# Η Μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα όπως Δια-μορφώνεται Μέσα από τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τα Σχολικά Βιβλία Δημοτικού-Γυμνάσιου

***Ελένη Δημητριάδου***

*Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών Ανατολικής Θεσσαλονίκης*
*Περιφερειακή Δ/νση Π/θμιας & Δ/θμιας Εκπαίδευσης Κεντρικής Μακεδονίας*

*Η κατανόηση της αλγεβρικής γλώσσας στηρίζεται σε τρεις βασικές έννοιες-κλειδιά, τη μεταβλητή, την ισότητα και την εξίσωση. Οι δυσκολίες κατανόησης και μάθησης των εννοιών αυτών οφείλονται στις διαφορετικές μορφές, σημασίες ή χρήσεις τους, ενώ ερευνητικά πορίσματα προτείνουν ένα προ-αλγεβρικό στάδιο διδασκαλίας για την άμβλυνση του προβλήματος. Το ερώτημα που τίθεται επομένως είναι σε ποιο βαθμό αυτό το προ-αλγεβρικό στάδιο έχει προβλεφθεί από τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα, σε ποια φάση της εκπαίδευσης τοποθετείται και κατά πόσο θέτει σαφείς, συνεπείς και αποτελεσματικούς στόχους. Στην εργασία μας ερευνούμε τα ζητήματα αυτά, μέσα από τη μελέτη των βασικών εννοιών της αλγεβρικής γλώσσας, όπως αυτές παρουσιάζονται στα νέα βιβλία της Στ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου.*

## Εισαγωγή

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα συνδέονται με την κατανόηση της αλγεβρικής γλώσσας σε στοιχειώδες επίπεδο και επικεντρώνονται στις έννοιες της μεταβλητής, της ισότητας και της εξίσωσης. Ερευνητές αποδίδουν αυτές τις δυσκολίες στο γνωστικό άλμα ή τη διδακτική ρήξη μεταξύ αριθμητικής και αλγεβρικής γλώσσας. Παράλληλα επισημαίνουν ελλείψεις σε επίπεδο γνώσεων και κατανόησης εννοιών και πράξεων της αριθμητικής που είναι απαραίτητες για την κατασκευή των αλγεβρικών εννοιών και πράξεων, και προτείνουν ένα προ-αλγεβρικό στάδιο διδασκαλίας για την ομαλή μετάβαση του μαθητή από την αριθμητική στην άλγεβρα (Boulton-Lewis at al. 2000, 1997a, Driscoll1983, Filloy & Sutherland 1996, Herscovics & Kieran 1980).

Για να γίνει αποτελεσματική οποιαδήποτε προσπάθεια στον τομέα αυτό, βασική προϋπόθεση είναι ο σχεδιασμός αναλυτικών προγραμμάτων με σαφείς διδακτικούς στόχους στο θέμα της μετάβασης, και σχολικά βιβλία που να υπηρετούν με συνέπεια και αποτελεσματικότητα αυτούς τους στόχους. Μια άλλη προϋπόθεση είναι η κατάλληλη επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και των δύο βαθμίδων, ώστε να ενημερωθούν και να ευαισθητοποιηθούν στο θέμα αυτό. Τα βασικά στοιχεία που θα πρέπει να περιλαμβάνει μια τέτοιου είδους ενημέρωση είναι η ύλη των Μαθηματικών που οι μαθητές διδάχθηκαν ή πρόκειται να διδαχθούν, οι δυσκολίες κατανόησης και οι παρανοήσεις σχετικά με τις αριθμητικές και αλγεβρικές έννοιες, και προτάσεις για διδακτικές προσεγγίσεις που αποσκοπούν στην άμβλυνση του προβλήματος της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Σε ότι αφορά την ελληνική πραγματικότητα, έρευνες στο παρελθόν έχουν διαπιστώσει παρανοήσεις και λάθη μαθητών Γυμνασίου σε στοιχειώδεις αλγεβρικές έννοιες και έχουν ασκήσει κριτική στα σχολικά συγγράμματα για τον τρόπο παρουσίασης αυτών των εννοιών (Σιγάλας 1991, Δεμίρη κ.ά. 1994, Λεμονίδης 1996, Βερύκιος 2003).

