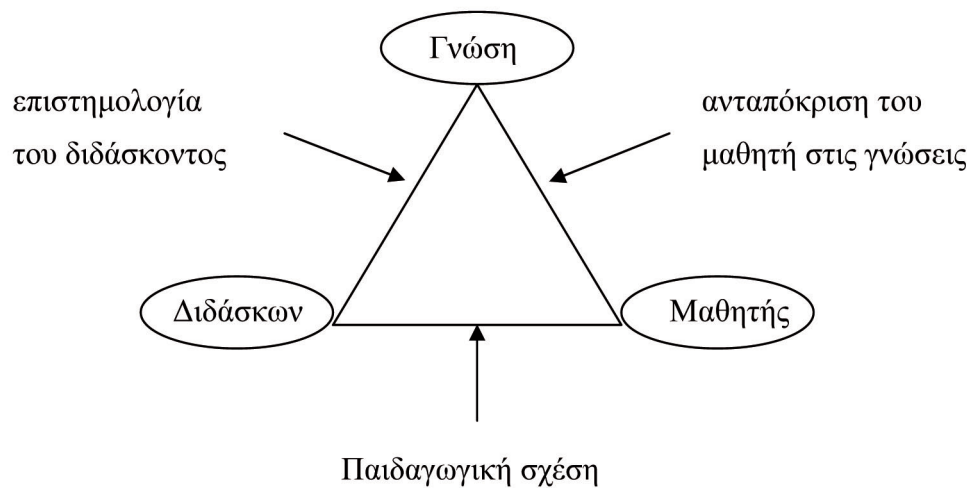


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΦΑΚΕΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ Ι

(Περιέχονται το εγχειρίδιο του Michel Henry
'Διδακτική των Μαθηματικών' σε μετάφραση
και άλλα υλικά)

Διδάσκων Π. Σπύρου



ΑΘΗΝΑ 2008

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Στην καταγραφή των Σημειώσεων αξιοποίησα υλικά που έγραψαν η Κ. Γραβάνη με τον φίλο καθηγητή Θ. Γαγάτση, η dr Κ. Παυλοπούλου, ο Στέφανος Κείσογλου, ο Γ. Ψυχάρης, την μετάφραση της Διδακτικής των Μαθηματικών του καθηγητή Michel Henry στο Πανεπιστήμιο Université de France - Compté της Bésançon και άλλα κείμενα γραμμένα από εμένα.

Οκτώβρης 2008
Π. Σπύρου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μέρος Ι

Michel Henry : ‘Διδακτική των Μαθηματικών’ σε μετάφραση
Γ. Κοντογιάννη Γ. Πρίντεζη Π. Σπύρου

Μέρος ΙΙ, σελ. 85

Για μια νέα εκπαιδευτική φιλοσοφία, σελ. 86

Επιστημολογία και Ψυχολογία, σελ. 95

Μεταπιαζετιανές Θεωρίες στην Διδακτική των Μαθηματικών, σελ. 103

Πίνακες των Tall και Sfard, σελ 107.

Προταρχικές έννοιες του Χώρου, σελ 115.

Επίπεδα Van Hiele, σελ 121

Ζητήματα από τη Θεωρία Αναπαραστάσεων, Κ. Γραβάνη, σελ 125

Η συνάρτηση ως διαμεσολαβημένη εκτίμηση, σελ.149

Συστήματα των Σημειωτικών Αναπαραστάσεων (Κ. Παυλοπούλου), σελ 159

Συγγραφή εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, Γ. Ψυχάρη, σελ. 189

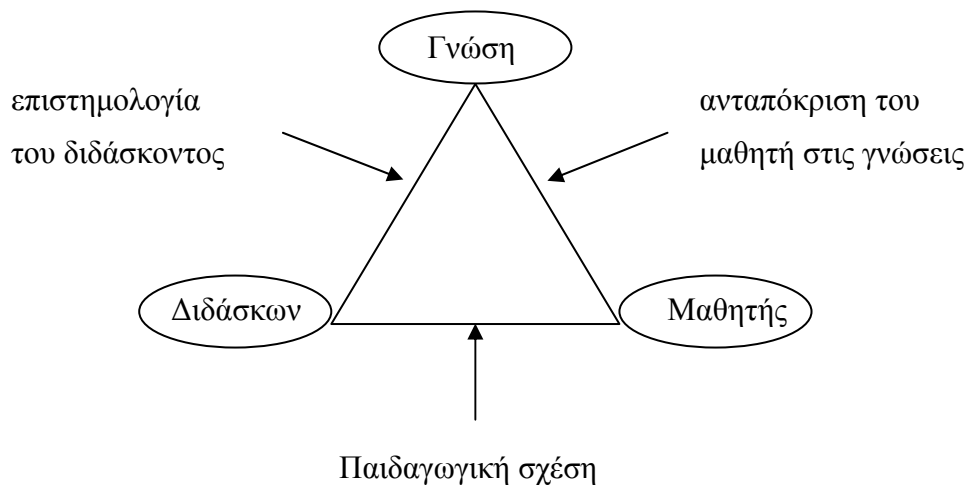
Ένα μοντέλο διδασκαλίας, Σ. Κείσογλου, σελ. 192

Irem de Besançon

MICHEL HENRY

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Παρουσίαση της διδακτικής
με στόχο την επιμόρφωση
των διδασκόντων**



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

IREM
FACULTÉ DES SCIENCES
ET DES TECHNIQUES
Route de Gray – La Bouloie
25030 BESANÇON CEDEX

Michel Henry

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μια παρουσίαση της διδακτικής με στόχο την επιμόρφωση των διδασκόντων

Ενδοπανεπιστημιακή έκδοση Π. Σπύρου

Μετάφραση από τα γαλλικά:

Γ. Κοντογιάννης - Γ. Πρίντεζης - Π. Σπύρου

Επιμέλεια:

Π. Σπύρου - Γ. Πρίντεζης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2008

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗΣ

Από την δεκαετία του 70 ψάχνω για εγχειρίδια με ιδιαίτερα διδακτικό χαρακτήρα. Η ανάγκη να μεταφραστούν κείμενα, που εισάγουν και ερμηνεύουν στην μητρική γλώσσα των φοιτητών βασικούς όρους και εκφράσεις, ώστε να αποτελέσουν βασικά εργαλεία και έναρξη μιας παραπέρα μελέτης, γίνεται σήμερα πιο επιτακτική. Το εγχειρίδιο αυτό το επέλεξα λόγω της κάθετης παρουσίασης θεμάτων της σύγχρονης Διδακτικής των Μαθηματικών, της εύστοχης χρήσης των όρων και του στιβαρού ύφους του συγγραφέα. Τα χαρακτηριστικά αυτά δεν είναι τυχαία. Στην Γαλλία δημιουργήθηκαν οι πλέον κεντρικές αντιλήψεις της Διδακτικής των Μαθηματικών και στην γαλλική γλώσσα ανήκουν τα έργα των J. Piaget και G. Bachelard. Εξάλλου στην ίδια κουλτούρα, που ξεκινούσε από τον Descartes, αναπτύχθηκε μια βαθιά μελέτη της βασικής επιστημολογικής κατηγορίας του υποκειμένου και περισώθηκε η μεγάλη παράδοση του μετακαντιανού ρεύματος και της φαινομενολογίας. Το ρεύμα αυτό επέδρασε σε ψυχολογικές και κοινωνικές έρευνες και κατέστη ιδιαίτερα γόνιμο. Η υπογράμμιση της σημασίας του **υποκειμένου στην κατασκευή της γνώσης**, οδήγησε στον λεγόμενο **κονστρουκτιβισμό**, που αποτέλεσε τομή στις παιδαγωγικές θεωρίες.

Αυτό που αναδεικνύεται από το εγχειρίδιο, ως κύριος στόχος της εκπαίδευσης, είναι η **αλλαγή του επιστημολογικού πλαισίου** των διδασκομένων γνώσεων, η **μετατόπιση των επιστημολογικών αντιλήψεων** διδασκόντων και διδασκομένων ή αλλιώς η **αλλαγή του παιδαγωγικού παραδείγματος**.

Μια πρώτη μεταγλώττιση είχε προκύψει με την συνεργασία των Αντωνάτου Π. Λάγκα Αικ, Μπαμπασίδη Α. Περίνη Μ. Η πρώτη απόπειρα συστηματικής μετάφρασης έγινε από τον Γ. Κοντογιάννη (Mr, καθηγητή Μαθηματικών Λυκείου) κι εμένα γύρω στο 1999 οπότε το δακτυλογράφησα σε TEX. Αυτή η τελική μεταφραστική εκδοχή κι η μετατροπή του κειμένου σε Word οφείλετε στον Γ. Πρίντεζη (Mr, καθηγητή Μαθηματικών της Λεοντείου), 2006. Το 2008 διορθώσαμε κάποια δευτερεύοντα λάθη και συμπληρώνονται ελάχιστες σημειώσεις ως διευκρινίσεις.

Θέλω από την θέση αυτή να ευχαριστήσω τον καθηγητή Michel Henry στο Πανεπιστήμιο Université de France - Compté της Bésançon που μου έδωσε την άδεια να κυκλοφορήσω, σε εσωτερική στο Παν/μιο Αθηνών έκδοση, αυτό το εγχειρίδιο.

Π. Σπύρου – Αύγουστος 2008

Αντί προλόγου

Το 1990 έπρεπε να συγκεντρώσω σε βιβλίο όλες τις σημειώσεις των παραδόσεων, που εδώ και τέσσερα χρόνια αναφέρονται στην παρουσίαση της διδακτικής των μαθηματικών στους φοιτητές του τρίτου έτους στη BESANÇON. Αυτή η παρουσίαση καταγράφεται σαν "μισή διδακτική μονάδα", δηλαδή 50 ώρες, στον οδηγό διδασκαλίας.

Αφορμή γι' αυτή την έκδοση ήταν το πανεπιστημιακό Κέντρο Τηλε-διδασκαλίας, το οποίο είχε συμπεριλάβει αυτό το μάθημα στο Πρόγραμμα Σπουδών του. Μέχρι τότε προσπαθούσα να τροποποιήσω από τον ένα χρόνο στον άλλο το περιεχόμενο και τη σειρά της παρουσίασης, για να συμβαδίζουν με τις αποκτούμενες εμπειρίες.

Το μειονέκτημα αυτής της έκδοσης είναι ο κίνδυνος μιας πρόωρης παγίωσης της παρουσίασης της διδακτικής, ενώ θα μπορούσαν να υπάρξουν και άλλες παραλλαγές.

Το πλεονέκτημα είναι ότι τίθεται στη διάθεση των εκπαιδευτικών ένα προϊόν σύνθετο και δομημένο, τη στιγμή που η επιμόρφωση και μύηση στη διδακτική θα εξελίσσεται μέσα στα κείμενα των IUFM (Πανεπιστημιακό Ινστιτούτο Κατάρτισης Εκπαιδευτικών).

Να λοιπόν το αποτέλεσμα αυτής της εργασίας, την οποία δε σκόπευα από την αρχή να κυκλοφορήσω ευρέως, περιμένοντας ότι ένα βαθύτερος προβληματισμός θα αναπτυσσόταν μέσα στην κοινότητα των Διδακτικών¹ όσον αφορά τους τρόπους και το περιεχόμενο για την συγκρότηση της Διδακτικής. Καθόλου δεν προτίθεμαι να προτείνω την μοναδική σωστή μέθοδο.

Συνέβη όμως οι συνάδελφοι του IREM να μάθουν την ύπαρξη αυτών των σημειώσεων και να απαιτήσουν επειγόντως τη δημοσίευσή τους. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο γράφτηκε αυτό το φυλλάδιο το οποίο πρέπει να θεωρηθεί μια πρώτη, όχι άριστη προσπάθεια, που θα κριθεί τόσο για τη μορφή της όσο και για το βάθος της, ώστε το κείμενο αυτό να μπορέσει να τελειοποιηθεί πριν την οριστική του έκδοση².

Ωστόσο, θέλω να υπενθυμίσω τους στόχους της επιμόρφωσης που λειτουργεί εδώ και τέσσερα χρόνια στη Besançon και για δεύτερο χρόνο στο CTU με τη μορφή ενός εγχειριδίου οδηγιών.

1. Δεν πρόκειται για ένα μάθημα Διδακτικής (ακριβώς όπως μπορεί να υπάρχει στο πρόγραμμα των DEA). Δεν είναι παρά μόνο μια παρουσίαση των μελετών της διδασκαλίας των μαθηματικών, καθώς και της βάσης των πιο διαδεδομένων ιδεών τους. Υπάρχουν κενά και παραλήψεις, που εκ των υστέρων μου φαίνονται ότι είναι σημαντικά για τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων, όπως για παράδειγμα η ιδέα της α-διδακτικής κατάστασης ή εκείνης των μέσων.

2. Αυτή η παρουσίαση είναι για τη χρήση σπουδαστών και διδασκόντων που ακούνε να γίνεται λόγος για τη Διδακτική και θέλουν να έχουν περισσότερες γνώσεις γι' αυτό το θέμα. Ακόμα απευθύνεται σ' αυτούς που σκοπεύουν να γίνουν εκπαιδευτικοί και προετοιμάζονται για τα IUFM με αυτή την προεπαγγελματική τους εκπαίδευση. Υπάρχει λοιπόν ποικιλία στα επίπεδα των διαλέξεων.

¹ didacticiens. Ο Michel Henry χρησιμοποιεί την ελληνική λέξη που άνετα θα μεταφραζόταν διδακτικός, αν και στην Ελλάδα ακόμη δεν έχει επικρατήσει, για να σηματοδοτήσει εκείνους που ασχολούνται με τη Διδακτική (σ.μ)

² Η μετάφραση αυτή έγινε από έκδοση του 1995 (σ.μ).

3. Με αυτό το σκεπτικό, κατά την γνώμη μου, δεν "διδάσκει" κανείς τη Διδακτική μέσα από μια συγκεκριμένη σειρά μαθημάτων. Η παρουσίαση αυτή δεν έχει νόημα παρά μόνο αν συνυπάρχει με δυο συμπληρωματικές δραστηριότητες:

α) Προσωπική εργασία και εργασία κατά ομάδες όσον αφορά τα κείμενα (πρόσφατος κατάλογος των οποίων έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφία), με στόχο να εγείρονται ερωτήματα και επιστημονικές συζητήσεις, σχετικά με τα φαινόμενα διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών.

β) Διασύνδεση μ' ένα σύστημα παρατηρήσεων σε τάξεις, ώστε να αποκτούν συγκεκριμένο νόημα οι ιδέες που αναδεικνύονται. Για τους επί πτυχίω φοιτητές, αυτές οι παρατηρήσεις οδηγούν στη σύνθεση ενός μικρού μνημονίου: δημιουργία ερωτήσεων και αναφορές των αποτελεσμάτων από τις παρατηρήσεις που έχουν πραγματοποιηθεί και αναλυθεί σύμφωνα με τα δεδομένα της Διδακτικής.

Σε αυτά τα πλαίσια, πρέπει να εκτιμηθεί αυτή η εργασία, η οποία αν περιοριστεί στις σελίδες που παρουσιάζω (συμπυκνώνοντας αρκετά άρθρα), θα φαινόταν πολύ αφηρημένη.

Προσωπικά, είμαι πεπεισμένος για τη θετική επίδραση αυτής της επιμόρφωσης στην καθημερινή διδακτική πρακτική. Μένει αυτές οι διαπιστώσεις να ελεγχθούν ερευνητικά. Θα συμμετάσχω κατά το δυνατόν σ' αυτό, αν χρειαστεί.

Μέσα στο πνεύμα της λειτουργίας των IREM, επιτρέπεται η αναπαραγωγή όλου ή μέρους του εγχειριδίου αυτού με την προϋπόθεση να αναφέρεται ο συγγραφέας και να μην αλλοιώνεται ο τρόπος χρήσης του.

Michel HENRY - 9 Οκτωβρίου 1991

Διδακτική Μαθηματικών

Οι αριθμοί που βρίσκονται σε αγκύλες εντός του κειμένου επισημαίνουν τις αναφορές στο τέλος του κεφαλαίου. Στις σελίδες 87-89 βρίσκεται όλη η βιβλιογραφία στο σύνολό της. Κάθε κεφάλαιο τελειώνει με ένα σχέδιο όπου δίνουμε προτεινόμενες εργασίες με βάση υλικά που είναι εύκολα προσπελάσιμα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1- Παρουσίαση της Διδακτικής των Μαθηματικών

1) Αντικείμενο της Διδακτικής	σ. 9
- Ορισμός, καταστάσεις διδασκαλίας και έννοια των μεταβλητών, μεταβλητές των συμφραζομένων, διδακτικές μεταβλητές, επιστημολογικές μεταβλητές.	
2) Συστημική προσέγγιση	σ.11
- Οι τρεις πόλοι της διδασκαλίας, η σχέση μεταξύ τους και οι δεσμοί τους με τα συμφραζόμενα, τη νοόσφαιρα και τον διδακτικό χρόνο.	
3) Ερευνητικές εργασίες στη Διδακτική	σ. 12
- Οι Γάλλοι ερευνητές και η ανάπτυξη της έρευνας	
- Γνώση και διδακτική μετατόπιση, διαλεκτική σχέση εργαλείου-αντικείμενου, η έννοια του εννοιολογικού πεδίου	
- Ο διδάσκων και η σχέση του προς τη γνώση: μεταγνωστικές αναπαραστάσεις, φορμαλιστικές αντιλήψεις και αντιλήψεις επικεντρωμένες στις εφαρμογές	
- Οι σχέσεις διδασκόντων-μαθητών: παιδαγωγικές επιλογές, στόχοι και ταξινομίες, διδακτικό συμβόλαιο.	
- Οι μαθητές και η απόκτηση της γνώσης: η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων.	
- Θεωρίες μάθησης, απόψεις των Jean Piaget και Gaston Bachelard, η έννοια του εμποδίου.	
Προτεινόμενες εργασίες 1: Αναγνώριση των διδακτικών μεταβλητών σε διάφορες καταστάσεις διδασκαλίας στο γυμνάσιο.	
Βιβλιογραφικές αναφορές	σ. 18

2. Γενετική Επιστημολογία και Διδακτική

1) Αντιλήψεις για την μάθηση	σ. 20
- Παραδοσιακές αντιλήψεις, κατασκευαστικές αντιλήψεις.	
2) Ορισμένες τάσεις στη γνωστική ψυχολογία	σ. 23
- Συμπεριφορισμός, εξέλιξη των γνωστικών αντιλήψεων, η γενετική επιστημολογία.	
3) Η συνεισφορά του Piaget	σ. 24
- Η εξισορρόπηση, η θεωρία των σταδίων και η εξέλιξή της	
4) Από τα σχήματα στις έννοιες	σ. 25
- Η έννοια της γνώσης, αναγνώριση έννοιας, εννοιολογικά πεδία	
Προτεινόμενες εργασίες 2: Νέες έννοιες και εννοιολογικά πεδία στα προγράμματα.	
Βιβλιογραφικές αναφορές	σ. 27

3 - Επιστημολογία, και διδασκαλία των μαθηματικών

1) Επιστημολογία και Διδακτική σ. 28

- Η εργασία πάνω στις έννοιες και η σημασία των επιστημολογικών θεμελίων στη διδασκαλία των μαθηματικών,

2) Επιστημολογία, αναπαραστάσεις και σχέση με τη γνώση σ. 30

- Έννοιες και αυθόρμητες αντιλήψεις

- Επιστημολογία του καθηγητή,

- Η διδασκαλία των θεμελίων στα προγράμματα, των «Μοντέρνων Μαθηματικών».

