicole Oresme. Ο Oresme γύρω στο 1350 περιέγραφε τους νόμους της φύσης ως *μορφές εξάρτησης μιας ποσότητας σε σχέση με μια άλλη*, θέτοντας έτσι τις βάσεις για την έννοια της συνάρτησης. Κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα, καθώς οι επιστήμονες ανακάλυπταν όλο και περισσότερα στοιχεία για τους φυσικούς νόμους και καθώς οι μαθηματικοί άρχισαν να συνδέουν την άλγεβρα και τη γεωμετρία, η ιδέα της συνάρτησης έγινε όλο και περισσότερο αναγκαία. Ο Galileo, στη μελέτη της κίνησης, συνέλαβε την έννοια της συνάρτησης *ως σχέση μεταβλητών,* ενώ ο Descartes, στο La Géométrie(1637), στη μελέτη της αλγεβρικής έκφρασης των καμπύλων, έφερε την έννοια της συνάρτησης στην κατασκευή μιας καμπύλης. Στο πλαίσιο της ανάπτυξης της αναλυτικής γεωμετρίας, η λέξη «συνάρτηση» διατυπώνετο σε σχέση με μια γεωμετρική έννοια. Ο Leibniz, το 1692, εισήγαγε τη λέξη συνάρτηση για να «καθορίσει ένα γεωμετρικό αντικείμενο που συνδέεται με μια καμπύλη, παραδείγματος χάριν, μια εφαπτομένη είναι συνάρτηση μιας καμπύλης» (Kleiner, 1989: 283). Το 18^{ο} αιώνα, καθώς τα μαθηματικά άρχισαν να απομακρύνονται από τη γεωμετρική ιδέα και να εστιάζουν προς την αλγεβρική έκφραση, η έννοια της συνάρτησης αντιμετωπίσθηκε κάτω από μια νέα οπτική. Το 1718 ο Johann Bernoulli εισάγει τον πρώτο τυπικό ορισμό της συνάρτησης: «Ονομάζουμε συνάρτηση μιας μεταβλητής μια ποσότητα που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτήν τη μεταβλητή και από σταθερές»(Shuard & Neill, 1977: 18). Το 1748 ο Euler διατύπωσε έναν ορισμό της συνάρτησης που βελτίωσε το 1755. Αυτός ο ορισμός της συνάρτησης υπογράμμιζε *μια σχέση εξάρτησης* μεταξύ ποσοτήτων: « Εάν... κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες κατά τέτοιο τρόπο ώστε εάν αυτές αλλάζουν και οι πρώτες υφίστανται την ίδια αλλαγή, οι πρώτες ποσότητες καλούνται συναρτήσεις των τελευταίων ποσοτήτων» (Kleiner, 1989: 284).

Η προσέγγιση στις συναρτήσεις κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου ήταν αλγεβρική με έμφαση στην αλγοριθμική εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών και τη χρήση εξισώσεων ή τύπων ως μορφές αναπαράστασης. Το 1829 ο Dirichlet (Kleiner 1989: 291) διατύπωσε έναν ορισμό της συνάρτησης που έδινε έμφαση στη σχέση αντιστοιχίας μεταξύ των μεταβλητών ποσοτήτων: « Μια μεταβλητή y είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής x, ορισμένης στο διάστημα $a < x < b$, εάν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x σε αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μια τιμή της μεταβλητής y. Επίσης, είναι άσχετο με ποιο τρόπο αυτή η αντιστοίχηση καθιερώνεται». Σε αυτόν τον ορισμό *η έμφαση μετατοπίζεται από μια σχέση συμμεταβλητότητας που εκφραζόταν στον ορισμό του Euler σε μια σχέση αντιστοίχησης.* Εντούτοις ο κανόνας της αντιστοίχησης δεν είναι σαφής σε αυτόν τον ορισμό, και κατά συνέπεια ο ορισμός επέτρεπε σε όλα τα είδη των σχέσεων να είναι συναρτήσεις.

Περίπου εκατό χρόνια αργότερα το 1939, με την εμφάνιση της αφηρημένης άλγεβρας, οι Bourbaki γενίκευσαν τον ορισμό του Dirichlet. Η συνάρτηση ορίστηκε ως μια *αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων* (Kleiner, 1989: 299).

Ο φορμαλιστικός συνολοθεωρητικός ορισμός των Bourbaki είναι πολύ διαφορετικός από τον αρχικό ορισμό της συνάρτησης ως μορφή εξάρτησης μεταβλητών. Ο ορισμός των Direchlet-Bourbaki επιτρέπει να γίνει η συνάρτηση αντιληπτή ως αυθύπαρκτο μαθηματικό αντικείμενο κάτι που δεν επέτρεπε ο αρχικός ορισμός. Εντούτοις, αυτός ο σύνολο-θεωρητικός ορισμός είναι πάρα πολύ αφηρημένος για μια αρχική εισαγωγή της έννοιας στους μαθητές και είναι ασυμβίβαστος με την εμπειρία τους στον πραγματικό κόσμο.

Η συνάρτηση ως διαδικασία και ως αντικείμενο

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ως παράδειγμα, η Sfard (1991) αναλύει τη διπλή φύση των μαθηματικών εννοιών: αναγνωρίζει σε αυτές μια λειτουργική (:διαδικασία) και μια δομική (:αντικείμενο) όψη. Σύμφωνα με την Sfard οι έννοιες γίνονται αντιληπτές αρχικά ως διαδικασία, για παράδειγμα μέσα από υπολογιστικές διαδικασίες, και στη συνέχεια κατανοούνται ως αντικείμενο. Η δομική αντίληψη μιας έννοιας αναπτύσσεται μέσω τριών βημάτων: της εσωτερίκευσης, της συμπύκνωσης, και της πραγμοποίησης.

Κατά την εσωτερίκευση, «ο μαθητής εξοικειώνεται με τις διαδικασίες-συνήθως υπολογιστικές -που θα οδηγήσουν στη γένεση της νέας έννοιας» (σελ. 18). Κατά τη φάση της συμπύκνωσης, ο μαθητής καθίσταται «όλο και περισσότερο ικανός να σκεφθεί μια διαδικασία συνολικά, χωρίς να περάσει στις λεπτομέρειες» (σελ. 19). Στην περίπτωση της συνάρτησης, οι μαθητές βρίσκονται στη φάση της συμπύκνωσης όταν μπορούν να διερευνήσουν μια συνάρτηση, να φτιάξουν τη γραφική της παράσταση, να συγκρίνουν ή να αναγνωρίσουν συναρτήσεις.

Για παράδειγμα (Sfard 1991, Sfard & Linchevski, 1994) ενώ κάποιος μπορεί να θεωρήσει την έκφραση $3(x+5)+1$ σαν αλγόριθμο, με τον οποίο μπορεί να παραγάγει διάφορα αποτελέσματα, στη φάση της συμπύκνωσης κάποιος μπορεί επίσης να θεωρήσει την ίδια έκφραση ως αυτοτελή αριθμό. Η έκφραση θεωρείται συγχρόνως η διαδικασία και το αποτέλεσμα της διαδικασίας.