Πρόσφατα έχουν κυκλοφορήσει νέα σχολικά βιβλία για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο βασισμένα σε αναμορφωμένα Αναλυτικά Προγράμματα (Α.Π.), τα οποία διέπονται από μια κοινή φιλοσοφία στηριγμένη στην «ενεργητική» και «διαθεματική» προσέγγιση της γνώσης. Σε ότι αφορά το περιεχόμενο, όλη σχεδόν η ύλη της Α΄ Γυμνασίου είναι επανάληψη και συμπλήρωση του Δημοτικού (ενδεικτικός είναι ο τίτλος «Αριθμητική-Άλγεβρα» του Α΄ μέρους του βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου). Θα μπορούσε να πει κανείς ότι, τουλάχιστον σε επίπεδο Α.Π. και σχολικών βιβλίων, επιχειρείται να αποτελέσουν η Στ΄ Δημοτικού και η Α΄ Γυμνασίου ένα προθάλαμο της άλγεβρας. Παρουσιάζει λοιπόν ενδιαφέρον να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό έχει αναπτυχθεί αυτό το προ-αλγεβρικό επίπεδο στα νέα βιβλία και κατά πόσο θέτει σαφείς, συνεπείς και αποτελεσματικούς στόχους.

## Οι δυσκολίες κατά τη μετάβαση από την Αριθμητική στη Άλγεβρα

Οι αλλαγές που πρέπει να κάνει ο μαθητής για να προσεγγίσει την αλγεβρική γλώσσα αντιστοιχούν σε γνωστικά άλματα για έννοιες και πράξεις και τα οποία διαχωρίζουν τον ένα τρόπο σκέψης από τον άλλο. Η κατανόηση της στοιχειώδους άλγεβρας στηρίζεται στις πρωταρχικές έννοιες: μεταβλητή, σύμβολο ισότητας και εξίσωση, οι οποίες εμφανίζονται σε διαφορετικές μορφές, σημασίες ή χρήσεις (Boulton-Lewis at al. 1997a, Driscoll1983, Filloy & Sutherland 1996, Herscovics & Kieran 1980, Λεμονίδης 1996).

**(α) Η μεταβλητή** είναι μια έννοια που διατρέχει το Α.Π. από το Δημοτικό μέχρι το Λύκειο. Οι διαφορετικές μορφές και καταστάσεις στις οποίες απαντάται είναι συχνά αντιφατικές :

✓ **Ως άγνωστος έχει μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή:** σε εξισώσεις.

✓ **Ως μέσο γενίκευσης έχει απροσδιόριστη τιμή:** σε κανόνες αριθμητικής, αλγεβρικές σχέσεις, τύπους ($Δ= δ \cdot π + υ$, α, 2α, 3α,..., $Ε = β \cdot υ$).

Η αντίληψη που επικρατεί στους μαθητές, λόγω επίδρασης της αριθμητικής, είναι ότι ***η μεταβλητή έχει μια μόνο συγκεκριμένη τιμή***. Στην περίπτωση αυτή παραστάσεις του τύπου 3α+5α ή 3x δεν έχουν νόημα για τους μαθητές, γιατί δεν είναι γνωστή η τιμή των μεταβλητών τους (Δεμίρη κ.ά., 1994).

**(β) Το σύμβολο της ισότητας** χρησιμοποιείται επίσης με διαφορετικές σημασίες.

✓ Η σημασία που κυριαρχεί στο Δημοτικό είναι ότι **δίνει ένα αποτέλεσμα.** Π.χ. 5+2 =7, με την έννοια «*αν προσθέσουμε 2 στο 5 θα πάρουμε 7*».

✓ **Η σημασία της ισοδυναμίας**. Π.χ. σε εξισώσεις του τύπου 3x–5=x –1 ή σε ισοδύναμα κλάσματα $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

✓ Στους τύπους **προσδιορίζει** αυτό που βρίσκεται αριστερά. Π.χ. στον τύπο $Ε=α^2$, προσδιορίζει τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού τετραγώνου.

Η αντίληψη που επικρατεί στους μαθητές, λόγω της εμπειρίας τους από την αριθμητική, είναι ότι το "=" σημαίνει: ***δίνει ένα αποτέλεσμα*** ή ***κάνε πράξεις για να βρεις ένα αποτέλεσμα***. Αυτή η αντίληψη έχει ως συνέπεια να καταστρατηγείται η συμμετρική και μεταβατική ιδιότητα της ισότητας (Λεμονίδης,1996) είτε σε περιπτώσεις όπου οι πράξεις γίνονται επιλεκτικά (33 + 7 = 40 – 5 = 35), είτε στην επίλυση εξισώσεων όπου το "=" χρησιμοποιείται άλλοτε για να δηλώσει ότι «*ο άγνωστος γίνεται*»: 3x =12 =12 **:** 3 = 4 και άλλοτε ότι «*η εξίσωση γίνεται*»: 4x - 1 = 5 + x = 3x = 6 = x = 2.