Προτεινόμενες εργασίες 3: Επιστημολογία και διδακτικά ερωτήματα

Βιβλιογραφικές αναφορές σ. 32

4 - Διδακτική μετατόπιση (ή διδακτικοί μετασχηματισμοί)

1) Η επιστημονική γνώση σ. 33

2) Διδακτικοί στόχοι σ. 34

3) Η διδακτέα ύλη και τα αντικείμενα διδασκαλίας σ. 34

4) Η σχολική γνώση σ. 35

5) Η διδασκόμενη γνώση σ. 35

6) Διαλεκτική υπόσταση της γνώσης σ. 36

7) Ο διδακτικός χρόνος σ. 37

Προτεινόμενες εργασίες 4: Διδακτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων από τη σκοπιά της διδακτικής μετατόπισης

Προτεινόμενες εργασίες 4': Μετατόπιση της έννοιας του Διαφορικού στο DEUG

Βιβλιογραφικές αναφορές σ. 39

5- Διδακτικές καταστάσεις και καταστάσεις προβλήματος

1) Θεωρία των διδακτικών καταστάσεων σ. 40

- Διαλεκτικές του Guy Brousseau, α-διδακτικές καταστάσεις

- Προσωποποίηση και αποπροσωποποίηση, σύνδεση και αποσύνδεση του λεκτικού πλαισίου

- Διαλεκτική εργαλείο-αντικείμενο

2) Οι καταστάσεις προβλήματος σ. 45

- Χαρακτηριστικά, λειτουργία, εκ των προτέρων ανάλυση

3) Ανοικτά προβλήματα σ. 48

- Η πρακτική των ανοικτών προβλημάτων

- Η κατάρτιση στην ευρετική

Προτεινόμενες εργασίες 5: Επεξεργασία μιας κατάστασης προβλήματος

Βιβλιογραφικές αναφορές σ. 50

6- Το διδακτικό συμβόλαιο

1) Η έννοια του διδακτικού συμβολαίου σ. 51

- Ορισμός, χαρακτηριστικά, παραδείγματα

2) Η ηλικία του καπετάνιου σ. 52

3) Το φαινόμενο Πυγμαλίων σ. 52

4) Οι (αρνητικές) επιδράσεις του διδακτικού συμβολαίου σ. 53

- Φαινόμενο Toraze, φαινόμενο Jourdain, μεταγνωστικό ολίσθημα, καταχρηστική χρήση της αναλογίας, η ακατανόητη προσδοκία

Προτεινόμενες εργασίες 6: Μελέτη των αποτελεσμάτων του συμβολαίου μέσα σ' ένα πρωτόκολλο παρατήρησης τάξης.

Βιβλιογραφικές αναφορές σ. 58

7- Λάθη και εμπόδια

1) Ο ρόλος του λάθους κατά τη διαδικασία της μάθησης σ. 59

- Σύνδεση με τις αντιλήψεις για τη μάθηση.

- Από το δικαίωμα στο λάθος στο καθεστώς του λάθους μέσα στη διδασκαλία.

2) Διδακτική ανάλυση του λάθους σ. 60

- Υποθέσεις των Bachelard και Brousseau

3) Η έννοια του εμποδίου σ. 61

4) Διαφορετικοί τύποι εμποδίων σ. 61

- Επιστημολογικά εμπόδια, διδακτικά εμπόδια, ψυχολογικά εμπόδια, εμπόδια οντογενετικά, τεχνικά εμπόδια

5) Η υπερπήδηση του λάθους σ. 65

Προτεινόμενες εργασίες 7: Διαχείριση των λαθών στα γραπτά μαθητών, αναζήτηση εμποδίων

Βιβλιογραφικές αναφορές σ. 66

8 - Ζητήματα Αξιολόγησης

1) Εισαγωγή σ. 67

2) Στοιχειώδεις έννοιες της αξιολόγησης σ. 67

- Αξιολόγηση - αξιολογική κρίση, αξιολόγηση - μέτρηση, αξιολόγηση και παιδαγωγικοί στόχοι, αξιολόγηση και λήψη αποφάσεων

3) Λειτουργίες της αξιολόγησης σ. 73

- Διαμορφωτική αξιολόγηση, αθροιστική αξιολόγηση, προβλεπτική αξιολόγηση.

Προτεινόμενες εργασίες 8: Εμπειρία βαθμολόγησης γραπτών, πραγματοποίηση μιας διαμορφωτικής αξιολόγησης

Βιβλιογραφικές αναφορές σ. 77

Γλωσσάριο σ. 80

Γενική Βιβλιογραφία σ. 81

Διδακτική Μαθηματικών

1 - Παρουσίαση της Διδακτικής των Μαθηματικών

1) Αντικείμενο της Διδακτικής

Εν συντομία θα πω ότι η *Διδακτική Μαθηματικών* είναι η μελέτη των φαινομένων της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών.

Ο παραπάνω ορισμός είναι ημιτελής και πολύ γενικός. Μπορούμε να περιορίσουμε το πεδίο της διδακτικής στις συνθήκες της τάξης, σύμφωνα με την υπενθύμιση της Régine DOUADY³ [1], στο γλωσσάριο σελ. 80, με τον τίτλο "Μερικοί ορισμοί της διδακτικής".

Ωστόσο, μπορεί κανείς να παρατηρήσει τη διαφορά μεταξύ της *διδασκαλίας* (enseignement) και της *μάθησης* (apprentissage). Αυτή η διάκριση είναι ουσιώδης: επιτρέπει την *αποστασιοποίηση* (σύμφωνα με τους όρους της Régine DOUADY) ώστε να αναρωτηθούμε τι προκαλεί τη γνωστή απόκλιση ανάμεσα στους σκοπούς μιας διδασκαλίας, τις προθέσεις των δασκάλων και την πραγματικότητα των γνώσεων που αποκτούν οι μαθητές.

Ο ορισμός αυτός οδηγεί αμέσως στο να αναρωτηθούμε για το πώς λειτουργεί η μάθηση και να προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε το ρόλο των πολλαπλών *μεταβλητών* (variables) που την καθορίζουν:

- επιλογή των *διδασκικών στόχων* (objectifs d'enseignement), αντιλήψεις των διδασκόντων σχετικά με τα μαθηματικά, επιλογή παιδαγωγικής και πρακτικής στην τάξη... (πόλος των καθηγητών),
- χρήση των καινούριων *εννοιολογικών εργαλείων* (outils conceptuel) και διαφοροποίηση των γνώσεων στα μαθηματικά (στατιστική, οικονομικά μαθηματικά, πληροφορική και διακριτά μαθηματικά...), φαινόμενα των καιρών, διαθεματικότητα... (πόλος της γνώσης).
- *προέλευση και ιστορικό των μαθητών*, το στοιχειώδες εκπαιδευτικό υπόβαθρό τους, κοινωνική και ψυχολογική τους κατάσταση ... (πόλος των μαθητών).

Στις μεταβλητές αυτές, πρέπει να προστεθούν εκείνες των οποίων ο χειρισμός βρίσκεται στη διάθεση του δασκάλου, και οι οποίες καθορίζουν την διδακτική κατάσταση:

- *κατευθυνόμενη διδασκαλία* ή επιλογή δραστηριοτήτων, επίλυση προβλημάτων ή εκμάθηση κανόνων, εργασία κατ' άτομο ή σε ομάδες, χρόνος που αφιερώνεται στην εκμάθηση ... (μεταβλητές της κατάστασης, variables de situation).
- *συμβόλαιο* μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών, διαπροσωπικές σχέσεις μεταξύ τους, οι εν γένει προσδοκίες των καθηγητών, συνθήκες αξιολόγησης της εργασίας καθ' ενός ... (μεταβλητές του συμβολαίου, variables de contrat).
- *παρουσίαση των εννοιών* που μελετώνται, προσαρμογή των προαπαιτούμενων, χειρισμός των λαθών, χρησιμοποίηση εξειδικευμένων υλικών, γνώσεις που έχουν προταθεί και έχουν ήδη γίνει αποδεκτές ... (μεταβλητές της μετατόπισης ή των διδακτικών μετασχηματισμών, variables de transposition).

³ Καθηγήτρια και ερευνήτρια στο Πανεπιστήμιο του Παρισιού VII και πρόσφατα διευθύντρια του IREM (μέχρι το 1999 σ.μ.). Δημοσίευσε τη διδακτορική της διατριβή το 1984 με τίτλο: "νοητικά παιχνίδια και η διαλεκτική εργαλείου-αντικειμένου".

Σ' αυτές τις *διδασκτικές μεταβλητές* (variables didactiques) μπορούμε να προσθέσουμε τις συντακτικές μεταβλητές της γνώσης και της επεξεργασίας της από τους μαθητευόμενους:

- ιστορικοί σχηματισμοί των εννοιών και των βασικών εργαλείων στα μαθηματικά, αντιφάσεις, ρήξεις και ανασκευές... (ιστορική επιστημολογία, épistémologie historique).
- ανάπτυξη και διαπλοκή των εννοιολογικών πεδίων στα σύγχρονα μαθηματικά ... (επιστημολογία των μαθηματικών, épistémologie mathématique),
- σχηματισμός εννοιών στα παιδιά, δημιουργία τρόπου λειτουργίας τους... (γενετική επιστημολογία, épistémologie génétique).

Οι παραπάνω αναφερόμενες μεταβλητές μας υποχρεώνουν να εγκαταλείψουμε το πεδίο της διδασκτικής για να εισέλθουμε σ' αυτό της *επιστημολογίας* (l' épistémologie). Τελικά αυτοί οι δυο τομείς είναι αλληλένδετοι σε όλες τις συλλογιστικές που αφορούν στην προετοιμασία των διδασκόντων, ο ένας τροφοδοτεί τον άλλο και διαφωτίζονται αμοιβαία.

Από τα προηγούμενα φαίνεται πόσο η διδασκτική αναζητά και άλλες γνώσεις εκτός των μαθηματικών. Αυτή απαιτεί από τον διδασκτικό μια ευρύτερη παιδεία, ακόμα και αν εργάζεται πάνω σε ένα εξειδικευμένο θέμα. Το συμπέρασμα είναι ότι μια καλή επιμόρφωση στη διδασκτική, αντί να επιδιώκει την εξάντληση του αντικείμενου, πρέπει να καλλιεργήσει τη διάθεση στους καθηγητές να μελετήσουν ποικίλα συγγράμματα, που αφορούν στην διδασκαλία. Θα έχουν έτσι στη διάθεσή τους πολλές εργασίες και αναφέρουμε κυρίως στα φυλλάδια και τα έργα που προκύπτουν από τις εργασίες των IREM.

Ωστόσο, δεν αρκεί να συλλέγουμε αντιλήψεις και αποτελέσματα, που έχουμε αποκτήσει σε διάφορους επιστημονικούς τομείς και αφορούν στην εκπαίδευση, να τα εφαρμόσουμε στη διδασκαλία των μαθηματικών, ώστε να δημιουργήσουμε μια καινούρια επιστήμη.

Η διδασκτική των μαθηματικών συγκροτεί βαθμιαία *θεωρητικά μοντέλα* για μελέτη, ανάλυση και πρόβλεψη του τρόπου λειτουργίας των διδασκομένων. Έτσι λοιπόν, για παράδειγμα, αναφερόμαστε στη θεωρία των διδασκτικών καταστάσεων του Guy BROUSSEAU⁴, της διδασκτικής μετάπλασης του Yves CHEVALLARD⁵, της διαλεκτικής εργαλείου - αντικείμενου της Régine DUADY, ή των εργασιών του Gérard VERGNAUD⁶ που αφορούν στην εκμάθηση της αριθμητικής και των εννοιολογικών πεδίων.

⁴ Καθηγητής στο IUFM στην Bordeaux. Συγγραφέας πολλών εργασιών σχετικά με τα φαινόμενα στη διδασκαλία των μαθηματικών. Εργάστηκε στην θεμελίωση της διδασκτικής.

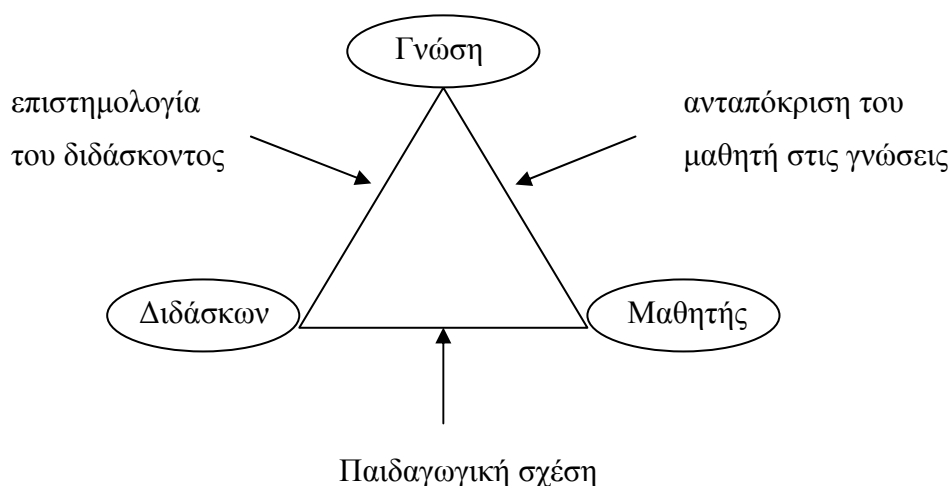
⁵ Καθηγητή του IUFM στο Aix - Marseille. Δημοσίευσε πολυάριθμα άρθρα στα οποία διασυνδέει την θεωρητική εργασία με την διδασκτική μετατόπιση.

⁶ Είναι ψυχολόγος, ερευνητής του CNRS, και διδάσκει στο Πανεπιστήμιο Paris V. Η διατριβή του το 1968 έγινε υπό την καθοδήγηση του J. Piaget. Ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για την κατανόηση των αλγεβρικών δομών από τα παιδιά. Μαζί με τον Guy BROUSSEAU, θεωρούνται οι εισηγητές της διδασκτικής των μαθηματικών στην Γαλλία, ως αυτοτελή επιστημονικό κλάδο.

2) Συστημική προσέγγιση

Συχνά παρουσιάζουν τη διδακτική με την βοήθεια ενός τριγωνικού σχήματος. Αυτό είναι εξίσου περιορισμένο και επιφανειακό όπως και ο ορισμός της προηγούμενης παραγράφου. Παρόλα αυτά μας επιτρέπει να τοποθετήσουμε με μεγαλύτερη σαφήνεια τα αντικείμενα μελέτης της διδακτικής. Επίσης, το εξειδικευμένο λεξιλόγιο αποκτά έτσι ένα οπτικό στήριγμα, ώστε να βοηθήσει τους αρχαρίους.

Το σχήμα αυτό αναφέρεται κυρίως σε μια *συστημική* αντίληψη, δηλαδή ότι οι διδακτικές καταστάσεις γίνονται αντιληπτές ως ένα *σύστημα* το οποίο συσχετίζει τους πρωταγωνιστές. Αυτοί σχηματικά είναι 3 τον αριθμό: ο *διδάσκων*, ο *μαθητής*, και ... η *Γνώση*, δηλαδή αυτοί που είναι απαραίτητοι για την εκμάθηση. Πρέπει να λάβουμε υπ' όψη μας τους όρους αυτούς ως γενικούς. Για παράδειγμα, ο "διδάσκων" φέρει όλες τις συνιστώσες του εκπαιδευτικού συστήματος, που του δίνουν το στίγμα του ιδιαίτερου ρόλου του μέσα στη διδακτική σχέση.



Σχήμα 1 : Το τρίγωνο που αντιπροσωπεύει τη διδακτική σχέση.

Αυτό το τρίγωνο που αντιπροσωπεύει τη *διδακτική σχέση*, έχει τοποθετηθεί στο κέντρο του εκπαιδευτικού συστήματος. Είδαμε ήδη τις μεταβλητές που μπορούν να καθοδηγήσουν τη λειτουργία του.

Οι παράγοντες που εμπλέκονται στην εκπαιδευτική πρακτική είναι πολλοί με αρμοδιότητες τελείως διαφορετικές όπως: οι πολιτικοί προϊστάμενοι, οι υπεύθυνοι των ΜΜΕ, οι διοικήσεις των εκπαιδευτικών ιδρυμάτων και οι γονείς των μαθητών.