Οι δυσκολίες των μαθητών να κατανοήσουν ταυτόχρονα και τις δυο αυτές έννοιες μιας έκφρασης έχουν αναφερθεί ως «δίλημμα διαδικασίας-προϊόντος» («process-product dilemma») **(**Davis, 1975).

Γενικά η όλη διαδικασία μετάβασης από τη «λειτουργική» («operational») στη «δομική» («structural») αντίληψη μιας μαθηματικής έννοιας είναι μια διαδοχή τριών βημάτων. Πρώτα πρέπει να υπάρξει μια διαδικασία που θα εκτελεστεί από τους μαθητές σε ήδη οικεία αντικείμενα, έπειτα θα προκύψει η θεώρηση αυτής της διαδικασίας ως ένα συμπαγές και ανεξάρτητο όλο, και τελικά θα αποκτηθεί η ικανότητα αντίληψης αυτής της νέας οντότητας ως ένα συνεχές αυτοτελές αντικείμενο. Ενώ η εσωτερίκευση και η συμπύκνωση είναι βαθμιαίες διαδικασίες -η Sfard (1991:19) τις χαρακτηρίζει ως «βαθμιαίες, ποσοτικές, παρά ποιοτικές αλλαγές» -, η πραγμοποίηση είναι ένα ξαφνικό ποιοτικό άλμα από αυτό που αρχικά γίνεται αντιληπτό ως διαδικασία, σε ένα νοητικό αντικείμενο, μια αυτοτελής οντότητα που κατέχει ορισμένες ιδιότητες. Η πραγμοποίηση συμβαίνει όταν «μια διαδικασία σταθεροποιείται σε αντικείμενο, σε μια στατική δομή» (σελ.19). Δεδομένου ότι η πραγμοποίηση είναι ένα δύσκολο νοητικό βήμα- η Sfard προτείνει (1) οι νέες έννοιες να μην εισάγονται μέσα από δομικές περιγραφές τους, και (2) οι δομικές αντιλήψεις να μην παρουσιάζονται όσο οι μαθητές μπορούν να κάνουν και χωρίς αυτές.

Η μετατροπή της έννοιας της συνάρτησης από διαδικασία σε αντικείμενο είναι ο τελικός στόχος της διδασκαλίας των συναρτήσεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην πραγματικότητα, η παρουσίαση των συναρτήσεων στα σχολικά εγχειρίδια είναι μια καταγραφή αυτής της διαδικασίας.

Στόχος της διδασκαλίας της συνάρτησης: «Νοητικές εικόνες» ή ορισμοί;

Η κατανόηση του ορισμού δεν διασφαλίζει ούτε υπονοεί την κατανόηση μιας έννοιας. Για να κατανοήσει κάποιος μια έννοια πρέπει να διαμορφώσει την «εικόνα της έννοιας» (:concept image). Η «εικόνα» μιας έννοιας συγκροτείται από το σύνολο των «νοητικών εικόνων» (mental pictures) που έχει κάποιος για μια έννοια και από το σύνολο των ιδιοτήτων που αποδίδει στην έννοια. «Κατά συνέπεια μια γραφική παράσταση μιας συγκεκριμένης συνάρτησης και τα σύμβολα y=f(x) μπορεί να περιλαμβάνονται (μαζί με πολλά άλλα πράγματα) στη «νοητική εικόνα» κάποιου για την έννοια της συνάρτησης. Εκτός από τη νοητική εικόνα μιας έννοιας, στο μυαλό ενός ατόμου μπορεί να υπάρξει ένα σύνολο ιδιοτήτων που συνδέθηκαν με την έννοια. Παραδείγματος χάριν, κάποιος μπορεί να σκεφτεί ότι οι συναρτήσεις πρέπει πάντα να ορίζονται με τη βοήθεια των αλγεβρικών εκφράσεων. Αυτό το σύνολο ιδιοτήτων μαζί με τη νοητική εικόνα θα το ονομάζουμε «εικόνα της έννοιας» (concept image)» (Vinner, 1983:293). Δηλαδή, η «εικόνα μιας έννοιας» περιλαμβάνει όλες τις μη λεκτικές εκφράσεις της έννοιας, οπτικές αναπαραστάσεις, εντυπώσεις και εμπειρίες που δημιουργούνται στο μυαλό μας με την αναφορά του ονόματος της έννοιας (Vinner, 1992).

Ο Vinner(1983) τόνισε ότι το πρώτο πράγμα που πρέπει κάποιος να μάθει προκειμένου να κατανοήσει μια έννοια δεν είναι ο ορισμός της έννοιας, αλλά η απόκτηση εμπειρίας σε σχέση με την έννοια, η οποία και θα συμβάλει στη συγκρότηση της «εικόνας» της έννοιας. Σύμφωνα με τον Vinner κατά τη διαδικασία εκτέλεσης των γνωστικών στόχων, το μυαλό «συμβουλεύεται» περισσότερο την «εικόνα», παρά τον ορισμό της έννοιας.

Οι απόψεις του Vergnaud (1990) σχετικά με την νοητική διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών, δεν διαφέρουν στην ουσία από αυτές του Vinner. Για να μελετήσει και να κατανοήσει τον τρόπο που οι μαθηματικές έννοιες αναπτύσσονται νοητικά μέσω της ενδοσχολικής και εξωσχολικής εμπειρίας, ο Vergnaud πρότεινε τη θεώρηση μιας έννοιας (:concept) ως σύζευξη τριών συνόλων: C = (S, I, R), όπου:

S: είναι το σύνολο καταστάσεων που καθιστούν την έννοια χρήσιμη και σημαντική.

I: είναι το σύνολο λειτουργικών σταθερών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τα άτομα για την διερεύνηση αυτών των καταστάσεων.

R: είναι το σύνολο των συμβολικών, γλωσσικών, γραφικών ή κινητικών αναπαραστάσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν τις σταθερές, τις καταστάσεις και τις διαδικασίες (σελ. 6). Τρεις μορφές αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης αναφέρονται συνήθως: *η αριθμητική* (χρήση πινάκων), η *γεωμετρική* (χρήση γραφικών παραστάσεων), και η *συμβολική* (χρήση εξισώσεων).

Το σύνολο των καταστάσεων που αναδεικνύουν τη σημασία και το πεδίο εφαρμογής μιας μαθηματικής έννοιας συγκροτούν αυτό που ο Freudenthal (1971, 1973, 1982, 1983) ονόμασε «φαινομενολογική πηγή» της έννοιας. Σύμφωνα με την φαινομενολογική προσέγγιση του Freudenthal, η διδασκαλία ενός μαθηματικού αντικειμένου, για παράδειγμα μιας μαθηματικής έννοιας, πρέπει να ξεκινάει ενσωματώνοντας εκείνα τα φαινόμενα από τον φυσικό κόσμο ή την καθημερινότητα, που επιδέχονται οργάνωσης μέσω της συγκεκριμένης έννοιας, η κατανόηση της οποίας αποτελεί το στόχο της διδασκαλίας. Έτσι αντί να αναζητάμε αόριστα υλικό για να παρουσιάσουμε μια δεδομένη έννοια, η διδακτική φαινομενολογία προτείνει να αναζητήσουμε και να διερευνήσουμε εκείνες τις καταστάσεις ή τα φαινόμενα που προσφέρουν στο μαθητή την ευκαιρία, μέσω της «μαθηματικοποίησης», να κατασκευάσει την επιθυμητή έννοια.