Τη χρήση του "=" με τη σημασία «δίνει ένα αποτέλεσμα», τη συναντάμε τόσο στα προηγούμενα βιβλία του Γυμνασίου (Σιγάλας, 1991), όσο και στα νέα βιβλία, ιδιαίτερα όταν εμπλέκονται μονάδες μέτρησης. Φαίνεται μάλιστα ότι αυτή η χρήση είναι μάλλον τυχαία και ασυνεπής. Έτσι στο ίδιο βιβλίο έχουμε διαφορετική αντιμετώπιση: «$2856 \cdot \frac{19}{119} = 456$ €» και «$\frac{15}{100} \cdot 170$ € = 25,50 €» (Βανδουλάκης κ.ά 2007, Α΄ τάξη, σ. 82), ή «y=2,5-1,6=0,9 (m)» και «100-20=80 €» (Βλάμος κ.ά. 2007, Β΄ τάξη, σ.50 & σ.70 αντίστοιχα).

**(γ) Η εξίσωση** σηματοδοτεί τη διαφορά μεθόδου μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας (Filloy & Sutherland 1996, Boulton-Lewis at al. 2000). Ειδικότερα οι δυσκολίες κατανόησης της αλγεβρικής γλώσσας σχετίζονται με το γνωστικό άλμα ανάμεσα στις γνώσεις που απαιτούνται για την επίλυση αριθμητικών εξισώσεων με αντίστροφες διαδικασίες και αποδόμηση (εφαρμόζονται στην Στ΄ Δημοτικού & Α΄ Γυμνασίου) και στις γνώσεις που απαιτούνται για την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων με αλγοριθμικές διαδικασίες που εμπλέκουν τον άγνωστο (εφαρμόζονται στις επόμενες τάξεις). Με την πρώτη μέθοδο μπορούν να λυθούν εξισώσεις του τύπου x+5=15 ή 3x+10=16, όπου η ισότητα έχει μια **«αριθμητική» έννοια: δίνει ένα αποτέλεσμα**. Πράγματι, στο αριστερό μέλος σημειώνεται μια σειρά πράξεων με αριθμούς, ενώ στο δεξί μέλος βλέπουμε το αποτέλεσμα των πράξεων. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να λυθούν αν με αφετηρία τον αριθμό στο δεξί μέλος, γίνουν οι αντίστροφες πράξεις στο αριστερό. Στις εξισώσεις όμως του τύπου: 3x+5=2x ή 4x+7=3x+1 η ισότητα έχει την έννοια της **ισοδυναμίας.** Για να αποκτήσει ένα νόημα αυτή η ισότητα, ο μαθητής θα πρέπει τουλάχιστον να κατανοήσει ότι οι εκφράσεις στα δύο μέλη είναι της ίδιας φύσης και ότι υπάρχουν ενέργειες που δίνουν νόημα στην ισότητα των εκφράσεων (π.χ. η αφαίρεση μιας αριθμητικής ποσότητας από τον άγνωστο). Στις εξισώσεις αυτές ο άγνωστος είναι εγκλωβισμένος σε μια σειρά πράξεων λιγότερο ή περισσότερο πολύπλοκων. Για να τον απομονώσει, ο μαθητής πρέπει να κατέχει αριθμητική γνώση (αριθμητικές πράξεις και ιδιότητες), να μπορεί να χειρίζεται απλές πράξεις με μεταβλητές σαν να είναι υπαρκτοί αριθμοί (2x, x+3), και να αναγνωρίζει ότι στην ισότητα τα δύο μέλη έχουν την ίδια αξία.

Κατά την εισαγωγή της εξίσωσης στο βιβλίο της Στ΄ Δημοτικού (Κασσώτη κ.ά., 2006), γίνεται παράλληλη προσπάθεια ανάδειξης της έννοιας της ισορροπίας μέσα από ένα «χρυσό κανόνα», ο οποίος καταλήγει: «*Για να διατηρείται πάντα η ισορροπία. ό,τι κάνουμε από τη μια μεριά, πρέπει να κάνουμε κι από την άλλη*» (σ.71).

Χρυσός κανόνας

**Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί.**
Η ισορροπία πρέπει να διατηρηθεί μέχρι το τέλος, όταν θα έχει μείνει μόνο ο άγνωστος από τη μια μεριά και η τιμή του από την άλλη.
Για να διατηρείται πάντα η ισορροπία, ό,τι κάνουμε από τη μια μεριά, πρέπει να κάνουμε κι από την άλλη.