Αυτό το περιβάλλον, που ο Yves CHEVALLARD ονομάζει *νοόσφαιρα* [2], παίζει ένα καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη του διδακτικού συστήματος. Για παράδειγμα, το πολιτικό επίπεδο παίρνει μέρος, κατά κάποιο τρόπο, στην διδακτική μετατόπιση καθορίζοντας τους διδακτικούς στόχους και την γνώση που θα διδαχθεί, (βλ. παρακάτω). Η εκπαίδευση των διδασκόντων έχει μια ορισμένη επίδραση στην επιστημολογία των καθηγητών και στις παιδαγωγικές τους αντιλήψεις. Αυτή η εκπαίδευση είναι, κατά ένα μεγάλο μέρος, καθοδηγούμενη από τη νοόσφαιρα, όπου παρεμβαίνουν και πλήθος άλλοι παράγοντες εκτός εκείνων που είναι αναγκαίοι για τη διδακτική σχέση.

Τέλος, δεν πρέπει να ξεχνάμε αυτή την τέταρτη διάσταση της διδακτικής σχέσης: το χρόνο. Το *διδακτικό χρόνο* (temps de l'enseignement) με τη ελικοειδή ροή του κατά τη διάρκεια των σχολικών ετών, καθώς επίσης και το *μαθησιακό χρόνο* (temps de l'apprentissage), με την πολύπλοκη δομή του, τις παλινδρομήσεις και τις ασυνέχειές του.

Έχοντας διαμορφώσει ένα πλαίσιο, μπορούμε να περιγράψουμε τις έννοιες που προσαρτώνται σε κάθε μια από τις τρεις κορυφές και εκείνες στις τρεις πλευρές του διδακτικού τριγώνου.

3) Οι ερευνητικές εργασίες στη διδακτική

Οι έρευνες στη διδακτική των μαθηματικών έχουν αναδείξει έναν ορισμένο αριθμό θεμελιακών ιδεών, γύρω από τις οποίες αρθρώνονται οι σύγχρονες μελέτες.

Η διάκριση και η αξιοποίηση των καταστάσεων μάθησης σε συγκεκριμένα θέματα διδασκαλίας, αποτελεί μέρος της *διδακτικής μηχανικής* (l'ingénierie didactique), για την οποία ο Yves CHEVALLARD παρουσίασε, μια θεωρητική μελέτη [3]. Πολυάριθμες μελέτες για τη διδακτική μηχανική παρουσιάζονται κάθε χρόνο, επεξεργασμένες με θεωρητικά μοντέλα, κι οι οποίες αξιοποιούν ορισμένες εμπειρικές δομές που προκύπτουν από παιδαγωγικές καινοτομίες. Εν τούτοις, η αξιοποίηση στην τάξη των εργασιών της διδακτικής μηχανικής θέτει αναμφισβήτητα ερωτήματα σχετικά με την δυνατότητα *αναπαραγωγής* των φαινομένων που παρατηρήθηκαν, όπως αυτά έχουν επισημανθεί από τη Michèle ARTIGUE⁷ [4].

Η Γνώση

Η *επιστημονική γνώση* (savoir savant) είναι το σύνολο των κοινωνικά διαθέσιμων ανακοινώσεων, που έχουν γίνει αντικείμενο των επιστημονικών δημοσιεύσεων ή κοινοποιήσεων, αναγνωρισμένες ως έγκυρες από την επιστημονική κοινότητα. Θα ονομάσουμε *βιβλίο γνώσης* (livre du savoir) το σύνολο των γραπτών ερευνητικών εργασιών, οι οποίες έχουν συνεισφέρει καινούριες γνώσεις στην κοινωνία, σε ακατέργαστη (για διδασκαλία) μορφή.

Ο Yves CHEVALLARD [2] έδειξε το σύνολο των μετασχηματισμών που υφίσταται η επιστημονική γνώση προτού διδαχθεί. Από την επιλογή της γνώσης που θα διδαχθεί έως την προσαρμογή της στο εκπαιδευτικό σύστημα, υπάρχει μια ολόκληρη διαδικασία που προκαλεί παραμορφώσεις, συγκερασμούς ακόμα και δημιουργία νέων γνώσεων και καταλήγει σ' αυτό που ονομάζουμε *σχολική γνώση* (savoir scolaire), η οποία έχει ενταχθεί μέσα στα προγράμματα και η οποία παρατηρείται κυρίως στα σχολικά εγχειρίδια.

Οι συνθήκες, μέσα στις οποίες θα μεταδοθεί αυτή η σχολική γνώση καθορίζουν εξ' ίσου το μέρος και τη μορφή εκείνου που θα αποκτηθεί από τους μαθητές.

Το σύνολο αυτών των προσαρμογών είναι αυτό που ονομάζουμε *διδακτική μετατόπιση* (transposition didactique).

⁷ Η Michèle ARTIGUE είναι καθηγήτρια στο IUFM στην REIMS, ήταν διευθύντρια στο IREM του Παρισιού VII και είναι γνωστή ερευνήτρια στη διδακτική των μαθηματικών. Μετά την διδακτορική της διατριβή, το 1984 στην αναπαραγωγή των διδακτικών καταστάσεων, οι έρευνες της αφορούν στην διδασκαλία των μαθηματικών εφαρμοσμένων στην φυσική, ιδιαίτερα στις διαφορικές εξισώσεις (διευθύντρια του IREM μετά την Douady, σ.μ.).

Ένα χαρακτηριστικό της γνώσης επιστημονικού τύπου είναι το ότι μπορεί να κοινοποιηθεί (μεταβιβαστεί) και να εφαρμοστεί στην κατανόηση νέων καταστάσεων, διαφορετικών από αυτές που τη γέννησαν. Γι' αυτό ο ερευνητής, που εργάζεται σε ένα συγκεκριμένο θέμα, ανακαλύπτει μια έννοια η οποία εμφορείται μιας ορισμένης γενικότητας, προσπαθεί στην εργασία του να κάνει αφαίρεση των ιδιαίτερων συνθηκών οι οποίες έδωσαν νόημα σ' αυτή την έννοια, ώστε να αναδείξει τις έννοιες που υποβόσκουν και να τις ενσωματώσει μέσα σε ένα συνεκτικό μοντέλο. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο ερευνητής *αποκειμενοποιεί (αποπλαισιώνει) (décontextualise)* αυτή τη γνώση.

Αντίθετα, ένα υποκείμενο που βρίσκεται στο στάδιο της μάθησης χρειάζεται να αποδώσει νόημα στις καινούριες έννοιες που συναντά. Η γνώση που παρουσιάζεται *επαναπλαισιώνεται (récontextualisé)* εκ νέου, συχνά μέσα σε καταστάσεις στείρες και τεχνητές. Ο μαθητής δεν θα αποκτήσει αληθινά ένα καινούριο νοητικό εργαλείο, αν αυτός επίσης με τη σειρά του δεν αποπλαισιώσει αυτό το στοιχείο της γνώσης. Αυτές οι αλληλοδιαδοχικές μεταβάσεις μιας έννοιας, από μια κατάσταση πλαισιοποιημένη σε μια κατάσταση αποπλαισιοποιημένη και αντίστροφα, είναι συνυφασμένες στην νοητική επεξεργασία της έννοιας.

Η Régine DOUDADY [5] έκανε με αυτό τον τρόπο εμφανή τη *διαλεκτική* ανάμεσα στην *εργαλειική* υπόσταση μιας μαθηματικής έννοιας, όταν αυτή εμφανίζεται κατά τη λύση ενός προβλήματος (είτε με στόχο την εκμάθηση της όταν η γνώση δεν έχει ακόμα κατακτηθεί είτε με στόχο την χρήση της, όταν ο απώτερος στόχος είναι η λύση του προβλήματος) και στην *αντικειμενική* υπόσταση, όταν είναι πλέον καθορισμένη, τοποθετείται στο επίκεντρο της διδασκαλίας (οπότε ενδέχεται να λάβει χώρα μια καθοδηγούμενη παρουσίαση).

Η λειτουργία αυτή της διαλεκτικής εργαλείου-αντικειμένου υπήρξε κεντρική μέσα στις αντιλήψεις των διδασκόντων για την μάθηση⁸. Η Régine DOUDADY διατύπωσε ρητά προτάσεις οργάνωσης της διδασκαλίας με *καταστάσεις – προβλήματα*, (situations problèmes). Η μελέτη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των καταστάσεων αυτών θα είναι το θέμα του τέταρτου κεφαλαίου αυτών των σημειώσεων.

Η επιστημονική γνώση έχει δομηθεί σε θεωρίες που συνδέουν μεταξύ τους διάφορες έννοιες. Για να συλλάβουμε μια γνώση (και να την αξιοποιήσουμε), είναι ανάγκη να κατανοήσουμε τις σχέσεις αυτές και τον βαθμό εμπλοκής των σχετικών εννοιών. Γι' αυτό επίσης πρέπει να μπορέσουμε να σταθμίσουμε την ορθότητα της χρήσης της μιας ή της άλλης γνώσης, ώστε να απαντήσουμε σε ενδεχόμενα ερωτήματα.

Έτσι, μια έννοια δεν αποτελεί από μόνη της αληθινά στοιχείο γνώσης, δεν αποκτά εγκυρότητα γνώσης παρά μόνο όταν εισαχθεί μέσα σε ένα πλέγμα δεσμών μαζί με άλλες έννοιες. Ο Gérard VERGNAUD [6], εισήγαγε την έννοια του *ενοιολογικού πεδίου* (champ conceptuel) για να περιγράψει καλύτερα τις δυνατότητες της γνώσης και, στη συνέχεια, να κατανοήσει καλύτερα τα φαινόμενα της μάθησης. Η προοδευτική συγκρότηση των ενοιολογικών πεδίων, η συναρμογή τους και η περιπλοκότητά τους είναι στην πραγματικότητα η κυριότερη διαδικασία (κατά την μάθηση).

Κάνοντας πράξη αυτό, ο Gérard VERGNAUD [7] έδειξε πώς ορισμένες έννοιες μπορούσαν να λειτουργήσουν, πριν ακόμα γίνουν αντικείμενα διδασκαλίας. Διαδικασίες σωστές ή λαθεμένες, οι οποίες αποκαλύπτουν αυτές τις υπόρρητες γνώσεις, τίθενται σε

⁸ Στη Γαλλία (σ. μ)

εφαρμογή. Στη συνέχεια, οι διδακτικοί τις αποκάλεσαν *θεωρήματα στην πράξη*, (*théorèmes en acte*).

Πολυάριθμες *διδακτικές μεταβλητές* (*variables didactiques*) ανήκουν στον πόλο "γνώση" και μπορούν να τροποποιηθούν από τον διδάσκοντα, εάν αυτός έχει επαρκή εκπαίδευση.

Ο διδάσκων και η σχέση του με τη γνώση

Ο διδάσκων, σύμφωνα με την κοινωνική του θέση, τη μόρφωσή του και την επαγγελματική του πείρα, εκφράζεται στην πρακτική του με ένα σύνολο *αντιλήψεων* σχετικών με το επάγγελμά του, την ειδικότητά του, την παιδαγωγική του δράση και τις ικανότητες των μαθητών. Σπάνια, οι αντιλήψεις αυτές στηρίζονται σε δεδομένα με επιστημονικό κύρος. Σχετίζονται με εσωτερικές *αναπαραστάσεις* (*représentations*) βαθιά ριζωμένες. Οι ψυχολόγοι έχουν μελετήσει αυτές τις αναπαραστάσεις. Δεν μπορούμε να διαβεβαιώσουμε ότι μια ειδική επιμόρφωση τις εξελίσσει πραγματικά, αυτό παραμένει ένα ανοικτό ερώτημα το οποίο έχει μελετηθεί από την ομάδα της Aline ROBERT⁹ [8].

Αυτές οι αντιλήψεις¹⁰ εκφράζονται με διαφορετικούς τρόπους. Η *σχέση προς την γνώση* (*rapport au savoir*), για παράδειγμα, μπορεί να ποικίλλει κατά πολύ. Μπορεί να μεταβάλλεται από ένα απόλυτο αισθητισμό έως μια υπέρμετρη χρησιμοθηρία. Μέσα στην ειδικότητά του, ο διδάσκων αναπτύσσει αντιλήψεις που εξαρτώνται από τις συνθήκες των δικών του σπουδών. Για παράδειγμα, η άποψη των *bourbakis* (Μπουρμπακιστών), έχει επηρεάσει εκείνους που υπήρξαν φοιτητές των μαθηματικών κατά την εποχή από '60 έως '80.¹¹

Κατ' αυτόν το τρόπο, οι αντιλήψεις αυτές οργανώνονται σε μια *επιστημολογία* (*épistémologie*), ένα συμπαγές σύνολο συναφών ιδεών για τη γνώση, τη σύνθεση της και την ιστορία της. Οι διδάσκοντες, που στην πλειοψηφία τους δεν εξασκούν άλλα επαγγέλματα, χειρίζονται και παράγουν τη σχολική γνώση με βάση αυτή την επιστημολογία.

Αυτό εξηγεί τις δυσκολίες που υπάρχουν στο να εισαχθούν στην κλασική εκπαίδευση στοιχεία προσανατολισμένα στην παραγωγική διαδικασία, δίνοντας έτσι την εντύπωση ότι το σχολείο είναι αποκομμένο από τον κόσμο της εργασίας.

Με τον ίδιο τρόπο, οι παιδαγωγικές απόψεις των εκπαιδευτικών εξαρτώνται από τη μαθητική και κυρίως τη φοιτητική τους εμπειρία. Η αναπαραγωγή των ήδη "υφιστάμενων" πρακτικών αποτελεί κυρίαρχη πρακτική, παρά την ανάπτυξη εδώ και 70 χρόνια των (επιστημονικών) κινήματων που εκθειάζουν την αξιοποίηση *καινούριων παιδαγωγικών*, οι οποίες να στηρίζονται στις νέες θεωρίες για τις διαδικασίες μάθησης.

Αυτή η επιστημολογία των καθηγητών, έλκυσε την προσοχή των ειδικών στη διδακτική, όπως του Guy BROUSSEAU και του Yves CHEVALLARD, καθώς επίσης και την προσοχή των κοινωνιολόγων της εκπαίδευσης όπως ο Bernard SHARLOT¹², [9].

⁹ Η Aline ROBERT διδάσκει στο Παρίσι VI. Οι έρευνές της αφορούν τη διδακτική στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η διδακτορική της διατριβή αφορά στη σύγκλιση των σειρών. Τελευταία ασχολείται με τις αναπαραστάσεις των διδασκόντων

¹⁰ Εδώ ο συγγραφέας αναφέρεται στα 'πιστεύω' ή όπως αναφέρονται στα αγγλικά τα believes (σ.μ.).

¹¹ Βλέπε 'Επιστημολογίες της Διδακτικής των Μαθηματικών' του Π. Σπύρου (σ.μ.).

¹² Ο Bernard CHARLOT είναι καθηγητής παιδαγωγικής στο Παρίσι VIII. Στη διδακτορική του διατριβή ασχολείται με τις κοινωνικές αναφορές στη γνώση.

Οι τρέχουσες εργασίες, που αφορούν στην *επιμόρφωση των δασκάλων* (formation des maîtres), δείχνουν πώς αν θέλουμε να εξελιχθούν οι παιδαγωγικές αντιλήψεις, διδακτικές και επιστημολογικές, η όποια παρέμβαση πρέπει να επιτελείται από τον πρώτο χρόνο εκπαίδευσης στο Πανεπιστήμιο. Αυτό ασφαλώς περνά από μια αποφασιστική μετατροπή της πανεπιστημιακής εκπαίδευσης, στο επίπεδο των μεθόδων και των περιεχομένων της.

Οι σχέσεις διδασκόντων-μαθητών

Η παιδαγωγική πράξη (l'acte pédagogique) εκφράζεται μέσα από τη σχέση δασκάλου-μαθητή. Ένας εντυπωσιακά μεγάλος αριθμός εργασιών έχει ήδη γραφτεί γι' αυτό το θέμα. Αυτό που περιγράφεται, σε διάφορες δημοσιεύσεις, είναι οι πιθανές μορφές της παιδαγωγικής σχέσης και μελετώνται οι ενδεχόμενες συνέπειές τους.

Συγκριτικές μελέτες φέρνουν συχνά σε αντιπαράθεση *παραδοσιακές παιδαγωγικές* της μετάδοσης της γνώσης με *ενεργητικές παιδαγωγικές* κατευθυνόμενες ή όχι, οι οποίες στηρίζονται σε *υποθέσεις κονστρουκτιβιστικές* (hypothèses constructivistes). Οι τρέχουσες παιδαγωγικές απόψεις προτείνουν πολλαπλές καινοτομίες: όπως το *διδακτικό συμβόλαιο*, (pédagogie de contrat), *την παιδαγωγική μέσω στόχων*, (pédagogie par objectifs), την *Δ.Υ.Υ.* (*διδασκαλία υποβοηθούμενη από υπολογιστή*),... *την παιδαγωγική μέσω εργασιών* (pédagogie de projet). Αυτοί οι γνωστικοί στόχοι και οι συμπεριφορές έγιναν αντικείμενο κατάταξης σε κατηγορίες που ονομάζονται *ταξινομίες* (taxonomies). Η πλέον γνωστή ανήκει στον Benjamin S. BLOOM [10] και αφορά γνωστικό και συναισθηματικό πεδίο.

Στην περιοχή των μαθηματικών εργάστηκε ο Régis GRAS¹³ [11], όσον αφορά τη λειτουργία, τη φύση, την κωδικοποίηση και την ιεραρχία των γνωστικών στόχων - δραστηριοτήτων στη διδασκαλία.