«Όλες οι σφαίρες της πρακτικής (τα ακαδημαϊκά μαθηματικά είναι μια από αυτές), στις οποίες χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά, είναι, σε γενικές γραμμές, πηγές νοήματος μιας έννοιας. Ποιες διαστάσεις του νοήματος μιας έννοιας θα έπρεπε οι σχεδιαστές του προγράμματος σπουδών να λάβουν υπόψη; Το νόημα και η σημασία της έννοιας μέσα στο θεωρητικό δίκτυο των ακαδημαϊκών μαθηματικών, η ιστορική γένεση και η ανάπτυξή της, οι χρήσεις της για την επίλυση προβλήματος μέσα και έξω από τα μαθηματικά, οι αρχικές διαισθητικές ερμηνείες της έννοιας, οι ρίζες της στην καθημερινή σκέψη και γλώσσα, όπως και τα διάφορα εργαλεία και οι αναπαραστάσεις της έννοιας. Το πώς αυτές οι πηγές αξιοποιούνται και το σχετικό βάρος κάθε μιας εξαρτάται από την κοινωνική έννοια που αποδίδεται στην μαθηματική εκπαίδευση. Η εφαρμογή των προγραμμάτων σπουδών από τους δασκάλους διαμορφώνεται από τις πεποιθήσεις τους, ειδικότερα, από αυτό που θεωρούν σημαντικές πτυχές του νοήματος μιας έννοιας» (Biehler, 2005:61)

Το νόημα μιας έννοιας μπορεί να μεταβληθεί σε σχέση με νέες εφαρμογές της έννοιας, νέες εννοιολογικές σχέσεις ή διαφορετικές αναπαραστάσεις. Το σύνολο των καταστάσεων, φαινομένων ή εφαρμογών που προσδίδουν νόημα σε μια έννοια είναι αυτό που ο Vergnaud (1990),αποκάλεσε εννοιολογικά πεδία (*conceptual fields),* η Boero(1992) *σημασιολογικά πεδία (semantic fields)* και ο Biehler(2005) σημασιολογικά τοπία (*semantic landscape*s).

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων

Στην αναζήτηση καταστάσεων που μπορούν να λειτουργήσουν ως «άτυπα σημεία εκκίνησης» στα οποία θα στηριχθεί η γνωστική ανάπτυξη έχουν αναφερθεί πολλοί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μεταξύ αυτών, ο Tall (στο Bishop et al., 1996) υποστηρίζει ότι οι μαθητές πρέπει πρώτα να βιώσουν μια ποιοτική, σφαιρική, εισαγωγή στη μαθηματική έννοια, μέσα από την οποία θα προκύψει η ανάγκη για μια πιο τυπική περιγραφή της έννοιας. Η σύνδεση των πραγματικών καταστάσεων με την γραφική τους αναπαράσταση είναι, για τον Tall, πρωταρχικός στόχος. Εντούτοις, υποστηρίζει ότι η σχέση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων και των πραγματικών φαινομένων είναι κατ' ανάγκη περιορισμένη σε μια σύντομη εισαγωγική φάση, γιατί το βάρος πρέπει να δοθεί στις συναρτήσεις και τις γραφικές παραστάσεις σε ένα καθαρά μαθηματικό πλαίσιο. Αντίθετα με τον Tall, ο Kaput (1994), δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη σχέση μεταξύ μαθηματικών συμβολικών συστημάτων όπως είναι οι γραφικές παραστάσεις και της καθημερινής πραγματικότητας. Επισημαίνει την ύπαρξη χάσματος μεταξύ αυτού που ονομάζει «νησί των τυπικών μαθηματικών» και της «ηπειρωτικής χώρας» της πραγματικής ανθρώπινης εμπειρίας. Διευκρινίζει ότι η ύπαρξη του χάσματος οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη διαφορά μεταξύ των *μαθηματικών συναρτήσεων* που ορίζονται από τους αλγεβρικούς τύπους, και των *εμπειρικών συναρτήσεων* που περιγράφουν τα καθημερινά φαινόμενα της ζωής. Ο Kaput (1989) υποστηρίζει επίσης ότι «δεν υπάρχει κανένα απόλυτο νόημα για τη μαθηματική λέξη συνάρτηση, αλλά μάλλον ολόκληρος νοηματικός ιστός υφασμένος από πολλές φυσικές και νοητικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και από σχέσεις μεταξύ αυτών των αναπαραστάσεων» (σελ. 168). Η κατανόηση της συνάρτησης, επομένως, μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την κατανόηση των διαφόρων μορφών αναπαράστασής της, και του τρόπου περάσματος από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, διότι «η γνωστική σύνδεση των αναπαραστάσεων δημιουργεί ένα σύνολο που είναι περισσότερο από το άθροισμα των μερών του» (σελ. 179).

Μια ενδιαφέρουσα ιδέα για μια πρώτη προσέγγιση στις συναρτήσεις συνίσταται στο να ζητηθεί από τους μαθητές να σκιαγραφήσουν ποιοτικά καμπύλες που περιγράφουν χαρακτηριστικά γνωρίσματα κάποιων διαδικασιών, κάτι που εφάρμοσε στις αρχές του προηγούμενου αιώνα ο Hofler (1910), υιοθετώντας την άποψη του Klein για ανάδειξη των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της συνάρτησης. Για παράδειγμα, η κατάσταση που διερευνάται μπορεί να είναι η μορφή εξάρτησης της στάθμης του νερού με το χρόνο, όταν διάφορα μπουκάλια γεμίζουν ομοιόμορφα. Στο πλαίσιο μιας τέτοιας κατάστασης, οι μαθητές ενδέχεται να ρωτήσουν εάν είναι δυνατό να βρεθεί πάντα ένας τύπος για κάθε καμπύλη που χαράσσουν με ποιοτικό διαισθητικό τρόπο. Η αναπαράσταση μιας καμπύλης από έναν τύπο είναι ένας από τους βασικούς διδακτικούς στόχους στη διδασκαλία της συνάρτησης.

Το λογισμικό που διατίθεται σήμερα διευρύνει το σύνολο των δραστηριοτήτων που μπορούν να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία. Συγχρόνως, όμως, θέτει σημαντικά ζητήματα στα οποία ο Balacheff (1993) αναφέρεται ως «υπολογιστική μεταφορά» («computational transposition»), και που μπορούν να προκαλέσουν εννοιολογικές συγκρούσεις. Πρόκειται για μετατοπίσεις νοήματος που οφείλονται στο μετασχηματισμό της γνώσης σε ένα άλλο αναπαραστασιακό σύστημα. Για το λογισμικό, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις δεν είναι αφηρημένες μαθηματικές οντότητες, αλλά ένας πεπερασμένος κατάλογος αριθμών ή pixels που δίνουν μια κατά προσέγγιση τιμή.