Με τον τρόπο αυτό όμως γίνεται ουσιαστικά αναφορά στην αλγοριθμική επίλυση των εξισώσεων. Έτσι, ενώ έχει δοθεί ο κανόνας με αντιστροφή του πολλαπλασιασμού για την επίλυση της εξίσωσης x ˙ 5=20, δίνεται παράλληλα και ο χρυσός κανόνας: «*Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν διαιρέσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό*» (σ.68).

**Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου**
Όταν ο άγνωστος είναι **παράγοντας γινομένου**, για να λύσουμε την εξίσωση **διαιρούμε το γινόμενο με τον άλλο παράγοντα.**

**Παραδείγματα**
Η λύση της εξίσωσης
$x \cdot 5 = 20$ είναι: $x = 20 : 5$

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν διαιρέσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό.

Ωστόσο στην τάξη αυτή, οι εξισώσεις λύνονται πάντοτε με αντιστροφή πράξεων, ενώ ο κανόνας αυτός φαίνεται να έχει περιθωριοποιηθεί στη διδακτική πράξη από τους δασκάλους. Ο «χρυσός κανόνας» θα μπορούσε να αποτελέσει ένα καλό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού στην Α΄ ή στη Β΄ Γυμνασίου, αν παρουσιαστεί ως μια άλλη οπτική της επίλυσης με αντιστροφές, μέσα από ερωτήσεις του τύπου: «*Τι έγινε εδώ; Πώς έφυγε το 5; Πώς έμεινε στη θέση του το 1; Μήπως τον διαιρέσαμε με τον εαυτό του;*», και να επιτευχθεί έτσι, σε διαισθητικό επίπεδο, η γέφυρα μεταξύ των δύο μεθόδων επίλυσης.

## Προτάσεις διδασκαλίας

Για να καλυφθεί το γνωστικό άλμα ανάμεσα στην αριθμητική και άλγεβρα, ερευνητές προτείνουν ένα ενδιάμεσο **προ-αλγεβρικό επίπεδο** διδασκαλίας, όπου ο μαθητής θα κατασκευάσει το νόημα της μεταβλητής, της ισότητας και της εξίσωσης

(Herscovics & Kieran στο Driscoll 1983, Boulton-Lewis at al. 2000 & 1997a). Οι γνώσεις και δεξιότητες τις οποίες αναμένεται να κατακτήσει ο μαθητής σε κάθε ένα από τα τρία επίπεδα διδασκαλίας (αριθμητική, προ-άλγεβρα, άλγεβρα), είναι οι παρακάτω:

- Στην αριθμητική, ο μαθητής αναμένεται να γνωρίζει τις αριθμητικές πράξεις και τις ιδιότητές τους (2+3=5, 35:7+8=13), να δίνει απαντήσεις με αριθμητικές τιμές και να έχει κατανοήσει ότι στην ισότητα κάθε μέλος έχει την ίδια αξία. Τα προβλήματα επιλύονται με αριθμητικές διαδικασίες.

- Στο προ-αλγεβρικό επίπεδο, ο μαθητής αναμένεται να αναγνωρίζει τον άγνωστο, να χειρίζεται τη μεταβλητή σε εκφράσεις (π.χ. 3x, α+2) και εξισώσεις του τύπου: x+3=5 και 3(x+7)=24, και να έχει κατανοήσει ότι στην ισότητα κάθε μέλος έχει την ίδια αξία. Οι εξισώσεις επιλύονται με αντίστροφες διαδικασίες.

- Σε αλγεβρικό επίπεδο τέλος, ο μαθητής αναμένεται να χειρίζεται περισσότερες από μία μεταβλητές, να κάνει πράξεις με αυτές σε εξισώσεις του τύπου: x+3=2x+1, x+7y+4x–y =24, και να κατανοεί τη σημασία της ισότητας ως ισοδυναμία. Οι εξισώσεις επιλύονται με διαδικασίες ισορροπίας (αλγοριθμικές).

Όπως αναφέρθηκε στην Εισαγωγή, η διδασκαλία σε προ-αλγεβρικό επίπεδο επιχειρείται εν μέρει στην Στ΄ Δημοτικού και στην Α΄ Γυμνασίου, μέσα από τα Α.Π. και τα σχολικά βιβλία, με αμφίβολα ωστόσο αποτελέσματα. Για παράδειγμα, η υπερβολική χρήση της έννοιας της μεταβλητής στην Α΄ τάξη, η σύνδεσή της με την επίλυση εξισώσεων και στις δύο τάξεις (βλέπε παρακάτω) ή ο «χρυσός κανόνας» της Στ΄ Δημοτικού, μάλλον αποπροσανατολίζουν τους εκπαιδευτικούς και των δύο τάξεων, ενώ δεν είναι καθόλου σίγουρο κατά πόσο αυτοί έχουν συνειδητοποιήσει τη φύση αυτού του σταδίου διδασκαλίας. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι κάποιοι εκπαιδευτικοί της Α΄ Γυμνασίου διδάσκουν την επίλυση εξισώσεων με αλγοριθμικές διαδικασίες, αγνοώντας το Α.Π., επειδή τις θεωρούν πιο κατανοητές για τους μαθητές, ενώ αντίθετα θεωρούν τις αντιστροφές των πράξεων ως απώλεια χρόνου και άνευ σημασίας.