Αυτές οι εργασίες στα παιδαγωγικά διακρίνονται από την διδακτική προσέγγιση της εκπαίδευσης, στο ότι ελάχιστα επιτρέπουν να παρεμβαίνει το είδος της γνώσης ως κινητήριος μοχλός και διακύβευμα στην παιδαγωγική σχέση. Έτσι, η παιδαγωγική παρουσιάζεται ουσιαστικά ως βασική συνιστώσα της διδακτικής προσέγγισης. Μέσα σε αυτή την παιδαγωγική σχέση, η διδακτική αποκτά την επιπρόσθετη σημασία της, με την εφαρμογή και εμπλοκή μιας ειδικής γνώσης¹⁴.

Σημειώνουμε ότι οι εργασίες των διδακτικών των μαθηματικών διαπνέονται ευρέως από τις αντιλήψεις του κονστρουκτιβισμού που ανάγονται στις *θεωρίες του PIAGET* στη γενετική επιστημολογία.

Μια από τις καινοτόμες σχέσεις της διδακτικής στη σχέση καθηγητή-μαθητή είναι η έννοια του *διδακτικού συμβολαίου* (contrat didactique), που εισήγαγε ο Guy BROUSSEAU, [12].

¹³ Ο Régis GRAS είναι καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Nantes. Παρουσίασε την διατριβή του το 79 για τους στόχους απόκτησης γνώσης. Ενδιαφέρεται για τις διδακτικές πλευρές της χρήσης της πληροφορικής στην εκπαίδευση, την τεχνητή νοημοσύνη εφαρμοσμένη στη ΔΥΥ και την εφαρμογή στη διδακτική των εργαλείων για την ανάλυση δεδομένων. (Πρόσφατα έχει δημιουργήσει ένα πρόγραμμα αξιολόγησης των αποτελεσμάτων ερωτηματολογίων που ανταγωνίζεται το PSS).

¹⁴ Ο συγγραφέας εδώ εννοεί ότι τα μοντέλα διδασκαλίας που υπαινίσσεται μπορούν να εξειδικευτούν σε διάφορες θεματικές ενότητες είτε αυτές είναι μαθηματικά είτε φυσική είτε χημεία.

Το διδακτικό συμβόλαιο είναι το σύνολο των κανόνων, υπόρρητων στην πλειονότητά τους, που προσδιορίζουν αυτό που, ο κάθε μαθητής και δάσκαλος, έχει ευθύνη να πράττει μέσα στη διδακτική σχέση.

Αυτό το συμβόλαιο δεν είναι επίσης ρητά διαπραγματεύσιμο, αν και είναι συνεχώς αντικείμενο αμφισβήτησης και επαναπροσδιορισμού. Στην πραγματικότητα, αφού το ζητούμενο στη διδακτική σχέση, είναι η απόκτηση γνώσης, το συμβόλαιο εγκαθίσταται με αυτή την προοπτική και καθίσταται παρωχημένο αμέσως μόλις αυτή αποκτηθεί. Πρέπει λοιπόν να εξασφαλιστεί ένα νέο συμβόλαιο για την κατάκτηση περαιτέρω γνώσεων.

Μπορούμε να δια φωτίσουμε αυτήν την παρατήρηση, αν σκεφτούμε τις απαιτούμενες ικανότητες στη γεωμετρία του Γυμνασίου, ανάμεσα στις αρχικές περιγραφικές δραστηριότητες και στην μεταγενέστερη επικύρωσή τους σε ένα επίπεδο περιορισμών.

Ένας μεγάλος αριθμός *σχολικών αρνήσεων*, οι οποίες δύσκολα γίνονται κατανοητές από τον εκπαιδευτικό, οφείλεται στο γεγονός ότι το διδακτικό συμβόλαιο δεν γίνεται κατανοητό ή απορρίπτεται από τους μαθητές.

Οι μαθητές και η απόκτηση της γνώσης

Οι *γνωσιακοί ψυχολόγοι* εργάστηκαν πολύ πάνω στα φαινόμενα απόκτησης της γνώσης.

Μεταξύ αυτών, εκείνος που ανέπτυξε περισσότερο τις μεθόδους της επιστημονικής έρευνας μέσα από πειράματα, ήταν ο Jean PIAGET¹⁵. Σ' αυτόν οφείλονται ένας αριθμός από θεωρίες, που υιοθετήθηκαν αργότερα, προσαρμόστηκαν και αναπτύχθηκαν. Ανάμεσα σ' αυτές τις εργασίες αναφέρουμε κυρίως τη θεωρία της *εξισορρόπησης*, που αποτελεί το θέμα του δευτέρου κεφαλαίου.

Σ' ό,τι αφορά τη γένεση των ιδεών, διατυπώθηκαν επίσης υποθέσεις που αναγνώριζαν τον πρωταρχικό ρόλο της *δράσης* (l'action), και έκαναν εμφανή την *προσαρμογή* (l'adaptation) των υποκειμένων της γνώσης μέσα από την *αφομοίωση* (assimilation) και την *αναπροσαρμογή* (accommodation).

Η θεωρία του της *εξισορρόπησης* (l'équilibration) δείχνει ότι το παιδί αναδιοργανώνει περιοδικά τις γνώσεις του, υπερνικώντας τις ρήξεις και τις οπισθοδρομήσεις. Είναι αυτό ακριβώς που ο Gaston BACHELARD¹⁶, [13] ερμηνεύει επίσης όταν γράφει ότι μαθαίνουμε συχνά ενάντια στις παλιές γνώσεις ξεπερνώντας τα *εμπόδια* (obstacles) που αυτές συγκροτούν.

Ο PIAGET θεωρεί τη δράση του υποκειμένου καθοριστική για τη μάθηση. Ο Gérard VERGNAUD, που υπήρξε μαθητής του, θα πει ξεκάθαρα "*η πράξη είναι πηγή και κριτήριο της γνώσης*" (στα μαθηματικά, η πράξη συνίσταται στο να θέσουμε και να επιλύσουμε προβλήματα). Μέσα λοιπόν απ' αυτή την οπτική γωνία μπορούμε να πούμε ότι το παιδί κτίζει αυτό το ίδιο τη γνώση του.

¹⁵ Ο Jean PIAGET ψυχολόγος και παιδαγωγός στη Γενεύη, εργάστηκε στην εξέλιξη σκέψης του παιδιού. Είναι ιδρυτής της γενετικής επιστημολογίας, ανέπτυξε τις επιστημονικές μεθόδους της στην ψυχολογία και δημοσίευσε ένα μεγάλο αριθμό θεμελιακών εργασιών ανάμεσα στα 1921 και 1980.

¹⁶ Ο Gaston BACHELARD φιλόσοφος, ορθολογιστής, καθηγητής της ιστορίας και της φιλοσοφίας των επιστημών. Εξέδωσε ένα πλήθος εργασιών στην επιστημολογία όπως το *la formation de l'esprit scientifique* (1938).

Τα συμπεράσματα αυτά οδηγούν τους “διδασκτικούς” στο να ευνοούν αποφασιστικά τη δραστηριότητα των μαθητών (μέσα στη διδακτική σχέση) και στις εργασίες τους να κάνουν αναφορά στην *κονστροκτιβιστική θεωρία της μάθησης*, συμπεραίνοντας ότι ο μαθητής δεν είναι ούτε άδειος νους ούτε εύπλαστη μάζα πάνω στην οποία θ’ αρκούσε να αποτυπώσουμε μια απροσωποποιημένη γνώση.

Για τους “διδασκτικούς” των μαθηματικών, η πράξη συνίσταται στην επίλυση προβλημάτων (αυτό θα μπορούσε να ήταν ένας ορισμός της μαθηματικής δραστηριότητας). Η επίλυση προβλημάτων εκλαμβάνεται, ως ένα ουσιώδες κίνητρο για τη μάθηση στα μαθηματικά, με τις προϋποθέσεις εκείνες που ο Guy BROUSSEAU περιέγραψε στη *θεωρία του των διδακτικών καταστάσεων* [14].

Στην ανάλυσή του διακρίνει:

- *τις καταστάσεις δράσης* (situation d' action), όπου ο μαθητής εκφράζει ορισμένες γνώσεις, με τη μορφή λήψης αποφάσεων,
- *τις καταστάσεις διατύπωσης* (situation formulation), όπου ο μαθητής εκφράζει, με δική του γλώσσα εικασίες, όσον αφορά ιδιότητες που αναγνωρίζει και διαδικασίες που θα υλοποιήσει,
- *τις καταστάσεις επικύρωσης* (situation de validation), όπου οι υποθέσεις - εικασίες δίνουν τη θέση τους στην επιχειρηματολογία και όπου ξεκινάει μια διαδικασία απόδειξης,
- *τις καταστάσεις θεσμοποίησης* (situation d' institutionnalisation), όπου οι επικαλούμενες γνώσεις αναγνωρίζονται, ερμηνεύονται με όρους αυστηρούς, αποπλαισιώνονται και αποπροσωποποιούνται.

Αυτή η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων επιτρέπει την ανάλυση των παρατηρήσεων στις τάξεις που βρίσκονται στη βάση του πειραματισμού και της μορφοποίησης στα πλαίσια της διδακτικής.

Στο ερώτημα, που αφορά στη σχέση των μαθητών με τη γνώση, πρέπει τελικά να υπογραμμίσουμε τον σημαντικό ρόλο του *εμποδίου*.

Ο Gaston BACHELARD έδειξε τη σπουδαιότητα της υπέρβασης των *εμποδίων επιστημολογικής φύσεως*, δηλ. των εμποδίων που είναι συνυφασμένα με την γνώση την ίδια και για την κατασκευή της γνώσης στον καθένα ατομικά.

Τα εμπόδια, που προκαλούν πραγματικές νοητικές δυσκολίες, είναι αυτά που δημιουργούν τους πιο σκληρούς αποκλεισμούς όσον αφορά την εξέλιξη της μάθησης. Αυτά αναδεικνύονται, συχνά, με τις έρευνες των ιστορικών των μαθηματικών, όταν αυτές κατανοούνται στο πλαίσιο της επιστημολογίας.

Επίσης κι' άλλοι τύποι εμποδίων αναδεικνύονται από τους "διδασκτικούς".

- *Διδακτικά εμπόδια*, αναφέρονται στις συνθήκες μέσα στις οποίες έχουν προσληφθεί οι γνώσεις στη σχολική τάξη. Μπορεί να είναι πρωταρχικά και αναγόμενα στη βασική μάθηση ή να αποκαλύπτουν φαινόμενα της διδακτικής μετατόπισης κατά την προσέγγιση καινούριων εννοιών.
- *Εμπόδια ψυχολογικά*, που προκαλούν την άρνηση της μάθησης ή λαθεμένους τρόπους συμπεριφοράς, καθόσον η εμφανιζόμενη κατάσταση θυμίζει στο μαθητή οτιδήποτε άλλο εκτός από την επιδιωκόμενη γνώση, αποσπώντας τη προσοχή του ώστε να μην μπορεί να λειτουργήσει με κατάλληλο τρόπο.

- *Εμπόδια οντογενετικά*, που αναφέρονται σε πρωταρχική μάθηση, αν η ωριμότητα του παιδιού δεν είναι αρκετή ώστε να αποδώσει κάποιο νόημα σ' αυτό που του παρουσιάζεται. Αυτό παραπέμπει στη θεωρία των σταδίων ωρίμανσης του PIAGET¹⁷.

- *Εμπόδια τεχνικά*, που ανάγονται στην πολυπλοκότητα της εργασίας, στα χρησιμοποιούμενα υλικά, κ.λ.π.

Τα παραπάνω εμπόδια εκδηλώνονται μέσω αδυναμίας κατανόησης ή μέσω *λαθών*. Ένα λάθος, όχι μόνο δεν είναι ένα παραπροϊόν της μαθηματικής παραγωγής του μαθητή αλλά έχει διπλή σημασία:

- επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να διερευνήσει ένα πιθανό εμπόδιο (πράγμα που είναι πάντα δύσκολο) με στόχο να το υπερπηδήσει.

- το λάθος είναι πηγή που προκαλεί μια κατάσταση ρήξης για το μαθητή, που θα οδηγηθεί έτσι να ξανακοιτάξει ένα μέρος από τις γνώσεις του ή τις σχετικές διαδικασίες. Ένα λάθος λοιπόν είναι πηγή προόδου, με την προϋπόθεση ότι είναι επιτρεπτό και παρουσιάζεται καλοδεχούμενο μέσα στο διδακτικό συμβόλαιο .

Η στάση ενός εκπαιδευτικού σχετικά με το λάθος αποκαλύπτει τις βαθύτερες αντιλήψεις του για την μάθηση.

Η πείρα δείχνει ότι η συμπεριφορά των εκπαιδευτικών απέναντι στα λάθη των μαθητών είναι ίσως αυτό που αλλάζει πιο γρήγορα μετά από μια επιμόρφωση στη διδακτική.

Προτεινόμενες εργασίες:

Κατά τη διάρκεια της αναγνώρισης και της σχεδίασης σχημάτων συμμετρικών ως προς άξονα, περιγράψτε τις διάφορες διδακτικές προσεγγίσεις, που σας φαίνεται να έχουν μια σπουδαιότητα για τη μάθηση αυτή.

Θα αναφερθούμε στο άρθρο της Denise GRENIER: "Μερικά φαινόμενα της ορθογωνικής συμμετρίας για τους μαθητές της 4ης και 3ης τάξης", που έχει παρουσιαστεί στο τεύχος "Petit X" No 7, 1985.

Βιβλιογραφικές αναφορές:

[1] Régine DOUADY: "De la didactique des mathématiques a l'heure actuelle" dans les cahiers de didactique des mathématiques no. 6, IREM de Paris VII.

[2] Yves CHEVALLARD et Marie- Alberte JOHSUA: "La transposition didactique", éditions de la Pensée Sauvage, ed. 1991.

[3] Yves CHEVALLARD: "Sur l'Ingénierie didactique", publication de l'IREM d' Aix-Marseille, 1982.

[4] Michèle ARTIGUE: "Contribution a l'étude de la reproductibilité des situations didactiques", Thèse de doctorat, publiée par l'IREM de Paris VII.

[5] Régine DUADY: "Rapport enseignement- apprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadres": Les cahiers de didactique no. 3, IREM de Paris VII.

¹⁷ Τέτοια είναι και τα επίπεδα του Van Hiele για τα επίπεδα αφαίρεσης στη Γεωμετρική σκεψη.

- [6] Gérard VERGNAUD: "La théorie des champs conceptuels": Recherches en Didactique des Mathématiques no. 6, 1991, Vol. no. 2,3.
- [7] Gérard VERGNAUD: "L'enfant les mathématiques et la réalité": ed. Peter Lang, Berne 1981.
- [8] Aline ROBERT et Jacqueline ROBINET: "Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement" Cahier de DIDIREM no. I, publié par l'IREM de Paris VII, 1989.
- [9] Bernard CHARLOT: "L'école en mutation" ed. Payot, 1987.
- [10] Benjamin S. BLOOM et al. : "Taxonomie des objectifs pédagogiques, domaines cognitifs et affectifs" les presses universitaires du Québec, 1979.
- [11] Régis GRAS: "Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certains acquis cognitifs et de certains objectifs didactiques en mathématiques", thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1979.
- [12] Guy BROUSSEAU: "Le contrat didactique: le milieu" RDM Vol. 9 no. 3.
- [13] Gaston BACHELARD: "La formation de l'esprit scientifique", ed J. VRIN, 1965.
- [14] Guy BROYSSEAU: "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques ": RDM Vol. 7 no. 2

2. Γενετική Επιστημολογία και Διδακτική

από τα σχήματα στις έννοιες

1) Αντιλήψεις για την μάθηση

Είδαμε από την αρχή του πρώτου κεφαλαίου, τη σπουδαιότητα του διαχωρισμού της διδασκαλίας από την μάθηση.

Από την αυγή του πολιτισμού οι φιλόσοφοι, οι παιδαγωγοί και αργότερα οι ψυχολόγοι, αναρωτήθηκαν για το ποιες είναι οι συνθήκες μέσα στις οποίες ένα παιδί μπορεί να αποκτήσει γνώσεις.

Ο Σωκράτης, στη *μαιευτική* του, θεωρεί ότι κάθε άνθρωπος είναι κάτοχος της καθολικής γνώσης. Ο ρόλος του παιδαγωγού, αυτού του σκλάβου που έχει επιφορτιστεί με την εκπαίδευση των παιδιών, έγκειται στο να διευκολύνει αυτή τη γνώση να αναδυθεί, όπως ένας μαιευτήρας βοηθάει ένα βρέφος να έρθει στη ζωή, κάτω από τις καλύτερες συνθήκες.

Μια δογματική αντίληψη της γνώσης είναι εκείνη που οδηγεί στη μάθηση μέσα από πολυάριθμες επαναλήψεις των ίδιων βασικών κειμένων.

Η μεσαιωνική σχολαστική, επηρεασμένη από τη θεολογία, δογματοποιεί την επιστημονική σκέψη του Αριστοτέλη, και περνώντας από τον ορθολογισμό στην τυποποιημένη σκέψη, τοποθετεί την αντίληψη των εννοιών πριν από εκείνη των πραγμάτων. Η επίδρασή της στην εκπαίδευση αρχίζει με την εποχή του Καρλομάγνου και φτάνει μέχρι την Αναγέννηση.

Η θρησκευτική εκπαίδευση επηρέασε πολύ τις κλασικές αντιλήψεις που θα οδηγούσαν αργότερα σε παραδοσιακές πρακτικές της εκπαίδευσης, στις οποίες μπορούμε να αντιπαραθέσουμε τις ιδέες που αναπτύχθηκαν από τον Jean Jacques Rousseau στον "Αιμίλιο" *«χρειάζεται περισσότερο, όχι να του μάθουμε την αλήθεια, αλλά να του δείξουμε τον τρόπο του να ανακαλύπτει μόνος του πάντα την αλήθεια»*.

Από τη θρησκευτική εκπαίδευση, παραμένουν μέσα στο σχολικό λεξιλόγιό μας οι όροι του "καθήκοντος" και των "σφαλμάτων", οι οποίοι μεταφράζονται σε "προσωπική εργασία" και σε "αβλεψίες".