Η παραδοσιακή προσέγγιση για την εισαγωγή στις αλγεβρικές εκφράσεις είναι υπολογιστική. Εντούτοις, λόγω της πολυπλοκότητας της εκτέλεσης τέτοιων υπολογισμών, αυτή η διαδικαστική όψη της συνάρτησης γρήγορα αντικαθίσταται με την άποψη της συνάρτησης ως αντικείμενο με αυτόματο πέρασμα στις εξισώσεις. Οι Schwartz και Yerushalmy (1992) θεωρούν ότι, μέσω της δυνατότητας των πολλαπλώς συνδεδεμένων αναπαραστάσεων που προσφέρει η τεχνολογία, οι μαθητές μπορούν να συνεχίσουν να βλέπουν τις αναπαραστάσεις ως διαδικασία. Οι εξισώσεις μπορούν να αντιμετωπισθούν ως σύγκριση δύο συναρτήσεων, $f(x)=g(x)$, με ανάλογη ερμηνεία των λύσεων των εξισώσεων. Η σύνδεση διαφόρων μορφών αναπαράστασης προσφέρει στους μαθητές την απαραίτητη ποιοτική και ποσοτική ανατροφοδότηση για την ενίσχυση της κατανόησης των συμβολικών χειρισμών τους.

Η διαχρονική σημασία της συνάρτησης στα αναλυτικά προγράμματα

Αν υιοθετηθεί ο ορισμός των Bourbaki στο σχολείο, πρέπει να διδαχθούν πρώτα τα σύνολα και οι σχέσεις. Η επιλογή αυτή οδηγεί σε μια θεωρητική προσέγγιση των συναρτήσεων που οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν. Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες όταν αυτές εισάγονται με τρόπους που ακολουθούν την ιστορική τους εξέλιξη. Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης δείχνει ότι η συγκεκριμένη έννοια κατανοήθηκε αρχικά λειτουργικά ως σχέση μεταξύ μεταβλητών μεγεθών. Επιπλέον, τα εγχειρίδια που ορίζουν συχνά τη συνάρτηση ως σύνολο διαταγμένων ζευγών αρχίζουν συνήθως τη συζήτηση με τη σχέση και εισάγουν τη συνάρτηση ως ειδικό είδος σχέσης. Αλλά η σχέση είναι πιο αφηρημένη από τη συνάρτηση. Κατά συνέπεια η υποτιθέμενη παιδαγωγική αξία να πρέπει να μαθευτεί η σχέση πριν από τη συνάρτηση είναι, σύμφωνα με τη γνώμη του Thorpe (1989), λανθασμένη. Ο Freudenthal (1973) επίσης υποστήριξε έντονα ότι «για την εισαγωγή στη συνάρτηση, οι σχέσεις μπορούν να παραλειφθούν» (σελ. 392).

Στην πορεία των αιώνων, η αντίληψη σχετικά με τη συνάρτηση άλλαξε:

• από ένα πραγματικό φαινόμενο που βιώνεται μέσω της μελέτης, παραδείγματος χάριν της κίνησης, σε μια αυθαίρετη έννοια.

• από μια σχέση εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών, σε μια αντιστοιχία μεταξύ αυθαίρετων συνόλων

• από μια διαδικαστική, σε μια δομική θεώρηση.

• από μια γεωμετρική, σε μια συμβολική αναπαράσταση.

Εντούτοις, η σημασία της για τα μαθηματικά και τις επιστήμες γενικότερα, δεν αμφισβητήθηκε ποτέ. « *Οι συναρτήσεις και τα μοτίβα είναι ένα από τα κεντρικά θέματα των μαθηματικών γενικά*» (NCTM, 1989:98). «Η έννοια της συνάρτησης είναι πιθανώς η σημαντικότερη ιδέα στα μαθηματικά… ενσωματωμένη σε πολλά σημεία των προγραμμάτων άλγεβρας και γεωμετρίας σήμερα» (Froelich, Bartkovich, & Foerester 1991:1).

Εκείνο που αμφισβητήθηκε και προκάλεσε έντονες αντιπαραθέσεις ήταν ο τρόπος παρουσίασής της στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών και στα σχολικά εγχειρίδια.

Η προνομιούχος θέση της συνάρτησης στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών, οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στον Felix Klein καθηγητή των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Gottingen στη Γερμανία. Το 1893 σε μια διάλεξη που έδωσε στο International Congress of Mathematicians στο Chicago, υπογράμμισε τη ζωτική σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τα σχολικά μαθηματικά. Κατά τη διάρκεια του International Conference of Mathematicians στη Ρώμη το 1908, επανέλαβε ότι η έννοια της συνάρτησης «δεν ήταν, απλά μια μαθηματική μέθοδος, αλλά η καρδιά και η ψυχή της μαθηματικής σκέψης» (Hamley, 1934:53). Την άποψη αυτή συμμερίστηκαν σημαντικοί μαθηματικοί εκείνης της εποχής, όπως ο H. Moore, ο D. E. Smith και ο E. R. Hendrick. Οι δυο τελευταίοι, διετέλεσαν ιδρυτικά στελέχη της National Committee on Mathematical Requirements (NCMR), η οποία το 1923 σε μια αναφορά με τίτλο «Η έννοια της συνάρτησης στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης» υπογράμμιζαν τον κομβικό ρόλο της συγκεκριμένης έννοιας και των γραφικών αναπαραστάσεων για τα σχολικά μαθηματικά. (NCMR 1923, σελ. 38). Η συνάρτηση θεωρήθηκε ως «ενοποιητική» έννοια στη λογική ότι μπορούσε να συνδέσει όχι μόνο διάφορες περιοχές των μαθηματικών, αλλά να λειτουργήσει ως ενοποιητικός κρίκος γι' αυτό που σήμερα θα ονομάζαμε διεπιστημονική προσέγγιση. Εντούτοις, την εποχή εκείνη, υπήρχε δυσκολία στην υλοποίηση μιας τέτοιας πρωτοποριακής πρότασης. Παρά το ότι ήδη από το 1920 είχε δημιουργηθεί το NCTM, υπό την αιγίδα αρχικά της MAA, οι διαφορές μεταξύ ερευνητών μαθηματικών και εκπαιδευτικών μαθηματικών εμπόδισαν να πραγματοποιηθεί η συγκεκριμένη μεταρρυθμιστική πρόταση.