Είναι φανερό, ότι η διδασκαλία σε προ-αλγεβρικό επίπεδο πρέπει να περιλαμβάνει δραστηριότητες που θα βοηθήσουν το μαθητή να προσεγγίσει τις πρωταρχικές έννοιες της αλγεβρικής γλώσσας και να διακρίνει τις διαφορετικές όψεις τους. Στις διδακτικές προτάσεις που ακολουθούν, προτείνονται κάποιοι βασικοί άξονες για την προσέγγιση της μεταβλητής, του συμβόλου της ισότητας, της εξίσωσης και των πράξεων.

**(α) Εξοικείωση με την έννοια της μεταβλητής:** Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει δραστηριότητες που αφορούν στη συμβολική αναπαράσταση σχέσεων, όπως *«σκέφτομαι ένα αριθμό»*, *«έχω 5 βιβλία περισσότερα από το Νίκο»*, *«ο πατέρας έχει τα τριπλάσια χρόνια μου»*.

Τέτοιου είδους δραστηριότητες υπάρχουν τόσο στο βιβλίο της Στ΄ Δημοτικού όσο και της Α΄ Γυμνασίου, σε μια ειδική παράγραφο που προηγείται της επίλυσης των εξισώσεων, ενώ έχει ήδη προηγηθεί και στα δύο βιβλία η χρήση της μεταβλητής στη γενίκευση πράξεων, ιδιοτήτων κλπ. Ιδιαίτερα στην Α΄ Γυμνασίου, η χρήση της μεταβλητής επικρατεί σε θέματα θεωρίας ως μέσο τυποποίησης και γενίκευσης (αριθμητικών πράξεων και ιδιοτήτων: $5+3=3+5 \rightarrow \alpha+\beta=\beta+\alpha$, ορισμών, τύπων κλπ) και υστερεί στις ασκήσεις, όπου χρησιμοποιείται περιστασιακά. Η τυποποίηση στη θεωρία φτάνει σε ακραία σημεία σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως στην Ανακεφαλαίωση του 7ου κεφαλαίου, όπου ορίζεται η πρόσθεση ρητών με τη βοήθεια απολύτων τιμών (σ.144):

- $\alpha, \beta > 0 \qquad \alpha+\beta = +(|\alpha|+|\beta|)$
- $\alpha, \beta < 0 \qquad \alpha+\beta = -(|\alpha|+|\beta|)$
- $\alpha<0<\beta \qquad \begin{cases} \alpha+\beta = -(|\alpha|-|\beta|) \text{ αν } |\alpha|>|\beta| \\ \alpha+\beta = +(|\beta|-|\alpha|) \text{ αν } |\alpha|<|\beta| \end{cases}$

Ο σκοπός στην τάξη αυτή, δεν είναι να γίνουν οι μαθητές δέσμιοι των συμβόλων, αλλά να κατανοήσουν την ουσία των πράξεων και των ιδιοτήτων τους αρχικά, και σε δεύτερο επίπεδο να εκτιμήσουν τη χρήση γραμμάτων για να συμβολίσουν ποσά που μεταβάλλονται ή παραμένουν σταθερά. Από το άλλο μέρος, η υπερβολική χρήση μεταβλητών που μένουν στο επίπεδο μιας τυπικής παράστασης, έστω και αν αυτή παρουσιάζεται ως αποτέλεσμα μιας επαγωγικής προσέγγισης, αναιρεί όλα τα παραπάνω, και μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής και στο χειρισμό της. Για το λόγο αυτό καλό είναι να παραλείπονται κατά τη διδασκαλία εξαιρετικά πολύπλοκες παραστάσεις και να αποφεύγεται η απομνημόνευση πολύπλοκων κανόνων και πράξεων.