Η αρχή του 20ου αιώνα κληρονομεί αυτές τις *παραδοσιακές αντιλήψεις*, οι οποίες βασίζονται περισσότερο στην ποιότητα της παρουσίασης μιας απάντησης, στην επανάληψη και στην απομνημόνευση από τη μεριά του μαθητή παρά στη νοημοσύνη του.

Οι ιδέες αυτές εκφράζονται μέσα από διαφορετικές μορφές. Ο μαθητής είναι είτε ένας άδειος νους που πρέπει να γεμίσει σωστά είτε μια εύπλαστη ζύμη πάνω στην οποία θα αποτυπωθεί η γνώση. Η αντίληψη αυτή οδηγεί στο να ερμηνευθούν οι διαφορετικές συμπεριφορές των μαθητών απέναντι στη μάθηση με όρους απλοϊκούς, όπως ότι το παιδί είναι εκ φύσεως *προικισμένο* ή όχι με ικανότητα μάθησης. Η μοντέρνα *γενετική* έδειξε το πόσο λίγο ήταν θεμελιωμένες τέτοιες ερμηνείες.

Οι "διδασκτικοί" κριτάρουν αυτές τις παραδοσιακές αντιλήψεις και αναφέρονται σε *αντιλήψεις κονστρουκτιβιστικές* (ή κατασκευαστικές αντιλήψεις, *conceptions constructivistes*). Εξηγούμε αυτές τις κριτικές με δυο παραδείγματα:

Η αντίληψη του κενού νου¹:

Για πολλούς εκπαιδευτικούς, η μετάδοση μιας γνώσης συνίσταται στο να ρίχνεται τη γνώση μέσα στον νου του μαθητή, ο οποίος υποτίθεται κενός και επιδιώκεται να γεμίσει. Σύμφωνα με την αντίληψη αυτή ένας τρόπος για να πραγματοποιηθεί, είναι η αποστήθιση των "μαθημάτων". Η γνώση έτσι αποκτά μια δογματική υπόσταση. Η επικοινωνία καθηγητή μαθητή στηρίζεται στην ακόλουθη αρχή: "θα γίνει αντιληπτό καλύτερα από τον ακροατή αυτό που εκφράζουμε με ευκρίνεια", αντιστρέφοντας αβάσιμα το φημισμένο απόφθεγμα του Boileau στην Ποιητική Τέχνη: "αυτό που πολύ καλά αντιλαμβανόμαστε πολύ καθαρά εκφράζουμε". Ο Taine προσθέτει αλλού: "δεν κατανοούμε παρά μόνο ότι είναι εξηγήσιμο".

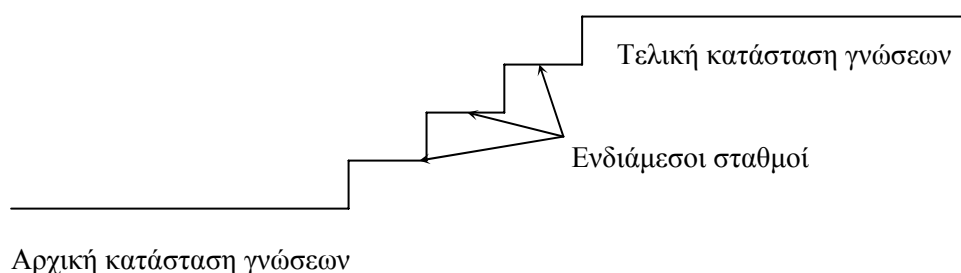
Από αυτή την άποψη, πώς να χειριστούμε τα λάθη των μαθητών; Να τους ξαναμάθουμε την ύλη και να τους εξηγήσουμε τα λάθη; Τι κάνουμε με τους μαθητές αν αποτύχουν; Τους υποχρεώνουμε να επαναλάβουν την τάξη..., έτσι θα ακούσουν καινούριες εξηγήσεις!

Γνωρίζουμε το όρια αυτής της άποψης: ανάμεσα στο νόημα των μηνυμάτων που εμείς προσπαθούμε να μεταδώσουμε και στο νόημα που ο μαθητής προσδίδει σε αυτά, υπάρχει συχνά μια μεγάλη διαφορά.

Τέλος, ο Bachelard έδειξε ότι ο νους ενός μαθητή απέχει πολύ από το να είναι κενός κάθε φορά που καταπιάνεται να προσεγγίσει καινούριες έννοιες.

Η αντίληψη των μικρών βημάτων :

Η αντίληψη αυτή εναπόκειται στην ιδέα ότι για να μεταφέρουμε το μαθητή από ένα επίπεδο γνώσης σε ένα άλλο, αρκεί να διαμορφώσουμε ένα ορισμένο αριθμό ενδιάμεσων σταθμών. Κάθε ένας από αυτούς τους σταθμούς έχει μια μικρή δυσκολία που ο μαθητής οφείλει να υπερπηδήσει.



Σχήμα 2

Την παραπάνω αντίληψη υπαινίσσονται οι καθηγητές όταν, για να εισάγουν μια έννοια, προτείνουν, στους μαθητές ένα φυλλάδιο, ας πούμε, "ανακάλυψης" που περιέχει ένα μεγάλο αριθμό σχετικά πιο εύκολων ερωτήσεων. Τα πρώτα πειράματα διδασκαλίας υποβοηθούμενης από Η/Υ στηρίζονταν σε μια τέτοια αντίληψη.

Γνωρίζουμε τα όρια αυτού του τύπου μάθησης:

¹ Η ουσία της παραγράφου θέλει να αντιπαρατεθεί στην αντίληψη ότι η καλή διδασκαλία είναι εκείνη που εξαντλείται σε επεξηγήσεις. Τονίζεται ότι χρειάζεται να εξασφαλιστεί η ενεργή συμμετοχή του μαθητή (σ.μ).

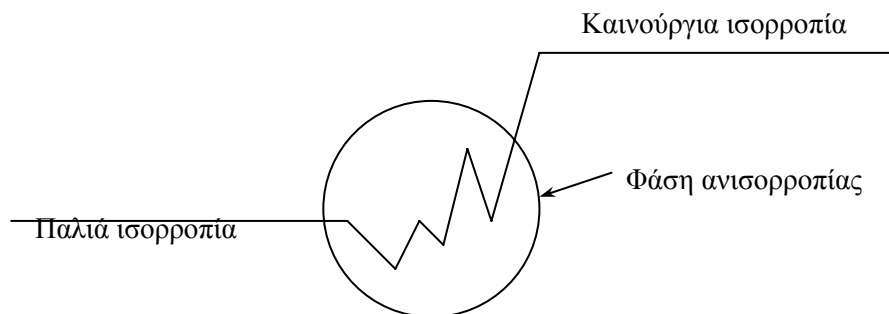
- Αν ο μαθητής μπορεί να φέρει σε πέρας τα ενδιάμεσα βήματα, δε σημαίνει ότι μπορεί να εκτελέσει ολόκληρο το έργο. Το να γνωρίζεις το ντεμπραγιάζ, το γκάζι, το φρένο, το να ξέρεις να γυρίζεις το τιμόνι δε σημαίνει ότι ξέρεις να οδηγείς ένα αυτοκίνητο!

- Εκτός των άλλων, παρατηρούμε ότι ακόμα και αν ο μαθητής μπορεί να φθάσει να συνδυάζει τα ενδιάμεσα βήματα, χρειάζεται ακόμη πολύ κόπο για να μεταφέρει τις γνώσεις του και να λύσει καινούρια προβλήματα μέσα σε καινούρια πλαίσια.

Ο κonstrουκτιβισμός:

Οι έρευνες της διδακτικής δανείζονται έναν ορισμένο αριθμό υποθέσεων που προέρχονται από έρευνες στην ψυχογενετική και στην κοινωνική ψυχολογία:

1. Από τις εργασίες του Piaget «*εκείνος που ενεργεί εκείνος μαθαίνει*». Εδώ η λέξη "ενεργώ" χρησιμοποιείται με την έννοια του "λύνω προβλήματα", τα οποία μπορεί να είναι διατυπωμένα με όρους αφηρημένου.
2. Επίσης, από τις εργασίες του Piaget, που αφορούν στη θεωρία της εξισορρόπησης, καθώς επαναλαμβάνουμε στην παράγραφο που ακολουθεί: «*οι γνώσεις περνούν από ένα στάδιο ισορροπίας σε ένα άλλο μέσα από φάσεις μεταβατικές, στη διάρκεια των οποίων οι προηγούμενες γνώσεις αμφισβητούνται. Εάν αυτή η στιγμή της ανισορροπίας ξεπεραστεί, προκύπτει μια αναδιοργάνωση στις γνώσεις, κατά τη διάρκεια της οποίας οι νέες γνώσεις ενσωματώνονται μέσα στις παλιές*». Η μάθηση λοιπόν δεν συνοψίζεται σε μια απλή απομνημόνευση, σε μια αντιπαράθεση επιδεξιοτήτων ή οριστική διαμόρφωση (Βλ. το παρακάτω σχήμα).



Σχήμα 3

3. Ο Bachelard εισήγαγε την έννοια της αυθόρμητης αναπαράστασης όπως στα φυσικά φαινόμενα. «*Όποια και αν είναι η ηλικία του ατόμου, το πνεύμα δεν είναι παρθένο, δεν είναι "tabula rasa", λευκό χαρτί*», λέει, «*οι (προϋπάρχουσες) αναπαραστάσεις (κάποτε) συγκροτούν εμπόδια για την επιστημονική γνώση*». Στα μαθηματικά, αντιλαμβανόμαστε κάθε στιγμή ότι ο μαθητής δεν είναι κενός νους. Καθένας έχει την δική του αποκρυπτογράφησή για καταστάσεις που του προτείνονται και κινητοποιεί τις παραστάσεις που έχουν σχηματιστεί από νοητικές εικόνες, τεχνικές, λύσεις, αλγορίθμους... οι οποίες εν μέρει βασίζονται σε προηγούμενες γνώσεις. Για παράδειγμα, όταν ένας μαθητής λέει ότι ανάμεσα στο 2,3 και 2,4 δεν υπάρχει δεκαδικός αριθμός, μπορούμε να διακρίνουμε μια ορισμένη αντίληψη που έχει για τον δεκαδικό αριθμό: δύο ακέραιοι χωρισμένοι με ένα

κόμμα. Εφαρμόζει λοιπόν σε αυτό το ζεύγος τον αλγόριθμο ταξινόμησης που ξέρει για τους ακεραίους.

4. Η ανάδειξη της κοινωνιογνωστικής διαμάχης ανάμεσα σε δυο άτομα μπορεί να διευκολύνει τη γνώση. Οι εργασίες της σχολής της Γενεύης για την κοινωνική ψυχολογία έδειξαν το ενδιαφέρον της εργασίας σε ομάδες.

2) Ορισμένες τάσεις στη γνωστική ψυχολογία

Ο 20ος αιώνας είδε την εξέλιξη των νέων μεθόδων στις ανθρωπιστικές επιστήμες. Η εκπαίδευση και η διαδικασία της μάθησης έχουν τώρα γίνει αποδεκτές ως αντικείμενο που αξίζει επισταμένη μελέτη μέσα από μια επιστημονική προσέγγιση.

Τις θεωρίες και τις παιδαγωγικές πρακτικές έχουν σε προτεραιότητα τα κινήματα της νέας εκπαίδευσης (πρωτοπαρουσιάστηκαν κατά την δεκαετία του 1920) και εμπνέονται από τις εργασίες των κοινωνικών και γνωστικών ψυχολόγων.

Πολύ σχηματικά, θα διαχώριζα τρεις τάσεις στη γνωστική ψυχολογία:

1. Οι θεωρίες που περιορίζονται στη μελέτη των παρατηρουμένων συμπεριφορών κατά την διαδικασία της μάθησης. Αυτός είναι ο *συμπεριφορισμός* (behaviourisme) του Skinner, για τον οποίο το υποκείμενο που μαθαίνει είναι ένα μαύρο κουτί, του οποίου δε μπορούμε να γνωρίζουμε τη λειτουργία.

Συμφωνούμε, λοιπόν, να συνδυάσουμε συστηματικά τις απαντήσεις που λαμβάνουμε με τα ερεθίσματα που τις προκάλεσαν. Οι εργασίες στην παιδαγωγική πρέπει να επιτρέπουν ανάδειξη των θετικών βημάτων διδασκαλίας οι οποίες προκαλούν την μάθηση που επιδιώκουμε².

Η αντίληψη αυτή ξεπροβάλλει από έρευνες που στηρίζονται σε ερωτηματολόγια από απλές ερωτήσεις, όπου αξιολογούνται οι σωστές απαντήσεις. Τα πρώτα πειράματα για προγραμματισμένη διδασκαλία μέσω Η/Υ στηρίζονταν σε αυτήν την άποψη.

2. Οι γνωστικές θεωρίες, που αναπτύχθηκαν στις Ηνωμένες Πολιτείες, ενδιαφέρονται για τη λειτουργία του μαύρου κουτιού και προσπαθούν να ανακαλύψουν τη νοητική πορεία που δεσπόζει στην επεξεργασία των απαντήσεων για προβλήματα, συχνά πολύ πιο σύνθετα.

Αυτές οι θεωρίες οδηγούν σε αντιλήψεις πολύ κοντά στην πληροφορική, όσον αφορά τη λειτουργία του εγκεφάλου, βασιζόμενες σε εργασίες σχετικά με την τεχνητή νοημοσύνη.

3. Χωρίς να αντιπαράθεται στην προηγούμενη τάση, η *γενετική επιστημολογία*, η οποία εξελίχτηκε από τους WALLON [15], VIGOTSKY [16] και κυρίως από τον PIAGET [17], προσπαθεί να κατανοήσει πώς δημιουργούνται και συντίθενται οι γνώσεις κατά τη διάρκεια της μάθησης.

Θεωρεί ότι η φύση των γνώσεων εξαρτάται από τον τρόπο που αυτές σχηματίζεται. Επίσης θεωρεί ότι η εξέλιξή τους επιτυγχάνεται με διαδοχικά επίπεδα οργάνωσης.

Τοποθετεί το υποκείμενο στο κέντρο της μαθησιακής πορείας του, ως *πρωταγωνιστή* που οικοδομεί τη γνώση του μέσα από την αλληλεπίδραση που έχει

² Η αντίληψη αυτή προώθησε πολύ τις ποσοτικές και στατιστικές έρευνες (σ.μ).

με το περιβάλλον του³. Το υποκείμενο που μαθαίνει πραγματοποιεί διαδοχικές προσαρμογές (adaptations) διασχίζοντας φάσεις ρήξεων (ruptures) και επαναϊσορροπιών (réequilibrations) με αφομοιώσεις (assimilation) και αναπροσαρμογές (accommodation).

3) Η συνεισφορά του PIAGET και των διαδόχων του

Η διδακτική των μαθηματικών εμπνέεται τα μέγιστα από τις θεωρίες του Piaget, που αποκτούν έτσι μια ειδική συνεισφορά στα φαινόμενα της μάθησης μέσα στις σχολικές καταστάσεις.

Η μελέτη ορισμένων στοιχείων της θεωρίας του Piaget και η εφαρμογή τους στη διδακτική, φαίνεται ενδιαφέρουσα μέσα σ' αυτή τη μικρή περιήγηση από τη γνωστική ψυχολογία. Γι' αυτό θα μπορούσαμε να συμβουλευτούμε την εργασία της Janine ROGALSKI [18].

Θα ήθελα να αναφερθώ συνοπτικά στη θεωρία της ισορροπίας, η οποία δικαιολογεί το παραπάνω μικρό σχήμα, και σε μια εισαγωγή στη θεωρία των σταδίων της διαμόρφωσης της κατανόησης.

A) Η εξισορρόπηση

Σύμφωνα με τον PIAGET, η δράση είναι πρωταρχική για την γένεση των ιδεών, των οποίων η κατασκευή αποτελεί την πηγή της γνώσης.

Ο μαθητής, σ' αυτή την πορεία, προσαρμόζεται στην πραγματικότητα που τον περιτριγυρίζει με δυο στάσεις: την *αφομοίωση* (συσχέτιση, l'assimilation) και την *αναπροσαρμογή* (l'accommodation) και η *εξισορρόπηση* (équilibre).

Η αφομοίωση υποδηλώνει την ενσωμάτωση από το υποκείμενο όλων των δεδομένων στοιχείων που είναι εξωτερικά, κάποια ενσωματώνονται σε *σχήματα* (schèmes) και *έννοιες* (concepts) ήδη προκατασκευασμένες, ενώ άλλα παραμερίζονται ασυνείδητα επειδή δεν επείγει για το υποκείμενο να επιλύσει τις αντιφάσεις που προκαλούν, εφόσον αυτά (τα δεδομένα στοιχεία) δεν βρίσκουν ένα κατάλληλο νοητικό πλαίσιο να ενταχθούν.

Η αναπροσαρμογή αρχίζει όταν ο μαθητής δεν αντέχει πλέον την ανισορροπία που προέρχεται από τις προηγούμενες αντιφάσεις. Ζητά να ενσωματώσει και να ταξινομήσει τις πληροφορίες που τοποθετήθηκαν στην άκρη κατά την εξομοίωση. Αυτό οδηγεί σε τροποποίηση του εννοιολογικού του πεδίου ικανή να συμπεριλάβει και να εξηγήσει αυτές τις πληροφορίες. Υπάρχουν δηλαδή ασυνέχειες μέσα στην διαδικασία πρόσκτησης.

Η εξισορρόπηση είναι η βασική διαδικασία της γνωστικής ανάπτυξης, η οποία αντιστοιχεί στο προτεινόμενο σχήμα: ο μαθητής έχει μια ορισμένη γνωστική ισορροπία, κατόπιν αντιμετωπίζει διαταραχές (συγκρούσεις γνώσεων, αντιθέσεις, ρήξεις....) τις οποίες δεν ξεπερνά αμέσως, προκαλείται μια ύφεση, και ακολουθεί μια φάση αναδιοργάνωσης των γνώσεων ή των εννοιών, η οποία θα τον οδηγήσει στην συγκρότηση μιας καινούριας ισορροπίας.