Επιπλέον, σύμφωνα με τον Kleiner (1989), το πρόβλημα με την έννοια της συνάρτησης, την περίοδο εκείνη ήταν ότι δεν υπήρχε συναίνεση ως προς τον τρόπο που θα εισαγόταν: με μια γεωμετρική μορφή (υπό μορφή καμπύλης), αλγεβρικά (υπό μορφή τύπου-«αναλυτική έκφραση»), ή λογικά (υπό μορφή ορισμού);

Το 1938 εμφανίζεται ένα κείμενο του E. R. Hedrick στο *The American Mathematical Monthly*, με τίτλο *Function Concept in Elementary Teaching and in Advanced Mathematics*, που αναλύει λεπτομερώς το ρόλο των συναρτήσεων στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών στοιχειώδους και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον συνιστά ένα είδος απάντησης στις απόψεις των οπαδών της προοδευτικής εκπαίδευσης (με τους Dewey και Kilpatrick ως βασικότερους εκπροσώπους) σχετικά με τη χρησιμότητα του μαθηματικού τρόπου σκέψης στην καθημερινή ζωή: «Μπορούμε να ενσωματώσουμε τη μαθηματική διδασκαλία με τη ζωή και με την επιστήμη; Μπορούμε πράγματι ... εάν επιλέξουμε την έννοια της συνάρτησης ως κεντρικό θέμα» (Hedrick, 1938:448).

Θεωρούμε αυτό το κείμενο εξαιρετικής σημασίας λόγω του ότι παρέχει ιδέες για τον τρόπο ενσωμάτωσης της έννοιας της συνάρτησης ακόμα και στα σύγχρονα εγχειρίδια, γι' αυτό και θα σχολιάσουμε αρκετά σημεία του.

Ο Hedrick προσδιορίζει τη συνάρτηση ως μια μορφή εξάρτησης μιας ποσότητας από άλλες ποσότητες, άποψη που διαφέρει από τον συνολοθεωρητικό ορισμό των Bourbaki. Από τη στιγμή που επιλέγεται αυτός ο ορισμός, γράφει ο Hedrick, προκύπτουν δυο ερωτήματα:

(1) Από ποιες ποσότητες εξαρτάται η ποσότητα που διερευνούμε; και

(2) Ποιος είναι ο ακριβής τρόπος εξάρτησης;

Υποστηρίζει ότι η καλλιέργεια της «*λειτουργικής σκέψης*» των μαθητών επιτυγχάνεται οποιαδήποτε από τις δύο αυτές ερωτήσεις τεθούν και συζητηθούν στη τάξη.

Μισόν αιώνα μετά τον Hedrick, οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης φαίνεται να διατυπώνουν την ίδια άποψη: «Η μάθηση των συναρτήσεων και η επιτυχής χρησιμοποίησή τους για την επίλυση προβλημάτων απαιτεί μια διανοητική ικανότητα που συνίσταται στα εξής: (1) Παρατήρηση, τεκμηριωμένη αναζήτηση, δημιουργία και αναπαραγωγή των εξαρτήσεων μεταξύ των μεταβλητών, και (2) Διατύπωση και έλεγχος παραδοχών σχετικά με το είδος της εξάρτησης. Αυτή η διανοητική ικανότητα ονομάζεται «*λειτουργική σκέψη*» (*functional thinking)* και ήταν βασική έννοια για τη μαθηματική εκπαίδευση ήδη από το 1905» (Vollrath, 1986:387)

Για τον Hedrick, η λειτουργική σκέψη μπορεί να τεθεί ως στόχος ακόμα και στην στοιχειώδη εκπαίδευση, χωρίς απαραίτητα να γίνει χρήση της λέξης «συνάρτηση». Εάν ένα μήλο κοστίζει 20 σεντς, πόσο θα κοστίσουν τα πέντε; Κάθε τέτοια ερώτηση στην αριθμητική συσχετίζει δυο ή περισσότερες ποσότητες. Το πρόβλημα μπορεί να φαίνεται υπερβολικά απλό, εντούτοις ξεκινώντας από τέτοιες απλές καταστάσεις γεννιέται η ιδέα της αλληλεξάρτησης δυο ποσοτήτων στο μυαλό. Επιπλέον η επιλογή του στοιχείου που καθορίζει την απάντηση δεν είναι πάντα προφανής. Η ερώτηση: «Τι χρειάζεται να ξέρουμε;», είναι κρίσιμη για τη συνειδητοποίηση των αλληλοεξαρτημένων ποσοτήτων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση: Την τιμή του ενός μήλου και τον αριθμό των μήλων. Χρειάζεται, δηλαδή, να συνειδητοποιήσουμε ποιες είναι οι ποσότητες που συσχετίζονται.

Η περίπτωση της άλγεβρας δεν είναι πολύ διαφορετική. Η κλασική, παραδοσιακή διδασκαλία δίνει κυρίως έμφαση σε φορμαλισμούς που απέχουν πολύ από τη λειτουργική σκέψη. Και όμως, η λειτουργική σκέψη θα μπορούσε να αναπτυχθεί με κατάλληλο διδακτικό χειρισμό των εξισώσεων. Στην πραγματικότητα η αναζήτηση οποιασδήποτε εξίσωσης κινητοποιεί τη λειτουργική σκέψη. Η τιμή του αγνώστου επιδιώκεται πάντα μέσω κάποιων άλλων ποσοτήτων που συσχετίζονται με τον άγνωστο. Φτιάχνουμε την εξίσωση εκφράζοντας *πάντα* τη σύνδεση μεταξύ των γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων. Αυτός είναι ο βασικός στόχος της διδασκαλίας των εξισώσεων. Οι μαθητές δυσκολεύονται να λύσουν προβλήματα εξισώσεων διότι δεν κατανοούν το κείμενο που περιγράφει τον τρόπο σύνδεσης των ποσοτήτων.

Οι απόψεις αυτές του Hedrick για τη διδασκαλία της άλγεβρας έχουν βρει στις μέρες μας σχεδόν απόλυτη εφαρμογή. Σήμερα, υπάρχει πολύ ενδιαφέρον για την παρουσίαση και διδασκαλία της άλγεβρας μέσα από μια προσέγγιση που στηρίζεται στην ιδέα της συνάρτησης (function-based approach). Το εγχείρημα διευκολύνεται από τα εργαλεία που παρέχονται από την τεχνολογία, δεδομένου ότι η συμπεριφορά των συναρτήσεων μπορεί να εξερευνηθεί με ποικίλους τρόπους χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό υπολογιστών: «Οι υπολογιστές παρέχουν στους δασκάλους και τους μαθητές νέα εργαλεία που τους βοηθούν στην κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων, μέσω της χρήσης γραφικών, και αλγεβρικών αναπαραστάσεων. Συνεπώς, η τεχνολογία παρέχει ένα όχημα στους μαθητές για να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση των συναρτήσεων επιτρέποντας μια εστίαση στην αναπαράσταση χωρίς κουραστικούς υπολογισμούς» (Cooney & Wilson, 1993:146).