**(β) Η ισότητα ως ισοδυναμία:** Στο επίπεδο αυτό δουλεύουμε με **αυστηρά αριθμητικές ισότητες**, εστιάζοντας στην ισοδυναμία, μέσα από δραστηριότητες όπως (Herscovics & Kieran 1980):

✓ *Μπορείς να χρησιμοποιήσεις το «=» με μια πράξη σε κάθε μέλος;* (π.χ.: $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$ ή $2+6 = 6+2$)

✓ *Δώσε ένα παράδειγμα με διαφορετική πράξη σε κάθε μέλος* (π.χ.: $5+5 = 5 \cdot 2$).

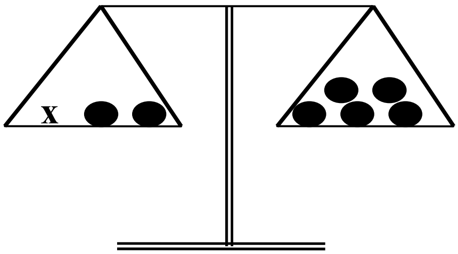
✓ *Δώσε ένα παράδειγμα όπου έχεις περισσότερες πράξεις* (π.χ.: $3+5+4=12-4+4$).

Με αυτές τις δραστηριότητες μπορεί ο μαθητής να κατανοήσει ότι π.χ. το 12-4+4 δεν είναι το αποτέλεσμα του 3+5+4, αλλά ότι και οι δύο παραστάσεις έχουν την ίδια αξία. Τέτοιου είδους δραστηριότητες δεν υπάρχουν στα σχολικά βιβλία της Στ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου.

**(γ) Εισαγωγή των εξισώσεων:** Οι αριθμητικές ισότητες αποτελούν τη γέφυρα για να περάσουμε στις εξισώσεις, οι οποίες αρχικά παριστάνονται με συγκεκριμένο οπτικό τρόπο (*«Ποιος είναι ο κρυμμένος αριθμός;* $\square+6=5 \cdot 2$ ή $5+\ldots=12-4$») και κατόπιν με αφηρημένο τρόπο με χρήση μεταβλητής (Herscovics & Kieran 1980). Καλό είναι να προηγούνται δραστηριότητες, όπου η εξίσωση συνδυάζεται με ένα αφηγηματικό πρόβλημα, ώστε αυτή να αποκτήσει νόημα για τους μαθητές. Για παράδειγμα διηγούμαστε μια ιστορία για ένα αριθμό: «*Σε ένα αριθμό προσθέτω 2 και βρίσκω 6. Ποιος είναι ο αριθμός;* (x + 2 = 6)». Στη συνέχεια γίνεται η αντίστροφη διαδικασία: μια εξίσωση μεταφράζεται σε αφηγηματικό πρόβλημα.

Η ζυγαριά (πραγματικό ή εικονικό μοντέλο σε power point) μπορεί να δώσει μια οπτική παράσταση της έννοιας της ισορροπίας, του «χρυσού κανόνα» του Δημοτικού, στην Α΄ και στη Β΄ Γυμνασίου, και να συνδέσει έτσι διαισθητικά τις δύο μεθόδους επίλυσης εξισώσεων. Τέτοια μοντέλα υπάρχουν στο βιβλίο της Β΄ τάξης, ωστόσο η εισαγωγή γίνεται με μια αρκετά πολύπλοκη εξίσωση 3x+200=x+600 (σ.16).

Είναι προτιμότερο να αρχίσουμε με μια απλούστερη εξίσωση, π.χ. την x + 2 = 5, της οποίας οι αριθμητικοί και αλγεβρικοί όροι παριστάνονται ως βάρη, και η προσπάθεια επικεντρώνεται στο να απομονωθεί ο x, χωρίς να διαταραχθεί η ισορροπία (MacGregor, 1998).




Το προ-αλγεβρικό στάδιο περιλαμβάνει αριθμητικές λύσεις με αντίστροφες διαδικασίες, **απλών γραμμικών εξισώσεων του τύπου x+α=β, αx+β=γ**, οι οποίες βοηθούν το μαθητή να εξοικειωθεί σε πράξεις με μεταβλητές, πριν προχωρήσει σε εξισώσεις της μορφής: αx+β=γx ή αx+β=γx+δ, με άγνωστο και στα δύο μέλη.

Η επίλυση εξισώσεων παραμένει σε προ-αλγεβρικό στάδιο στα βιβλία τόσο της Στ΄ Δημοτικού όσο και της Α΄ Γυμνασίου. Βέβαια υπάρχει πάντα ο κίνδυνος να δοθεί το βάρος στην τυποποίηση – αποστήθιση της επίλυσης απλών γραμμικών εξισώσεων, και όχι στην κατανόηση της επίλυσής τους με βάση τον ορισμό των πράξεων.