Οι διάδοχοι του PIAGET έδειξαν ότι η συλλογική προσαρμογή των γνώσεων μπορεί να προηγείται ή τουλάχιστον να ευνοεί τις ατομικές μαθήσεις, κάνοντας γνωστό το ρόλο των γνωστικών και επικοινωνιακών συγκρούσεων μέσα στην τάξη.

³ Η αντίληψη αυτή προώθησε τις ποιοτικές έρευνες που βασίζονται κυρίως στις συνεντεύξεις (σ.μ).

B) Τα στάδια της γνωστικής ανάπτυξης

Ο PIAGET είναι επίσης γνωστός για τη θεωρία των σταδίων. Σήμερα (η θεωρία του Piaget) είναι αμφιλεγόμενη, αλλά καλό είναι να έχουμε γι' αυτή μια άποψη [19].

Μέσα στη διαδικασία που οδηγεί το βρέφος ν' ανακαλύψει το περιβάλλον του, μετέπειτα, το μωρό σε συντονισμένες πράξεις και αργότερα το παιδί να χρησιμοποιεί το μυαλό του σε διάφορες κατηγορίες προβλημάτων, όλο και περισσότερο αφηρημένων, ο Piaget ξεχωρίζει τέσσερα μεγάλα στάδια ανάπτυξης:

1. την αισθητηριοκινητική περίοδο (από 0 έως 2 ετών περίπου)
2. την προλειτουργική περίοδο (από 2 έως 7 ετών περίπου)
3. την περίοδο των τυπικών λειτουργιών (από 7 έως 12 ετών περίπου)
4. την περίοδο των αφηρημένων νοητικών λειτουργιών (πράξεων) (μετά τα 12 χρόνια).

Στα διάφορα αυτά στάδια, η γνωστική λειτουργία του ατόμου είναι διαφορετικής υφής. Ο Piaget εξηγεί ότι αυτά τα στάδια είναι υποχρεωτικά στην διαδοχή τους, και ότι οι ικανότητες που μπορούμε να αναμένουμε από ένα παιδί αντιστοιχούν στο στάδιο της γνωστικής ανάπτυξης που βρίσκεται.

Για να μοντελοποιήσει τις παρατηρούμενες συμπεριφορές, ο Piaget ορίζει τα *σχήματα* σκέψης και πράξης, τα οποία, άπαξ και φτάσουν σε ένα ορισμένο επίπεδο συνειδητής ανάπτυξης, προσφέρονται ως βάση για τη *εννοιολόγηση* (συγκρότηση εννοιών, conceptualisation).

Οι ιδέες του Piaget έχουν επανεξεταστεί και βελτιωθεί από σύγχρονους γνωστικούς ψυχολόγους και κυρίως από τον VYGOTSKY (του οποίου ο P. BOSCHET παρουσιάζει συνοπτικά τις εργασίες σ' ένα πολύ καλό άρθρο [20]) και από τον BRUNNER [21].

Η θεωρία των σταδίων φαίνεται πλέον ως ένα μοντέλο ιδιαίτερα απλοϊκό για να εξηγήσουμε τα φαινόμενα διαμόρφωσης των εννοιών κατά την σχολική ηλικία. Η γραμμική διαδοχή των σταδίων δεν συνυπολογίζει επαρκώς την πολυπλοκότητα της μάθησης μέσα στις πολλαπλές διαστάσεις της.

Κυρίως, δεν συνυπολογίζει τα νοητικά εμπόδια που αναλογούν σε κάθε επί μέρους γνωστικό αντικείμενο και αυτό αποτελεί θέμα σύγχρονων ερευνών στη γνωστική ψυχολογία, ώστε να ολοκληρωθούν έτσι τα δεδομένα της διδακτικής, όπως τα θεωρεί ο G. VERGNAUD.

4) Από τα σχήματα στις έννοιες (des schèmes aux concepts)

Για τον Piaget ένα *σχήμα* υποστηρίζεται από μια λογική δομή που αναπτύχθηκε μέσα στο νου του μικρού παιδιού, σύμφωνα με τις προσλαμβάνουσες από το περιβάλλον του και με τη γενετική του κληρονομιά. Το σχήμα είναι ένα εργαλείο δράσης και γενίκευσης.

Όταν τα σχήματα συντονίζουν ένα πλήθος ενεργειών, επικεντρώνουν την προσοχή στις κοινές ιδιότητες των ενεργειών αυτών αναδεικνύοντας αυτά που ονομάζουμε αναλλοίωτα. Αποτελούν την απαρχή της διαδικασίας της αφαίρεσης.

Για παράδειγμα, η καθημερινή παρατήρηση θα αποκαλύψει στο μωρό ότι "τα πράγματα πέφτουν όταν τα αφήνουμε". Αυτή η γενικευμένη παρατήρηση για όλα τα πράγματα θα δημιουργήσει το σχήμα "τα αντικείμενα πέφτουν", το οποίο λόγω

εξισορρόπησης θα γίνει προοδευτικά πιο σύνθετο: υπάρχουν πράγματα που δεν πέφτουν, άλλα επιπλέουν,...

Μόλις το παιδί αρχίσει να μιλάει, θα μπορέσει να χαρακτηρίσει αυτά τα αμετάβλητα με μία λέξη: θα κατασκευάσει λοιπόν την ίδια στιγμή την έννοια και το συναφές λεξιλόγιο.

Για παράδειγμα θα πει: "αυτό το πράγμα θα πέσει" ή "αυτό το αντικείμενο είναι πιο βαρύ απ' το άλλο". Η έννοια του βάρους θα εγκαθιδρυθεί έτσι, μέχρι να μπει μέσα σ' ένα πλέγμα σχέσεων ανάμεσα στις συμπεριφορές των αντικειμένων, στην συνέχεια μέχρι να διευρυνθεί μέσα στην έννοια της έλξης, και μετά μέχρι να καταλήξει σε μια αφηρημένη κατάσταση τυποποιημένη μέσα σε ένα μοντέλο Μηχανικής.

Οι Επιστήμες της Εκπαίδευσης προτείνουν ως ορισμό μιας έννοιας (concept) [22]: *«Μια έννοια είναι μια ιδέα αφηρημένη και γενική που επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε δεδομένα αισθητηριακά και δεδομένα κατασκευασμένα».*

Η προσέγγιση του Gérard VERGNAUD, είναι περίπου ίδια και προσπαθεί να κάνει εύχρηστο αυτό τον ορισμό :

Μια έννοια χαρακτηρίζεται από την τριάδα: (S,I,s) όπου:

(S) είναι το σύνολο των καταστάσεων που δίνουν νόημα στην έννοια. Κάθε στοιχείο του (S) είναι μια συγκεκριμενοποίηση της έννοιας, ένας από τους αντιπροσώπους της.

(I) είναι το σύνολο των αμετάβλητων λειτουργιών της έννοιας, το σύνολο των ιδιοτήτων που είναι κοινές στα στοιχεία του (S) και που μας κάνουν να τις εντάσσουμε όλες στην ίδια εννοιολογική κατηγορία.

(s) είναι ένα σύνολο όρων, ονομασιών ή συμβόλων που υποδηλώνουν την έννοια.

Για παράδειγμα, η έννοια της συνάρτησης στα μαθηματικά περιέχει το σύνολο των συναρτήσεων που το υποκείμενο στο δικό του επίπεδο θα χαρακτηρίσει ως τέτοιες, τις ιδιότητες που κάνουν μια σχέση ανάμεσα σε σύνολα να είναι συνάρτηση (ορισμός, το μονοσήμαντο) και ακόμη τις λέξεις και τα σύμβολα που παριστάνουν συνήθως μια συνάρτηση, όπως οι όροι εφαρμογής, ο υπολογισμός, $f()$, $X \rightarrow Y$, κλπ...

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον ακριβή όρο της "έννοιας" (concept) αντί για τον γενικό όρο της "ιδέας" (notion) που είναι εν τούτοις πρακτικός για να εκφραστούμε γενικά.

Τέλος, πραγματικά μια έννοια δεν θα υπάρχει παρά μόνο σε αναφορά με άλλες (έννοιες) και μόνο εάν είναι ικανή να εφαρμοστεί στην εξήγηση και στην πρόβλεψη. Δηλαδή, μια έννοια οφείλει να εισαχθεί μέσα σ' ένα πραγματικό "μοντέλο" που σταδιακά συγκροτείται και γίνεται πολυπλοκότερο.

Για παράδειγμα, η έννοια της συνάρτησης δεν θα λειτουργήσει παρά μόνο εάν μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε άλλα μαθηματικά αντικείμενα που δεν είναι συναρτήσεις και αν μας επιτρέπει να θεωρήσουμε μια συνάρτηση ως ένα αντιπρόσωπο αυτής της έννοιας. Η πρόσβαση σε αυτό το νοητικό επίπεδο είναι μακρόχρονη και γεμάτη από εμπόδια, επιστημολογικά και διδακτικά. Αποδεικνύεται ότι οι φοιτητές μπαίνοντας ακόμα και στο πανεπιστήμιο δεν την έχουν επιτύχει.

Αυτές οι τελευταίες παρατηρήσεις οδήγησαν τον Gérard VERGNAUD να αναπτύξει την ιδέα των *εννοιολογικών πεδίων* (champs conceptuel) [6], των οποίων η κατασκευή για τα διάφορα επίπεδα της σχολικής ζωής είναι το πραγματικό στοίχημα της μαθησιακής διαδικασίας.

Το άρθρο της Janine ROGALSKI [18] εκθέτει αυτό το βασικό στοιχείο της διδακτικής θεωρίας.

Μια έννοια δεν θα αποκτήσει την αφηρημένη υπόστασή της παρά μόνο εάν αποδεσμευτεί από το πλαίσιο μέσα στο οποίο παρουσιάστηκε. Πρέπει λοιπόν να προτείνουμε πολλά παραδείγματα χρησιμοποιώντας τις ίδιες τις έννοιες σε διαφορετικές καταστάσεις και αν είναι δυνατόν σε διαφορετικά εννοιολογικά πεδία.

Αυτή η παρατήρηση οδήγησε την Régine DOUADY [1] να αναπτύξει τη θεωρία της εναλλαγής πλαισίων.

Προτεινόμενες εργασίες:

Μέσα σ' ένα από τα προγράμματα των Μαθηματικών στο γυμνάσιο και στο λύκειο εντοπίστε:

- α) Τις καινούριες έννοιες για τους μαθητές,
- β) Τις έννοιες που αποτελούν αντικείμενο μιας εργασίας εμβάθυνσης.
- γ) Για ένα από τα παραδείγματα, ερευνείστε το ίδιο ή τα εννοιολογικά πεδία που υπονοούνται, και διευκρινίστε ποιες είναι οι γνώσεις που πρέπει να προετοιμάσουν την κατασκευή τους στο αναμενόμενο για την τάξη αυτή επίπεδο.

Μπορούμε να βασιστούμε στο άρθρο της Janine ROGALSKI, [18].

Βιβλιογραφικές αναφορές:

- [1]. Régine DOUADY: "De la didactique des mathématiques a l', heure actuelle" dans les cahiers de didactique des mathématiques no. 6, IREM de Paris VII.
- [6]. Gérard VERGNAUD: "La théorie des champs conceptuels": Recherches en Didactique des Mathématiques no. 6, 1991, Vol. no.2,3.
- [15]. Henry WALLON: De l'acte a la pensée" ed. Flammarion, 1970. "La vie mentale" ed. Sociales, 1982.
- [16]. L.S. VYGOTSKY: "Thought and language" MIT Press, New York, 1962.
- [17]. Jean PIAGET: "Six études de psychologie" ed. Denoël, 1964.
- [18]. Janine ROGALSKI: "Quelques éléments de théorie piagétienne et didactique des mathématiques": dans les cahiers de didactique des mathématiques no. 2, IREM de Paris 7
- [19]. Jean PIAGET: "Problèmes de psychologie génétique" et "Mes id\{e}es" ed. Denoël - Gonthier, 1983 et 1977.
- [20]. Françoise BOSCHET: "Un aperçu des travaux de VYGOTSKY" dans les cahiers de didactique no. 52, publiés par l'IREM de Paris VII, 1988.
- [21]. Jérôme BRUNNER: "A study of thinking" ed. Wiley and sons, New York, 1956.
- [22]. Britt-Mari BARTH: L'Apprentissage de l'abstraction" Actualités des Sciences Humaines RETZ, 1987.

3. Επιστημολογία και διδασκαλία των μαθηματικών

Η επιστημολογία (épistémologie) μελετά τη συγκρότηση των επιστημονικών γνώσεων. Έτσι, μελετά τις γνώσεις στην ιστορική τους γένεση¹, στην νοητική τους ανακατασκευή που πραγματοποιείται ατομικά στον καθένα², καθώς επίσης στη διάρθρωσή τους³ κάθε φορά στο δεδομένο επίπεδο της ανάπτυξης της επιστημονικής γνώσης συνολικά.

Η επιστημολογία περιέχει σφαιρικά τη φιλοσοφία των επιστημών, την ιστορία της ανάπτυξής τους και τις κατάλληλες μεθοδολογίες για κάθε μια απ' αυτές.

1) Επιστημολογία και Διδακτική

Η διδακτική των μαθηματικών θέτει σε προτεραιότητα την ερώτηση που αφορά στις έννοιες, την γένεση τους και τη κατασκευή τους. Το τετράδιο του Didirem No 3: «Επιστημολογία και διδακτική», γραμμένο από την Michèle ARTIGUE [23] δείχνει τη σπουδαιότητα των επιστημολογικών θεμελίων στην εργασία των ερευνητών της διδακτικής.

Για να αρκεστούμε στο θέμα των εννοιών, μπορούμε να προσεγγίσουμε την επιστημολογία ως γνώση των διαδικασιών μέσα από τις οποίες οι μαθηματικές έννοιες σχηματίζονται, σε τρεις κατευθύνσεις:

- Τη μελέτη της ιστορικής τους διαμόρφωσης
- Τις εργασίες πάνω στην διαδικασία της οικοδόμησής τους κατά την μάθηση
- Τον αναστοχασμό πάνω στα μαθηματικά, τις σχέσεις μεταξύ εννοιών.

Αυτές οι τρεις κατευθύνσεις διαφαίνονται μέσα στις ερωτήσεις στην αριστερή στήλη του πίνακα της επόμενης σελίδας, με τον τίτλο «Επιστημολογία και ερωτήσεις διδακτικής», τμήμα από το βιβλίο των Jean Pierre ASTOLFI και Michael DEVELAY: «Η διδακτική των πειραματικών επιστημών» [24].

Σε κάθε θέμα επιστημολογικού προβληματισμού, οι συγγραφείς αντιστοίχισαν ένα ερωτηματολόγιο διδακτικής. Βλέπουμε κατ' αυτό τον τρόπο, άμεσα και απλά τους στενούς δεσμούς μεταξύ της επιστημολογίας και της διδακτικής, όσον αφορά στις έννοιες. Ο συλλογισμός τους προσεγγίζει επίσης τα ζητήματα των νόμων και των θεωριών, καθώς επίσης και το θέμα της επιστημονικής μεθόδου, η οποία σύμφωνα με το φυσιοδίφη του 19ου αιώνα Claude Bernard, θα προχωρεί κατά την αναδρομική πορεία τη λεγόμενη ΠΥΠΑΕΣ: Παρατήρηση, Υπόθεση, Πειραματισμός, Αποτελέσματα, Ερμηνεία, Συμπέρασμα.

Σε ό,τι αφορά την απόκτηση των εννοιών, σύμφωνα με τις εργασίες του Gaston BACHELARD και του Guy BROUSSEAU [25], αποδείχτηκε η σπουδαιότητα της έννοιας του επιστημολογικού εμποδίου (obstacle), για να εξηγηθούν οι δυσκολίες της μάθησης στα μαθηματικά (θα επανέλθουμε σ' αυτή την ιδέα στο κεφ. 7) Στο τετράδιο του Didirem No 3, που έχει συντάξει η Michèle ARTIGUE αναπτύσσεται αυτό το θέμα στα εδάφια IIIa και IIIc, όπου και αναφέρονται τα χαρακτηριστικά ενός εμποδίου (βλ. σελ 18 -19).

Μ' αυτό το ζήτημα των εμποδίων, των οποίων η αναγνώριση και ο εντοπισμός αποτελεί αντικείμενο σύγχρονων ερευνών, είναι συνδεδεμένο το ζήτημα των αντιλήψεων (conceptions). Αυτό περιλαμβάνει τις αντιλήψεις του εκπαιδευτικού που καθορίζουν το περιεχόμενο της

¹ Ιστορική επιστημολογία (πλαίσιο ανακάλυψης).

² Που έχει σχέση με την γνωσιακή ψυχολογία (πλαίσιο ανακάλυψης).

³ Σημασιολογικά και μεθοδολογικά ζητήματα (πλαίσιο δικαιολόγησης).

διδασκαλίας του και τις αντιλήψεις του μαθητή, αυθόρμητες ή κατασκευασμένες, η αναγνώριση των οποίων επιτρέπει στον καθηγητή να καθοδηγήσει καλύτερα την πορεία της μάθησης.