Κάτω από την επίδραση της θεωρίας των Ρεαλιστικών Μαθηματικών, η διερεύνηση και ανάδειξη της σχέσης μεταξύ ποσοτήτων επιχειρείται κυρίως μέσα από πραγματικά προβλήματα, επιλογή που μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά σε μια σημαντική δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα: «οι περισσότεροι μαθητές δεν γίνονται ποτέ ιδιαίτερα ικανοί στην άλγεβρα και ακόμη και εκείνοι που τα καταφέρνουν στο χειρισμό των συμβολικών εκφράσεων, συχνά μπλοκάρουν όταν βρίσκονται αντιμέτωποι με έναν στόχο που απαιτεί την εφαρμογή εκείνων των δεξιοτήτων σε καταστάσεις ρεαλιστικής πολυπλοκότητας» (Fey, 1989:199)

Τα καινούργια προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά στην Ολλανδία, αλλά και εκείνα που προορίζονται για Αμερικανούς μαθητές και γράφτηκαν λαμβάνοντας υπ' όψη τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά (RME) και τα Standards του NCTM (MiC curriculum) εστιάζουν

την άλγεβρα «στη μελέτη των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων, με τη χρήση λεκτικών περιγραφών (φυσική γλώσσα), πινάκων, γραφικών παραστάσεων και τύπων, δίνοντας εκτενή προσοχή στο ρόλο των μεταβλητών. Η άλγεβρα χρησιμοποιείται ως γλώσσα για να περιγράψει τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων (functional perspective) και για την περιγραφή αριθμητικών ή γεωμετρικών κανονικοτήτων (generalization perspective)»(van der Kooij 2001, σελ. 38). Βασικός στόχος της διδασκαλίας είναι η μελέτη των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών (η μελέτη της συμμεταβλητότητας). Οι μαθητές μαθαίνουν πώς να περιγράφουν αυτές τις σχέσεις με ποικίλες αναπαραστάσεις, και πως να συνδέουν τις αναπαραστάσεις. Συγκεκριμένα στο πρόγραμμα σπουδών «Mathematics in Context» (MiC curriculum) οι ενότητες της άλγεβρας είναι οργανωμένες γύρω από τρία θέματα.
Το πρώτο θέμα ονομάζεται *Εκφράσεις και Τύποι* και περιλαμβάνει την αναγνώριση, την ανακάλυψη, και έπειτα την περιγραφή γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων. Οι βασικές έννοιες που απαιτούνται για τα αλγεβρικά μοτίβα είναι: μεταβλητές, τυπικές εκφράσεις, εξισώσεις, και ανισότητες.
Το δεύτερο θέμα *Εξισώσεις και Ανισότητες* εστιάζει στους περιορισμούς στις τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή. Οι περιορισμοί που επιβάλλονται από την κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα οδηγούν στις εξισώσεις και τις ανισότητες που αναπαριστούν το πρόβλημα. Εξετάζονται κυρίως γραμμικές εξισώσεις και οι μαθητές μαθαίνουν να ερμηνεύουν και να επικυρώνουν τη λύση λαμβάνοντας υπόψη το πλαίσιο της μαθηματικής εξίσωσης ή της ανισότητας, καθώς επίσης και το πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος.
Το θέμα *Γραφικές Παραστάσεις* εξετάζει τις δυναμικές διαδικασίες. Μια δυναμική διαδικασία εστιάζει στην αλλαγή, ειδικά στην αλλαγή κατά τη διάρκεια του χρόνου.
Για τον Hedrick, στη γεωμετρία, η λειτουργική σκέψη εμφανίζεται στη μορφή των τύπων. Το ότι το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι το τετράγωνο της πλευράς του είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση. Υπάρχουν και άλλες ενδιαφέρουσες ιδέες στη γεωμετρία. Για παράδειγμα, αν το τρίγωνο καθορίζεται από δύο πλευρές και τη περιεχόμενη γωνία, οι άλλες πλευρές *πρέπει να είναι συναρτήσεις* των τριών δεδομένων στοιχείων. Αυτή είναι, για τον Hedrick, πραγματική γεωμετρία.
Στην αναλυτική γεωμετρία, τώρα, αυτό που έχει σημασία είναι να μπορεί κάποιος να δείξει γραφικά το είδος της σχέσης που περιγράφεται από μια εξίσωση. Δεν χρειάζεται να επιλέξει κάποιος δύσκολες εξισώσεις για να ασκηθούν οι μαθητές στη λειτουργική σκέψη. Αρκούν εξισώσεις της μορφής $xy = k$, $y = nx$, $y = (ax+b)/(cx+d)$, $y = \sin x$, κλπ.
Εάν αυτές οι εξισώσεις συνδεθούν και με αντίστοιχες καταστάσεις από τη φυσική, τότε η λειτουργική σκέψη θα ενισχυθεί ακόμη περισσότερο.
Σύμφωνα με τον Hedrick η καλλιέργεια της λειτουργικής σκέψης μπορεί να γίνει σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, στη Β΄ λυκείου υπάρχουν αναφορές σε εφαπτομένη κύκλου, έλλειψης και υπερβολής (κυρίως εξισώσεις εφαπτόμενων). Η κατασκευή τους δεν γίνεται με χρήση ειδικών οργάνων κατασκευής εφαπτόμενων, αλλά μέσα από ιδιότητες που αποκαλύπτονται στις ιδιότητες των γραμμών. Δεν υπάρχει αναφορά στον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης. Αυτό που έχει σημασία είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης αναπαριστά το ρυθμό μεταβολής. Η εύρεση των εξισώσεων των εφαπτόμενων στις καμπύλες δεν είναι από μόνη της ιδιαίτερα σημαντική: το σημαντικό είναι η εύρεση της κλίσης της εφαπτομένης και η συνειδητοποίηση του νοήματός της. Αλλά ακόμα και στη μελέτη της ευθείας στη Β΄ Γυμνασίου δεν γίνεται καμία σύνδεση της κλίσης με την πρακτική της αξία. Είναι εύκολο

να ισχυρίζεται ένα εγχειρίδιο ότι δίνει έμφαση στη λειτουργική σκέψη, αλλά όταν τα παραδείγματα που δίνονται είναι οι γνωστές ελλείψεις και υπερβολές, μπορεί κάποιος να αμφισβητήσει αυτές τις καλές προθέσεις. Από την άλλη, υπάρχουν πολλά καλά παραδείγματα που βασίζονται στις ψ=αχ , ψ=α, ψ=e^x, ψ=ημχ, όπου υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα οι μαθητές να αποκτήσουν λειτουργική σκέψη. Εάν για παράδειγμα υπάρξει συζήτηση για ρυθμούς μεταβολής (δηλ παραγώγους), και παραγώγους συναρτήσεων θέσης και ταχύτητας (δηλ νέες συναρτήσεις), υπάρχει περισσότερη πιθανότητα εξάσκησης της λειτουργικής σκέψης

Ξαναγυρίζοντας στην αρχή. Τελικά, πως πρέπει να παρουσιάζονται οι συναρτήσεις στα σχολικά εγχειρίδια;

Στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, ο Felix Klein στο βιβλίο του «Elementary mathematics from a higher standpoint», υποστήριξε ως απαραίτητη μια επανεισαγωγή των γεωμετρικών και οπτικών πτυχών των μαθηματικών εννοιών, με το σκεπτικό ότι μια καθαρά φορμαλιστική προσέγγιση δεν μπορεί να παρέχει μια αποδεκτή βάση για τη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών. Μια ιδιαίτερη έκφραση αυτής της μεταρρυθμιστικής ιδέας ήταν η έμφαση στη «λειτουργική σκέψη» ως ένας από τους σημαντικότερους στόχους των σχολικών μαθηματικών.