Το φαινόμενο αυτό μπορεί να γίνει πιο έντονο στην Α΄ Γυμνασίου, όταν οι εξισώσεις παρουσιάζονται στην τυποποιημένη μορφή τους με τη βοήθεια μεταβλητών (σ.78)

| Εξίσωση | Λύση |
|---|---|
| $x+\alpha=\beta$ | $x=\beta-\alpha$ |
| $x-\alpha=\beta$ | $x=\alpha+\beta$ |
| $\alpha-x=\beta$ | $x=\alpha-\beta$ |
| $\alpha\cdot x=\beta$ | $x=\beta:\alpha$ |
| $x:\alpha=\beta$ | $x=\alpha\cdot\beta$ |
| $\alpha:x=\beta$ | $x=\alpha:\beta$ |

Για το λόγο αυτό, καλό είναι να δίνεται κατά τη διδασκαλία έμφαση στις αντίστροφες διαδικασίες, ενώ η μέθοδος δοκιμής-επαλήθευσης θα μπορούσε να βοηθήσει σε «λιγότερο προφανείς» περιπτώσεις, όπως: α **-** x = β ή α **:** x = β.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι οι εξισώσεις στην Α΄ Γυμνασίου, δεν επεκτείνονται σε άλλες «μη στερεότυπες» μορφές που θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν εύκολα με αντιστροφή πράξεων. Για παράδειγμα υπάρχει μόνο μία εξίσωση με άγνωστο στο β΄ μέλος: $\frac{49}{5} = x + \frac{4}{5}$, η οποία όμως εμπεριέχει τη δυσκολία αντιμετώπισης των κλασμάτων. Επίσης αναφέρεται μόνο μια εξίσωση με περισσότερους από έναν αριθμητικούς προσθετέους: t+4+1=3+19. Αντίθετα, έχουν τεθεί σύνθετες εξισώσεις, οι οποίες μάλλον δεν συντελούν στην κατανόηση και στο χειρισμό των απλών γραμμικών εξισώσεων σε προ-αλγεβρικό στάδιο: π.χ. $\frac{3}{5} + \frac{x+2}{10} = 1$ (σ. 74) .

**(δ) Επιμεριστική ιδιότητα:** Πρόκειται για μια σημαντική ιδιότητα που συναντάται συχνά στις εξισώσεις. Μέσα από τη διήγηση ιστοριών, μπορεί ο αλγόριθμος της ιδιότητας να αποκτήσει νόημα για τους μαθητές. Δίνουμε μια αριθμητική παράσταση και ζητούμε να τη μετατρέψουν σε μια ιστορία: *«Μπορείς να διηγηθείς μια ιστορία για την παράσταση 3˙2+8;»*. Στην περίπτωση που κάποιος μαθητής κάνει το συστηματικό λάθος: ***3(2+8) =3 ˙2+8***, μπορούμε να διαπιστώσουμε αρχικά ότι οι δύο παραστάσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιστορίες και να καταλήξουμε ότι δεν έχουν την ίδια αξία. Για παράδειγμα, στις παραστάσεις ***3(2+8)*** και ***3 ˙ 2 + 3 ˙ 8*** αντιστοιχεί η ίδια ιστορία, π.χ.: *«Αγόρασα χθες 2 κιλά πορτοκάλια και σήμερα άλλα 8 κιλά. Και τις δύο φορές κόστιζαν 3 ευρώ το κιλό»*. Αντίθετα η παράσταση ***3 ˙ 2 + 8*** αντιστοιχεί σε μια διαφορετική ιστορία, π.χ.: *«Αγόρασα 2 κιλά πορτοκάλια από 3 ευρώ το κιλό και πλήρωσα και 8 ευρώ για κάστανα»*.

## Συζήτηση

Η μετάβαση από τις αριθμητικές στις αλγεβρικές έννοιες δεν γίνεται αυτόματα στη σκέψη του μαθητή. Η κατανόηση της άλγεβρας στηρίζεται στη γνώση και κατανόηση της αριθμητικής και είναι επόμενο οποιαδήποτε ανεπάρκεια στην αριθμητική να προκαλέσει αργότερα δυσκολίες στην άλγεβρα. Πέρα όμως από τις βασικές γνώσεις της αριθμητικής, είναι απαραίτητο να μεσολαβήσει ένα προ-αλγεβρικό στάδιο, στο οποίο ο μαθητής θα μπορέσει να ξεπεράσει το γνωστικό άλμα μεταξύ αριθμητικών και αλγεβρικών εννοιών και μεθόδων. Μερικές γνώσεις και δεξιότητες που είναι απαραίτητες για την επιτυχή μετάβαση, και στις οποίες οι μαθητές συνήθως υστερούν, είναι καλύτερη κατανόηση των πράξεων και ιδιαίτερα της διαίρεσης, προτεραιότητα, αντιμεταθετική και επιμεριστική ιδιότητα, αντιστροφή πράξεων, η έννοια των γραμμάτων ώστε να αντιμετωπίζονται περισσότερο ως μεταβλητές παρά ως άγνωστοι, πράξεις με τα γράμματα, και κατανόηση του συμβόλου της ισότητας με την έννοια της ισοδυναμίας, ώστε να αποφευχθεί η στενή ερμηνεία της με σκοπό να βρεθεί μια απάντηση (Filloy & Sutherland 1996, Boulton-Lewis at al. 1997b).