Το κείμενο της Michèle ARTIGUE, δίνει από τη σκοπιά αυτή τη θέση του Gérard VERGNAUD, την οποία ανέπτυξε και η ίδια, σχετίζοντάς την με εκείνη της έννοιας.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι - Επιστημολογία και διδακτικές ερωτήσεις

<i>Τα χαρακτηριστικά μιας σύγχρονης επιστημολογίας των επιστημών</i>	<i>Τα αντίστοιχα διδακτικά ερωτήματα</i>
Η γενική μεθοδολογία της έρευνας δανεισμένη από τον G. Bernard για τις επιστήμες της φύσης δεν είναι του τύπου ΠΥΠΑΕΣ, μια εκδοχή απλουστευτική η οποία δεν υπολογίζει τον πλούσιο και απρόβλεπτο χαρακτήρα της ανακάλυψης.	Ποιοι τύποι διαδοχικών προσεγγίσεων στην εκμάθηση επιτρέπουν μία εκπαίδευση απαλλαγμένη από δογματικούς προκαθορισμούς;
Τα γεγονότα στις επιστήμες παίρνουν τα νοήματά τους σύμφωνα μ' ένα σύστημα προϋπάρχουσας σκέψης.	Πώς να παρουσιάσουμε κάποια γεγονότα δείχνοντας ότι προσέφεραν υπόσταση σε διάφορες ερμηνείες κατά την διάρκεια της ιστορίας, σε συνδυασμό με το επίπεδο της σκέψης της εποχής εκείνης;
Η δόμηση των εννοιών στην ιστορική τους πορεία πραγματοποιείται μέσα από διαδοχικές αναπροσαρμογές με κάθε στάδιο να περιλαμβάνει διάφορα επιστημολογικά εμπόδια τα οποία ενίοτε αίρονται αργότερα.	Μπορούμε, για μια δοθείσα έννοια, και για τα διάφορα στάδια της συγκρότησής της να φωτίσουμε τα διάφορα εμπόδια, που ξεπεράστηκαν κατά τη ροή της ιστορίας;
Η επιστήμη δεν περιορίζεται στα τρέχοντα συμπεράσματα και επιπλέον αυτά δεν είναι οριστικά.	Πώς μπορούμε να δείξουμε τι διακυβεύεται ακόμα και σήμερα σε σχέση με τις διδασκόμενες έννοιες και σε ποιες κατευθύνσεις οδηγείται η έρευνα;
Η συγκρότηση της επιστήμης δεν αντιστοιχεί σε μια οποιαδήποτε αναζήτηση μιας ιδανικής αλήθειας άσχετα με τη λειτουργία των ανθρωπίνων κοινωνιών.	Ποια παραδείγματα παρόντα και παρελθόντα μπορούν να δείξουν τι διακυβεύεται στις επιστημονικές έρευνες;
Οι επιστημονικές έννοιες είναι κατ' αρχήν απαντήσεις σε προβλήματα.	Πώς μπορούμε να σκεφτούμε μια επιστημονική εκπαίδευση μέσα από λύση προβλημάτων;
Μια επιστημονική έννοια έχει μια ισχύ ερμηνευτική και προβλεπτική γιατί πριν από όλα είναι μια σχέση αποκομμένη από τις συγκεκριμένες καταστάσεις που της έδωσαν νόημα.	Πώς μπορούμε να επιτρέψουμε στις κατασκευασμένες στην τάξη έννοιες να έχουν μια λειτουργία ερμηνευτική και προβλεπτική;
Μια έννοια δεν είναι επεξηγηματική παρά μόνο μέσα στο πλαίσιο εγκυρότητας που είναι περιορισμένη.	Σκεφτόμαστε να περιορίσουμε τις έννοιες κατά τη διάρκεια της μάθησης;

Μια επιστημονική έννοια μπορεί να διατυπωθεί κατά τρόπο ιεραρχημένο, όσον αναφορά τα διάφορα επίπεδα αφάιρησης.

Οι έννοιες δεν δίδονται σε γραμμική σειρά αλλά κάθε επιστημονική έννοια βρίσκεται στο κέντρο ενός δεσμού μέσα σ' ένα εννοιολογικό πλέγμα.

Οι επιστημονικοί νόμοι συχνά δεν θεωρούν, παρά μόνο μια αιτία, τη σπουδαιότερη, για να εξηγήσουν μια δοθείσα κατάσταση.

Οι θεωρίες γενικά μοντελοποιούνται και τα μοντέλα δεν αντιστοιχούν παρά σε μια κατασκευή εικονική και αφηρημένη του πραγματικού. Δεν είναι σε καμία περίπτωση το πραγματικό.

Ποιες είναι οι διαβαθμίσεις διατύπωσης για μια δοθείσα έννοια;

Εμφανίζοντας μια δεδομένη έννοια σε μια διδακτική κατάσταση πρέπει να εμφανίσουμε μαζί και το εννοιολογικό πλέγμα αυτής της έννοιας;

Πώς μπορούμε να δίδουμε εξηγήσεις και συγχρόνως να εισάγουμε επιφυλάξεις γι' αυτές;

Το μοντέλο και το πραγματικό: τα όρια του μοντέλου, αυτό που το μοντέλο επιτρέπει να εξηγήσουμε και αυτό που δεν εξηγείται. Αυτό το ερώτημα ενυπάρχει σε κάθε επίπεδο κατά την διαδικασία της μάθησης;

Η ανάλυση των εμποδίων και των εννοιών⁴ των μαθητών επιτρέπει να κατανοήσουμε τη λειτουργία και το ενδιαφέρον να δώσουμε μια *ιστορική προοπτική* στη διδασκαλία των μαθηματικών (είναι ειδικά μια από τις σπουδαιότερες εργασίες των Inter-IREM "η επιστημολογία και ιστορία των μαθηματικών", στην οποία έδωσε πνοή η Evelyne BARBIN⁵, να την αναπτύξουμε στο πλαίσιο μιας κονστρουκτιβιστικής παιδαγωγικής, να παρουσιάσουμε μια σφαιρική προσέγγιση των μαθηματικών, κάνοντας την ίδια επίσης αντικείμενο συλλογισμού.

Θα ξανακερδίσουμε έτσι το ενδιαφέρον για τις ιστορικές μελέτες ώστε να μας αποκαλυφθούν οι ποικίλες αντιλήψεις με αφορμή την ίδια έννοια.

2) Επιστημολογία, αναπαραστάσεις⁶ και σχέση με τη γνώση

Είναι εύλογο οι εκπαιδευτικοί να αναπτύσσουν πρακτικές που είναι συνδεδεμένες με εκείνες τις αντιλήψεις για τα μαθηματικά και την διδασκαλία τους, που οι ίδιοι συγκρότησαν κατά την διάρκεια των σπουδών τους.

Ωστόσο, υπάρχουν κάποιες σταθερές : Η *σχέση του διδάσκοντα προς τη γνώση* (μπορούμε να συμβουλευτούμε γι' αυτό το θέμα το άρθρο του Yves CHEVALLARD «*le concept de rapport au savoir*» [26]), σε όλες της τις διαστάσεις: πολιτιστικές και προσωπικές, κοινωνικές και σχολικές, δεν είναι της ίδιας φύσης με αυτήν ενός μηχανικού ή ενός εκπαιδευμένου τεχνίτη.

⁴ Έννοιες, αντιλήψεις, αναπαραστάσεις είναι κατηγορίες που μας επιτρέπουν να μοντελοποιήσουμε, να διατυπώσουμε τη λειτουργία της σκέψης και τη γένεση των ιδεών. Ο φιλόσοφος Edgar MORIN μας εξηγεί πώς οι ιδέες οργανώνονται σε ζωντανά συστήματα, πώς αναπτύσσονται με κάποια συνοχή και πώς αμύνονται έναντι των παρεϊσακτων ιδεών. Αυτές οι ιδέες γεννιούνται, εμπλουτίζονται, ενισχύονται στο εσωτερικό όλο και πιο πολύπλοκων συμπλεγμάτων, γερνάνε και πεθαίνουν σε συμφωνία με τους νόμους της εξέλιξης.

⁵ Η Evelyne BARBIN είναι καθηγήτρια στο IUFM της Créteil και κύριος συνεργάτης του IREM του Paris Nord. Μετά την Jean D' HOMBRES και μαζί με τον Rudolf BKOUICHE, η συμβολή της στις έρευνες στην ιστορία των μαθηματικών, πάντα συνδεδεμένες με ερωτήσεις για τη διδασκαλία τους, παρείχε στους δασκάλους πολύ χρήσιμα εργαλεία με διάφορες εργασίες και ιδιαίτερα με τα άρθρα του περιοδικού *Repères-IREM*, στη συντακτική επιτροπή του οποίου συμμετέχει ενεργά.

⁶ Στο κεφάλαιο αυτό οι αναπαραστάσεις δεν είναι σημειωτικές.

Μπορούμε, σύμφωνα με τον Guy BROUSSEAU, να προσπαθήσουμε να κάνουμε φανερά αυτά τα σταθερά στοιχεία και να επικεντρωθούμε περισσότερο σ' αυτό που θα μπορούσαμε να ονομάσουμε *επιστημολογία του καθηγητή*.

Τοποθετώντας την συγκρότηση των εννοιών στο κέντρο των εκπαιδευτικών στόχων είναι σαν να δηλώνουμε έναν ορισμένο τύπο ανταπόκρισης (σχέσης) προς τη γνώση.

Οι εργασίες της Aline ROBERT και της Jacqueline ROBINET [8] δείχνουν ότι αυτή η σχέση προς τη γνώση εδράζεται ακριβώς στη βάση των *μεταγνωστικών αναπαραστάσεων* (représentation méta cognitives.), οι οποίες συνιστούν ένα συνεκτικό πλέγμα, κατασκευάζονται μαζί με το θέμα και αντιστέκονται σε κάθε μεταβολή που δεν θα προερχόταν από ένα ισχυρό αίτημα. Το να τροποποιήσουμε αυτή την σχέση προς τη γνώση, σημαίνει να αγγίξουμε αυτές τις αναπαραστάσεις. Η προσαρμογή τους είναι βραδεία και παλινδρομική.

Ο όρος των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιείται εδώ, είναι δανεισμένος από την κοινωνική ψυχολογία, ιδιαίτερα στις εργασίες του MOSCOVICI, οι οποίες παρουσιάστηκαν από τους Aline ROBERT και Jacqueline ROBINET που δίνουν τον ακόλουθο ορισμό:

Η αναπαράσταση (représentation) είναι το προϊόν μιας διανοητικής ενέργειας από την οποία το άτομο (η μια ομάδα ατόμων) ξαναφτιάχνει το πραγματικό το οποίο αντιμετωπίζει και του προσδίδει μια ορισμένη σημασία.

Προσθέτουν: Οι αναπαραστάσεις είναι οργανωμένες σε ένα συμβολικό δομημένο σύστημα του οποίου η κύρια λειτουργία είναι η αντίληψη και ο έλεγχος του κόσμου από το υποκείμενο, επιτρέποντάς του να τον κατανοήσει και να τον ερμηνεύσει. Με τον τρόπο αυτό η αναπαράσταση επιτρέπει την προσαρμογή του υποκειμένου και γίνεται έτσι ένα κύριο στοιχείο που καθοδηγεί την συμπεριφορά του.

Οι έρευνες που προσπαθούν να διασαφηνίσουν τις αντιλήψεις και την επιστημολογία των καθηγητών, καταλήγουν στο να προσπαθούν να καταλάβουν πώς λειτουργούν αυτές οι αναπαραστάσεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και για ότι σχετίζεται με την διδασκαλία τους καθώς επίσης και να μελετήσουν «*το ερμηνευτικό φίλτρο που συγκροτούν ως ένα εργαλείο κατευθυνόμενης αποκωδικοποίησης της πραγματικότητας*». Αυτές ακριβώς είναι οι αναπαραστάσεις, που η Aline ROBERT ονομάζει **μεταγνωστικές (méta cognitives)**.

Σε ποια έκταση μια εκπαίδευση καθηγητών (αρχική και συνεχής) μπορεί να φτάσει τέτοιους στόχους, και από εκεί να καταλήξει σε ένα θεμελιακό μετασχηματισμό της διδακτικής πρακτικής ; Το ερώτημα παραμένει ανοιχτό.

Το άρθρο του Bernard CHARLOT: «*Ιστορία της αναμόρφωσης των μοντέρνων μαθηματικών*» [27] και «*Τι να κάνουμε με τα μαθηματικά*» [28] δείχνουν ακριβώς αυτόν το δεσμό μεταξύ της επιστημολογίας και της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Η μεταρρύθμιση των προγραμμάτων του 1971 άφησε μια πικρή γεύση στους εκπαιδευτικούς, που τη βίωσαν, έγιναν οι προπαγανδιστές της (κυρίως στο κέντρο του APMEP) και κατόπιν την απέρριψαν βίαια, χωρίς να μπορέσουν να ξεκαθαρίσουν τους λόγους της αποτυχίας της.

Στηριζόμενος σε μια κριτική της *δομιστικής* (structuraliste) προσέγγισης στο γυμνάσιο και στο λύκειο, των *θεμελίων* των μαθηματικών, ο Bernard CHARLOT προτείνει μια απάντηση βασισμένη σε κονστρουκτιβιστικές αντιλήψεις της μάθησης. Αυτά τα κείμενα δείχνουν πώς η πρακτική της διδασκαλίας απορρέει από μια σχέση προς τη γνώση, η οποία προέρχεται από επιστημολογικές αντιλήψεις για τις οποίες δεν γνωρίζουμε πολύ καλά το πώς συγκροτήθηκαν στους εκπαιδευτικούς.

Οι ασχολούμενοι με τη διδακτική συμπληρώνουν αυτή την ερμηνεία από ακριβείς αναλύσεις των φαινομένων της *διδασκτικής μετατόπισης* (transposition didactique), της οποίας ο Yves CHEVALLARD [2] έδειξε την αναγκαιότητα και τα επιμέρους αποτελέσματα τα οποία αυτή εισάγει στην σχέση των εκπαιδευτικών προς την γνώση.

Αυτά τα φαινόμενα αποκαλύπτουν τις δυσκολίες προσαρμογής του εκπαιδευτικού συστήματος σε γνωστικούς στόχους, οι οποίοι συγγέροντας βάσεις και θεμέλια προτείνουν μια τεχνητή αναμόρφωση στη διδακτέα γνώση.

Στο επόμενο κεφάλαιο, επανερχόμενοι στο χώρο της διδακτικής, θα προσεγγίσουμε αυτό το θέμα κλειδί που είναι η ιδέα της διδακτικής μετατόπισης. Αυτή η ιδέα έχει επανεξεταστεί από τους ασχολούμενους με τη διδακτική άλλων επιστημών, ώστε να αποτελέσει μια έννοια κοινή, η οποία κατά τον Yves CHEVALLARD θα μπορούσε να ενταχθεί σε μια σφαιρική θεωρία και να παρουσιαστεί ως μια ανθρωπολογία προσέγγιση της γνώσης [29].

Προτεινόμενες εργασίες:

1. Με παραδείγματα που θα πάρετε από την περιοχή των μαθηματικών, επεξηγήστε τις ερωτήσεις που τίθενται στον πίνακα 1: "Επιστημολογία και διδακτικές ερωτήσεις".
2. Με βάση το κείμενο της Michèle ARTIGUE [23] "Επιστημολογία και διδακτική" σελ 20 και 21, μελετήστε τις διάφορες ιστορικές αντιλήψεις της έννοιας της εφαπτομένης και να τις συσχετίσετε με τους ορισμούς που βρίσκονται στα εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.
3. Για σας, τι σημαίνει κάνω μαθηματικά; Αντιπαραθέστε τις απαντήσεις σας μ' αυτές του Bernard CHARLOT [28].
4. Τι ξέρετε για την ονομαζόμενη μεταρρύθμιση "Μοντέρνα Μαθηματικά"; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί απέτυχε;

Βιβλιογραφικές αναφορές:

- [2] - Yves CHEVALLARD et Marie- Alberte JOHSUA: "La transposition didactique", éditions de la Pensée Sauvage, ed. 1991.
- [8] - Aline ROBERT et Jacqueline ROBINET: "Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement" Cahier de DIDIREM no. I, publiée par l'IREM de Paris VII, 1989.
- [23] - Michèle ARTIGUE: "Épistémologie et didactique" cahier de didirem no. 3, IREM de Paris 7, 1989.
- [24] - Jean Pierre ASTOLFI et Michel DEVELAY: "La didactique des Sciences Expérimentales" ed. PUF, col. "Que Sais-je?" no. 2448, 1989.
- [25] - Guy BROUSSEAU: "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques" RDM Vol. 4 no. 2, 1983.
- [26] - Yves CHEVALLARD: "Le concept de rapport au savoir- rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel" actes du séminaire didactique des mathématiques et de l'informatique, Grenoble, LSD-IMAG, Institut Fourier, 1988-1989.
- [27] - Bernard CHARLOT: "Histoire de la réforme des "maths modernes"; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique" Bulletin ARMER NO, 352, février 1986.
- [28] - Bernard CHARLOT: "Qu'est-ce que faire des maths?" Bulletin ARMER No, 359, juin 1987.
- [29] - Yves CHEVALLARD: "Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique", actes de l'École d'Été de didactique de mathématiques, Plestin les grèves 1991 (à paraître).

4. Διδακτική μετατόπιση

Στο βιβλίο του: «*Η διδακτική μετατόπιση από την επιστημονική γνώση στη διδακτέα ύλη*»¹ ο Yves CHEVALLARD [1] ανέπτυξε τις θεωρητικές βάσεις αυτής της έννοιας, την οποία είχε εισαγάγει ο Michel VERRET². Η διδακτική άλλων επιστημών εμπνέεται ευρέως απ' αυτήν την ιδέα, παρ' όλες τις διατυπωμένες από τον Gilbert ARSAC³ επιφυλάξεις στα μαθήματα του DEA [30]. Αν και δε θα μπορέσουμε να αναπτύξουμε ευρέως αυτό το θέμα, εν τούτοις θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τις ουσιαστικές του όψεις.

Κατά τον Yves CHEVALLARD, ο όρος της διδακτικής μετατόπισης υποδεικνύει *το σύνολο των μετασχηματισμών που υφίσταται μια γνώση ώστε τελικά να καταστεί διδακτέα*. Αυτός ο ορισμός μας οδηγεί στη διάκριση μεταξύ *επιστημονικής γνώσης* (savoir savant) και *διδακτέας γνώσης* (savoir enseigné) για τη μελέτη των λειτουργιών τους.