Περίπου σαράντα χρόνια μετά, με τη μεταρρύθμιση των νέων μαθηματικών η παραδοσιακή πτυχή της έννοιας της συνάρτησης ως «σχέσης μεταξύ μεγεθών» υποτιμήθηκε. Είναι χαρακτηριστική η δήλωση του Max Beberman (1958),επικεφαλής της Committee on School Mathematics (UICSM), που ανέλαβε να αποκαταστήσει το κύρος των καθαρών μαθηματικών, απαλλάσσοντας τα από κάθε ασάφεια οφειλόμενη στη συσχέτισή τους με την καθημερινή λογική: «Από τη σκοπιά της σημειολογίας όπου κάθε ουσιαστικό οφείλει να έχει ένα σημαίνον μας οδήγησε να δώσουμε ακριβείς περιγραφές των σχέσεων και των συναρτήσεων. Η συνήθης ασάφεια που περιβάλλει τη λέξη συνάρτηση εξαφανίζεται όταν ένας μαθητής συνειδητοποιεί ότι μια συνάρτηση είναι μια οντότητα, ένα σύνολο διαταγμένων ζευγών, στα οποία δυο ζεύγη δεν έχουν κοινό πρώτο μέλος» (σελ. 22). Ο ανωτέρω ορισμός μοιάζει έντονα με αυτόν των Bourbaki.

Η κίνηση των «Νέων Μαθηματικών» στις δεκαετίες του-60 και -70, συνέδεσε τις συναρτήσεις με τη συνολοθεωρία, ορίζοντάς τες ως αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων ή ως σύνολα διαταγμένων ζευγών. Οι υποστηρικτές της κίνησης χρησιμοποίησαν το επιχείρημα της ακρίβειας και γενίκευσης που προσφέρει ένας τέτοιος ορισμός. Σύμφωνα με αυτή τη λογική, αν και ένας πίνακας, μια γραφική παράσταση, ή μια λεκτική περιγραφή περιγράφουν μια συνάρτηση, τίποτα από αυτά δεν μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση. Αντίθετα, οι επικριτές της κίνησης στήριζαν τη διαφωνία τους-μεταξύ άλλων-, στο επιχείρημα ότι «αυτή η προσέγγιση δίνει στους μαθητές μια «στατική» αίσθηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν εξετάζει την αφθονία των λειτουργικών σχέσεων που είναι ως στόχος πολύ σημαντικότερος» (Cooney, 1996).

Κάποιοι (Thorpe,1989:13) χαρακτήρισαν την έμφαση στον συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης σαν ένα από τα «μεγάλα» λάθη της κίνησης των «Νέων Μαθηματικών».

Ο Vinner (1983, 1992) υποστήριξε ότι οι ορισμοί μπορεί να αποτελέσουν εμπόδιο στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών και ότι υπάρχει μια σύγκρουση μεταξύ της αυστηρής δομής των μαθηματικών και τη γνωστική διαδικασία της απόκτησης μιας μαθηματικής έννοιας. Οι μαθητές μπορεί να είναι ικανοί να διατυπώσουν έναν ορισμό μιας έννοιας,

αλλά το να κατανοήσουν το νόημα μιας έννοιας είναι ένα πολύ δύσκολο γνωστικό εγχείρημα.
Είκοσι χρόνια μετά την κίνηση των «Νέων Μαθηματικών», το 1980, το NCTM δημοσίευσε την *Agenda For Action* που καθόρισε ως εστιακό σημείο στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών την επίλυση προβλήματος. Σχετικά με την συνάρτηση, αποφασίσθηκε «να διασφαλισθεί μια ισχυρή εννοιολογική βάση πριν να παρουσιασθεί η συνάρτηση με την τυπική γλώσσα και τον τυπικό συμβολισμό…η μελέτη των συναρτήσεων πρέπει να στηριχθεί στις εμπειρίες των μαθητών (NCTM Standard, 1989:154).
Οι ερευνητές συμφωνούν στο ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να εκτιμήσουν το βαθμό στον οποίον οι συναρτήσεις μπορούν να περιγράφουν σχέσεις στον πραγματικό κόσμο, και οι οποίες μπορούν να απεικονισθούν μέσω των γραφικών παραστάσεων, πριν περάσουν σε πιο φορμαλιστικές θεωρήσεις. «Οι μαθητές πρέπει να ενδιαφερθούν για τη μεταβλητότητα και την αναζήτηση κανονικοτήτων, πριν να παρουσιασθούν οι ορισμοί και οι κλασικές συναρτήσεις» (Sierpinska, 1992: 32). Οι Dreyfus και Eisenberg (1982) ομοίως πρότειναν να εισαχθούν οι συναρτήσεις κατά τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιηθούν η διαίσθηση και η εμπειρία των μαθητών. Το πόσο αυτό είναι εφικτό δεδομένης της προ-παιδείας των δασκάλων τους στην κουλτούρα των συνολοθεωρητικών μαθηματικών, αποτελεί ζήτημα προς διερεύνηση.
Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κάποιος ότι ο τρόπος που προτείνεται να εισάγεται σήμερα η συνάρτηση δεν διαφέρει -σε γενικές γραμμές- από εκείνον που αναπτύχθηκε αρχικά από τον Γαλιλαίο όταν μελέτησε τα φυσικά προβλήματα της κίνησης. Οι σύγχρονες τάσεις στη μελέτη της συνάρτησης στα σχολικά μαθηματικά όπως η μοντελοποίηση, η ανάλυση στοιχείων, η σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο και οι διεπιστημονικές εφαρμογές δεν είναι νέες ιδέες. Ούτε και ο στόχος της εσωτερικής σύνδεσης των μαθηματικών εννοιών μέσω της συνάρτησης είναι καινούργιος. Είχε διατυπωθεί από τον Klein το 1908, πριν από ακριβώς εκατό χρόνια. Εκείνο που έχει αλλάξει, ίσως, είναι οι συνθήκες που φαίνεται να ευνοούν σήμερα την πραγματοποίηση του στόχου. Η παροχή εργαλείων από τη σκοπιά της τεχνολογίας και η επίσημη αποδοχή μέσω των προγραμμάτων σπουδών αυτού του τύπου προσέγγισης αποτελούν ευοίωνες προϋποθέσεις. Επειδή, όμως, η έρευνα έχει δείξει ότι ο τρόπος που διδάσκεται μια έννοια έχει άμεση σχέση με τον τρόπο που αυτή η έννοια παρουσιάζεται στα εγχειρίδια και με τις γνώσεις, αντιλήψεις και πεποιθήσεις των δασκάλων και καθηγητών απαιτείται συστηματική διερεύνηση και των δυο αυτών παραμέτρων.