Τα Α.Π. και τα σχολικά βιβλία Δημοτικού και Γυμνασίου φαίνεται ότι αγγίζουν μόνο το προ-αλγεβρικό στάδιο, εφόσον οι στόχοι στον τομέα αυτό δεν είναι πάντοτε ξεκάθαροι και σε ορισμένες περιπτώσεις αλληλοαναιρούνται. Χρειάζονται σαφέστεροι και συνεπείς στόχοι στα Α.Π., συνεργασία στη διαμόρφωση της ύλης της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου, και ενημέρωση και ευαισθητοποίηση των εκπαιδευτικών των δύο αυτών τάξεων σχετικά με τη φύση και τους στόχους των μαθηματικών στο επίπεδο αυτό. Ο στόχος της διδασκαλίας της άλγεβρας σε στοιχειώδες επίπεδο είναι οι μαθητές να δουν τα Μαθηματικά ως ξένη γλώσσα και να μάθουν να μεταφράζουν ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις και σημασίες της μεταβλητής και της εξίσωσης (Driscoll,1983). Το να βοηθήσουμε τους μαθητές να αποκτήσουν αυτές τις ικανότητες είναι ένα από τα δυσκολότερα διδακτικά καθήκοντα, και παρά τη βοήθεια των Α.Π. και των βιβλίων, ο εκπαιδευτικός παραμένει στο επίκεντρο αυτού του καθήκοντος.

## Βιβλιογραφία

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. & Φερεντίνος, Σ. (2007). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Ο.Ε.Δ.Β.

Βερύκιος, Π. (2003). Κατανόηση εννοιών της άλγεβρας από μαθητές του Γυμνασίου. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Κύπρου (σε ηλεκτρονική μορφή).

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Ο.Ε.Δ.Β.

Boulton-Lewis, G.M., Atweh, B., Pillay, H., Wills, L., & Mutch, S. (1997a). The Transition from Arithmetic to Algebra: Initial Understanding of Equals, Operations and Variable. In E. Pehkonen (Ed), *Proc. 21st Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 89-96). Lahti, Finland: PME.

Boulton-Lewis, G.M., Cooper, T.J., Atweh, B., Pillay, H., Wills, L., & Mutch, S. (1997b). The Transition from Arithmetic to Algebra: A Cognitive Perspective. In E. Pehkonen (Ed), *Proc. 21st Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 185-191). Lahti, Finland: PME.

Boulton-Lewis, G.M., Cooper, T.J., Atweh, B., Pillay, H., Wills, L. (2000). Readiness for Algebra, In T. Nakahara & M. Koyama (Eds), *Proc. 24th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 89-96). Hiroshima, Japan: PME.

Δεμίρη, Ε., Μαρκέτος, Α., Μπάρμπας, Γ. (1994). Οι αντιλήψεις των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου για τη μεταβλητή, *Διάσταση*, 4, 63-70.

Driscoll, M. (1983). The Learning and Teaching of Algebra. In *Research Within Research: Secondary School Mathematics - A Research-Guided Response to the Concerns of Educators.* National Council of Teachers of Mathematics, 119-136.

Filloy, E. & Sutherland, R. (1996). Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. In A.J. Bishpop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 145-147.

Herscovics, N. & Kieran C. (1980). Constructing Meaning for the Concept of Equation. *The Mathematics Teacher*, 73, 572-581.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2007). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού*. Ο.Ε.Δ.Β.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. *Ευκλείδης Γ΄*, 13(45), 61-70.

MacGregor, M. (1998). How Students Interpret Equations: Intuition versus Taught Procedures, in *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* National Council of Teachers of Mathematics. USA, 262-270.

Σιγάλας, Γ. (1991). Προσπάθεια ερμηνείας λαθών στον Αλγεβρικό Λογισμό, *Ευκλείδης Γ*. 29(8), 102-110.