Αντί επιλόγου

Η έννοια της συνάρτησης είναι μια σύνθετη έννοια. Κατ’ αρχήν γιατί υπάρχουν πολλοί τρόποι αναπαράστασής της (γραφικές παραστάσεις, βελοδιαγράμματα, τύποι, πίνακες, συμβολικές εκφράσεις, λεκτικές περιγραφές, διατεταγμένα ζεύγη) καθένας από τους οποίους υποστηρίζει και μια διαφορετική πτυχή της έννοιας. Η κατανόηση της έννοιας προϋποθέτει την κατασκευή πολλαπλών αλληλοσυνδεόμενων (με την έννοια της ικανότητας μετάφρασης από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη) νοητικών αναπαραστάσεων. Δεύτερον, η έννοια της συνάρτησης εμπεριέχει ένα σύνολο άλλων εννοιών (πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, αντιστροφή, σύνθεση κλπ) και συνδέεται άμεσα με άλλες έννοιες (ποσότητα, μεταβλητή, λόγος κλπ) των οποίων το νόημα δεν είναι προφανές για τους μαθητές. Δεν μπορείς να συζητήσεις για τη συνάρτηση χωρίς αναφορά σε αυτές τις έννοιες. Τρίτον υπάρχουν πολλοί ορισμοί για τη συνάρτηση (σχέση εξάρτησης, αντιστοίχηση, σύνολο διατεταγμένων ζευγών) που παρά το γεγονός ότι είναι μαθηματικά ισοδύναμοι, δεν είναι γνωστικά ισοδύναμοι.

Όλες αυτές οι δυσκολίες κάνουν τη διατύπωση μιας διδακτικής πρότασης -και κατά προέκταση την διατύπωση μιας άποψης για τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας στα σχολικά εγχειρίδια-, ένα εξαιρετικά δύσκολο εγχείρημα.

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών- σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης- θα μπορούσαν να αναλυθούν ως προς την «μαθηματική» και ως προς την «παιδαγωγική» τους διάσταση. Συγκεκριμένα, όσον αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο η ανάλυση θα μπορούσε να γίνει ως προς τους εξής άξονες:

1) Τυπικές και άτυπες μορφές διαπραγμάτευσης της έννοιας στις διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης

2) Τρόπος σύνδεσης λειτουργικής και δομικής φύσης της έννοιας

3) Μορφές αναπαράστασης και τρόποι σύνδεσης αυτών των μορφών

4) Εσωτερικές συνδέσεις με άλλες μαθηματικές περιοχές (εξισώσεις, ανισώσεις, μοτίβα, γεωμετρία κ.α.),

5) Εξωτερικές συνδέσεις με άλλα επιστημονικά πεδία όπως οι Φυσικές επιστήμες, η Οικονομία κ.α.

6) Χρήση της έννοιας σε πραγματικά προβλήματα (π.χ. μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων μέσω συναρτήσεων),

Όσον αφορά την «παιδαγωγική» διάσταση ενδιαφέρον θα ήταν να διερευνηθεί το κατά πόσο είναι συνεπή τα νέα σχολικά εγχειρίδια με τη θεωρία μάθησης του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού που υιοθετείται από το Π.Ι. Ποιος είναι ο ρόλος της γλώσσας που χρησιμοποιούν; (για παράδειγμα «προστάζουν» ή «προτρέπουν», επιβάλουν ορισμούς και διαδικασίες ή καθοδηγούν σε μια διαδικασία επανεφεύρεσης, διευκολύνουν τη συνεργατική μάθηση ή περιορίζονται σε ατομικές αλγοριθμικές δραστηριότητες;) Ποιες είναι οι γλωσσικές απαιτήσεις και πόσο αντιστοιχούν στις ικανότητες και τις εμπειρίες των μαθητών; Ποιους ρόλους αναδεικνύουν για καθηγητές και μαθητές; Υπάρχει επιβολή ενός μονοδιάστατου πολιτισμικού πλαισίου ή αναδεικνύουν ένα πλουραλιστικό πλαίσιο με στοιχεία από διάφορες κοινωνικοπολιτισμικές ταυτότητες;

Αναφορές

Balacheff, N. (1993). Artificial intelligence and real teaching. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (131-15). Berlin: Springer.

Beberman, M. (1958). *An emerging program of secondary mathematics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example, in *Meaning in Mathematics Education*, 61-81, Springer US

Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, Ch., Kilpatrick, J. and Laborde, C. (Eds.) (1996). *International Handbook on Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Boero, P. (1992). The crucial role of semantic fields in the development of problem solving skills in the school environment. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Femandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 77-91). Berlin: Springer.

Cooney, T. J., & Wilson, M. R. (1993). Teachers' thinking about functions: Historical and research perspectives. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.) *Integrating research of the graphical representation of functions*. (pp. 131- 158). Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum.

Cooney, T. (1996). Developing a topic across the curriculum: functions. In T. Cooney, S. Brown, J. Dossey, G. Schrage, & E. Wittman. (Eds.), Mathematics, pedagogy, and secondary teacher education. (pp. 27 - 96), Portsmouth, NH: Heinemann.

Davis, R. B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children's mathematical Behavior* 1(3), 7–35.

Dreyfus, T, & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, 360-380.

Hamley (1934). *Functional and Relational Thinking in Mathematics*. New York: Teachers College Press.

Hedrick, E. R. (1938). Function Concept in Elementary Teaching and in Advanced Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 45(7), 448-455.

Fey, J. (1989). School Algebra for the year 2000. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp.199 -213), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: Reidel..

Freudenthal, H. (1982). Variables and functions. In *Proceedings of the Workshop on Functions*, Organized by the Foundation for Curriculum Development, Enschede.

Freudenthal, H.(1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* D. Reidel, Dordrecht.

Froelich, G. W., Bartkovich, K. G., & Foerester, P. A. (1991). Connecting mathematics. In C. R. Hirsch (Eds.) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series, grades 9 - 12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kaput. J.J.(1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 379–397). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,

Kleiner, I.(1989). Evolution of the Function Concept: a Brief Survey. *College Math. Jour.* 20, 282-300.

National Committee on Mathematical Requirements. (1923). *The reorganization of mathematics in secondary education.* Oberlin, OH: Mathematical Association of America.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Author.

Schwartz, J & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. . In Harel, G and Dubinsky, E. (Eds.). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp.261-289). West LaFayette. IN: Mathematical Association of America..

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Sfard, A.(1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). MAA Notes no. 25. Washington DC: Mathematical Association of America.

Shuard, H. & Neill, H. (1977). *The mathematics curriculum: From graphs to calculus*. London: Blackie.

Steen, L. A. (Ed.) (1990). *On the shoulders ofgiants.* Washington: National Academy Press.

Thorpe, J. (1989). Algebra: What should be teach and how should we teach it? In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp.11-24). *Reston,* VA: NCTM.

Van der Kooij, H. (2001). Modelling and algebra: How 'pure' shall we be? In J.F. Matos, W. Blum (Eds.) *Modelling and Mathematics Education ICTMA9: Applications in Science and Technology* (pp 171-184).Horwood Publishing, Chichester, England.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notation of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 14(3), 293-305.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In G. Hard & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-2 13). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Vollrath, H. J. (1986). Search strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 17(4), 387-400.