1) Η επιστημονική γνώση

Είναι χρήσιμο να αναρωτηθούμε για την επεξεργασία της.

Ο μαθηματικός, μέσα στην ερευνητική του δραστηριότητα, έχει ως κύριο στόχο τη λύση προβλημάτων, τα οποία οι τρέχουσες γνώσεις του δεν του επιτρέπουν να χειριστεί άμεσα.

Γι' αυτό, φτιάχνει και ξαναφτιάχνει εργαλεία τα οποία ελπίζει να είναι ειδικά προσαρμοσμένα στην κατάσταση που αντιμετωπίζει. Εκφράζει εικασίες για την αποτελεσματικότητα αυτών των εργαλείων, για τις επιμέρους ιδιότητές τους, που θα του επέτρεπαν να μεταθέσει το πρόβλημα σ' ένα πλαίσιο περισσότερο γνωστό.

Προχωρεί με επαγωγικά βήματα, χρησιμοποιώντας τυπικούς υπολογισμούς, πριν ακόμα επαληθεύσει την αντιστοιχία με τις υποθέσεις του, και φτάνει μερικές φορές σε αποτελέσματα, που συχνά βρίσκονται μακριά από τις αρχικές του εικασίες.

Η επαγγελματική του πρακτική του έμαθε να διαχωρίζει μεταξύ των αποτελεσμάτων αυτά που μπορούν να γίνουν νέα και ενδιαφέροντα εφαλτήρια για τους άλλους μαθηματικούς.

Για να τα ανακοινώσει λοιπόν όλα αυτά, θα απομακρύνει όλες τις άχρηστες επιδράσεις και τα λάθη ή αναπόφευκτα σφάλματα, θα δομήσει, θα ξαναφτιάξει και θα ξαναεπεξεργαστεί το κείμενό του για να το εμφυτεύσει μέσα στο πλέγμα των συναφών γνώσεων, να το τοποθετήσει μέσα σε μια προβληματική και να μπορέσει έτσι να δείξει τον καινοτόμο χαρακτήρα του.

Αφού έχει παρακολουθήσει σεμινάρια ή έχει λάβει μέρος σε συνέδρια, καταλήγει να συντάξει και να υποβάλλει στην Ακαδημία Επιστημών μια διπλωματική διατριβή, η οποία θα είναι εντελώς ακατανόητη για τους μη ειδικούς του συγκεκριμένου κλάδου.

Μόλις τα αποτελέσματα, οι μέθοδοι και τα καινούρια αντικείμενα, που έχουν ήδη προταθεί σχηματίσουν ένα σώμα συναφές, κατανοητό και ανακοινώσιμο, αυτός (ή η κοινότητα που τον περιβάλλει) δημοσιεύει μια σχετική εργασία.

¹ Την διδακτική μετατόπιση κάποιοι ονομάζουν μετάπλαση κι ακόμη το βρίσκουμε ως μετασχηματισμό (σ.μ.).

² Ο Michel VERRET είναι ένας σύγχρονος φιλόσοφος των φυσικών επιστημών.

³ Ο Gilbert ARSAC είναι καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Lyon, υπεύθυνος του πτυχίου DEA της διδακτικής των φυσικών επιστημών σε συνεργασία με το Πανεπιστήμιο Josef Fourier της Grenoble. Έχει γράψει πολλές θεωρητικές εργασίες σχετικά με τη διδακτική της γνώσης, (εργασίες για το σφάλμα, το διδακτικό συμβόλαιο, την μετατόπιση, διδακτική μελέτη της απόδειξης,...) και ασχολείται επίσης με τη διδασκαλία στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Αυτό το κείμενο που θα ονομάσουμε *βιβλίο γνώσης* (livre de savoir), έχει σαν στόχο να είναι χρήσιμο για το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό των περιπτώσεων, για τα πλέον διαφορετικά ενδεχόμενα και για τον μεγαλύτερο αριθμό μαθηματικών που θα ενδιαφερθούν.

Μόλις το θέμα της ανακοίνωσης καθορισθεί, για να το γράψει ο ερευνητής μας, ακολουθεί μια διαδικασία επεμβάσεων σε αυτό. Επισυνάπτει κάθε σχετική αναφορά σε γνώσεις, που συνάδει με τις προσωπικές του σκέψεις, κατά τον χρόνο και τη διάρκεια που εργαζόταν. Τότε λέμε ότι *αποπροσωποποιεί* (dépersonnalise) αυτή τη γνώση.

Όμοια, για να προσδώσει το μέγιστο βαθμό γενικότητας στα αποτελέσματά του, ξεχνάει την πηγή των προβλημάτων που τέθηκαν στο ξεκίνημα, δεν κρατάει δε από αυτά παρά μόνο τις χρήσιμες έννοιες και δια μέσου μιας βήμα προς βήμα αφαίρεσης λέμε ότι *αποπλαισιώνει*⁴ (décontextualise).

Γνωρίζουμε τυπικά παραδείγματα αυτών των βιβλίων γνώσης, όπως τα στοιχεία του Ευκλείδη ή πιο κοντά σε μας τα βιβλία των Bourbaki. Εκτιμάται ότι το σύνολο των επιστημονικών περιοδικών, που απευθύνονται σε κοινότητες ερευνητών, έχουν αποστολή τους να κρατήσουν το βιβλίο αυτό της γνώσης επίκαιρο. Έχει υπολογιστεί ότι τα διεθνή περιοδικά μαθηματικών δημοσιεύουν κάθε χρόνο περισσότερα από 200.000 νέα άρθρα.

2) Οι διδακτικοί στόχοι

Η ολότητα σχεδόν της επιστημονικής γνώσης δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον για την πλειονότητα των μαθητών, που δεν προορίζονται για μια καριέρα στα μαθηματικά. Αλλά και γι' αυτούς ακόμη, μια ταχεία ειδίκευση δεν θα τους οδηγήσει στο να ενδιαφερθούν περισσότερο παρά μόνο να προσλάβουν ένα μικρό τμήμα επιστημονικής γνώσης.

Το κοινωνικό σύστημα εκπαίδευσης (η νοόςφαιρα δηλαδή σύμφωνα με τον Yves CHEVALLARD) ξεχωρίζει, ανάμεσα σε όλες τις ιστορικά συσσωρευμένες γνώσεις, αυτές που θα είναι κατάλληλες για την εκπαίδευση των νέων στα μαθηματικά. Σε αυτό το επίπεδο υπεισέρχονται διάφοροι παράγοντες και οι πηγές των αποφάσεων ποικίλλουν σε βαθμό που η συνάφεια να μην είναι πάντοτε ο κανόνας. Ο τύπος της κοινωνίας, ο τρόπος διαχείρισής της, η κατάσταση του εκπαιδευτικού συστήματος, το επίπεδο της τεχνολογικής ανάπτυξης, η εκπαίδευση των διδασκόντων, η κυρίαρχη επιστημολογία είναι οι μεταβλητές παράμετροι που επεμβαίνουν σε πρώτο επίπεδο στη διδακτική μετατόπιση.

Για παράδειγμα, ολόκληροι τομείς της μαθηματικής επιστήμης δεν διδάσκονται πλέον, αν και κάποτε θεωρούντο σημαντικοί: οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού (τετραγωνικές), η περιγραφική γεωμετρία, η εξαγωγή με το χέρι (δηλ. με το μυαλό) της τετραγωνικής ρίζας, η χρησιμοποίηση λογαριθμικών πινάκων, η επίλυση εξισώσεων τρίτου βαθμού ως τεχνική κ.λ.π.

3) Η διδακτέα ύλη και τα αντικείμενα διδασκαλίας

Έχοντας ήδη καθορίσει τους *διδακτικούς στόχους* (les objets à enseigner), επανερχόμαστε στο εκπαιδευτικό σύστημα για να τους μεταφράσουμε κατά συγκεκριμένο τρόπο σ' ένα σύνολο γνώσεων που είναι δυνατό να προσληφθεί από τους μαθητές. Θα πρέπει να οργανωθούν στο εσωτερικό των διαφορετικών κλάδων της εκπαίδευσης (αν και η επιστημονική γνώση είναι από την φύση της διεπιστημονική), να δομηθούν σε μια προοδευτική ενσωμάτωση μέσα στα αναλυτικά προγράμματα, λογικά διαρθρωμένη και χωρίς σημαντικά κενά που να καταστρέφουν την συνοχή.

⁴ αποχωρίζει από το πλαίσιο που το περιβάλλει, από τα συμφραζόμενα.

Αυτή η εργασία καταγραφής της *διδασκόμενης γνώσης* (savoir à enseigner), είναι συχνά έργο των ειδικών στο Υπουργείο Παιδείας, που ευθύνεται για την δημοσίευση των προγραμμάτων εκπαίδευσης. Τα προγράμματα αυτά [31] πρέπει να είναι προσβάσιμα σε όλους τους εκπαιδευτικούς. Το δε κείμενο τους οφείλει να είναι σύντομο και απλά γραμμένο. Πρέπει να δίνονται οδηγίες για τις μεθόδους και τις διαδικασίες, έτσι που να υπάρχει ένα είδος ιεράρχησης ανάμεσα στην απαιτούμενη γνώση και εκείνη που αποτελεί μια περαιτέρω εμβάθυνση. Μπορούμε έτσι να παρακολουθήσουμε την ανάλυση των δυσκολιών που υπεισέρχονται στην επεξεργασία των προγραμμάτων, σε σχέση με τη διδακτική μετατόπιση, σύμφωνα με το άρθρο του Yves CHEVALLARD [32].

Για να γίνει το γνωστικό αντικείμενο ένα σύνολο συμπαγές, σωστά δομημένο και προσιτό στους μαθητές, οι ειδικοί παροτρύνθηκαν στο να ξαναγράψουν τους ορισμούς και τις ιδιότητες, να ανασυντάξουν τη λογική πλοκή των εννοιών και να μετασχηματίσουν μερικές αποδείξεις.

Επίσης, ενδέχεται, στο τέλος, να επινοήσουν καινούρια αντικείμενα, που θα τα ονομάσουμε *αντικείμενα διδασκαλίας* (objets de l'enseignement), όπως έγινε με τα διαγράμματα του Venn κατά τη διδασκαλία των λεγομένων «μοντέρνων μαθηματικών» ή να επεξεργαστούν άλλα περισσότερο περίπλοκα, όπως η εισαγωγή συναρτήσεων αναφοράς για τη μελέτη των ορίων. Οι τέτοιου είδους γνώσεις όπως εμφανίζονται, ειδικά προσαρμοσμένες στο εκπαιδευτικό σύστημα, δεν έχουν πλέον παρά μακρινή σχέση με την επιστημονική γνώση. Το στάδιο αυτό συνιστά τη δεύτερη πράξη της διδακτικής μετατόπισης.

4) Η σχολική γνώση (savoir scolaire)

Στην πραγματικότητα, οι εκπαιδευτικοί για να προετοιμάσουν μια ενότητα, αναφέρονται περισσότερο σε εύχρηστα εγχειρίδια παρά στα κείμενα των προγραμμάτων.

Τα εγχειρίδια εξυπηρετούν πολλούς σκοπούς, (εκτός από τους εμπορικούς !)

Τα εγχειρίδια οφείλουν να δώσουν στους μαθητές ένα *εργαλείο αναφοράς* για την ενδεχόμενη μελέτη. Προτείνουν μια *κατάτμηση του προγράμματος* σε δομημένα κεφάλαια ώστε να επιτρέψουν έτσι στους μαθητές να τα επεξεργαστούν. Προσφέρουν *εικονογραφήσεις* και με τον τρόπο αυτόν οι εκπαιδευτικοί κερδίζουν χρόνο, από το να ψάχνουν διαρκώς στα αρχεία τους ή στις βιβλιοθήκες. Αποτελούν ακόμα τη βάση δεδομένων για *ασκήσεις εμπέδωσης* και για τα *προβλήματα επανεπένδυσης* (réinvestissement)⁵. Τέλος κάνουν κατανοητό ένα *κείμενο* με το να εκθέτουν τις έννοιες, που περιέχονται στο πρόγραμμα.

Οι συγγραφείς αυτών των εγχειριδίων βρέθηκαν μπροστά σε πολλά διλήμματα και επιλογές: προσαρμογή στην εμφάνιση της συλλογής, σελιδοποίηση, καθυστερήσεις της έκδοσης ...

Αυτό που θα προκύψει θα εξυπηρετήσει για ορισμένο χρονικό διάστημα την εκπαιδευτική κοινότητα και τους γονείς των μαθητών. Από τα εγχειρίδια αυτά απορρέει ένας ορισμένος τύπος γνώσης που συμβάλλει στην διαμόρφωση μιας ειδικής παιδείας, στην οποία αναφέρονται οι μαθητές που έχουν τελειώσει το σχολείο στην ίδια εποχή. Θα την ονομάσουμε *σχολική γνώση*. Η επεξεργασία της είναι η τρίτη πράξη της διδακτικής μετάπλασης.

5) Η διδασκόμενη γνώση (le savoir enseigne)

Στην τέταρτη πράξη, παρεμβαίνει ο καθηγητής. Πρέπει να διαχειριστεί αυτή τη διδακτική μετατόπιση, να προσαρμόσει στις δικές του γνώσεις τα γνωστικά αντικείμενα, να τα εισάγει μέσα στη σχολική γνώση και να τα προγραμματίσει χρονικά.

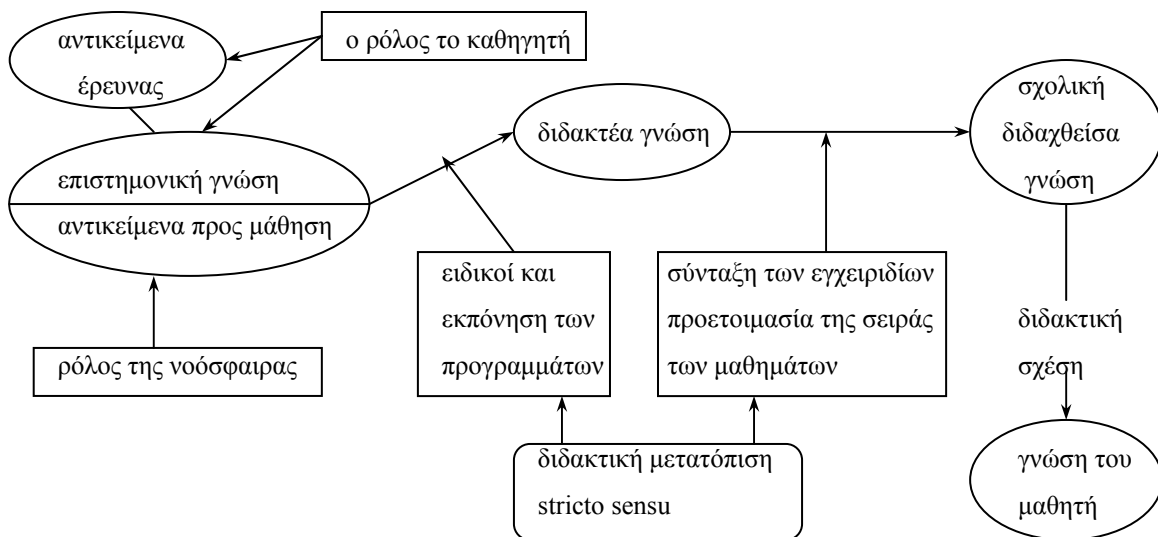
⁵ Εδώ εννοεί νέα προβλήματα με σκοπό να προκαλέσουν το ενδιαφέρον στους μαθητές για παραπέρα γνώση.

Ο καθηγητής διαθέτει πολυάριθμες διδακτικές μεταβλητές οι οποίες μεταβάλλουν την κατάσταση της διδασκαλίας. Οι επιλογές του θα έχουν συνέπειες πάνω στην αντίληψη της γνώσης, που οι μαθητές θα αναπτύξουν και στις έννοιες που θα οικοδομήσουν. Για παράδειγμα, ένας καθηγητής που θα επιλέξει να είναι λιγότερο αυστηρός ώστε να είναι προσιτός από τους περισσότερους μαθητές, ένας άλλος θα μεταφράσει με δικά του λόγια τις ειδικές επιστημολογικές έννοιες (το βλέπουμε π.χ. στην περίπτωση της έννοιας του απείρου, του εν δυνάμει και εν ενεργεία, στη διδασκαλία των ορίων). Έτσι, καθημερινά ο καθηγητής συμπληρώνει αυτή την τέταρτη πράξη της διδακτικής μετάπλασης μετατρέποντας τη σχολική γνώση σε *διδασκόμενη γνώση*.

Οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν καλά ότι η διδαχθείσα γνώση δεν είναι ποτέ αυτή που τελικά έχει συκρατήσει ο μαθητής, ο οποίος έχει συμπληρώσει την πέμπτη πράξη της διδακτικής μετάπλασης, δηλαδή τη μετατροπή της διδαχθείσας γνώσης σε *γνώση του μαθητή*.

Αυτή η αλληλεπίδραση μεταξύ καθηγητή και μαθητή, που ενεργοποιεί την μεταδοθείσα γνώση, είναι η ουσία της διδακτικής σχέσης. Αξίζει λοιπόν μια εξέταση σε μεγαλύτερο βάθος, ώστε να αναδειχθούν οι διαλεκτικές σχέσεις που παίζουν το ρόλο της κινητήριας δύναμης στην μάθηση.

Για να συνοψίσουμε την διαδικασία της διδακτικής μετατόπισης ας δούμε το παρακάτω απλοποιημένο Σχήμα 4.



Σχήμα 4

6) Διαλεκτική της υπόστασης της γνώσης

Όπως είδαμε, η γνώση που θα διδαχθεί είναι ουσιαστικά αντικειμενική, αποπλαισιωμένη, αποπροσωποποιημένη, άχρονη. Οι μαθηματικές γνώσεις που αντιμετωπίζονται, παρουσιάζονται ως διδακτικοί στόχοι, ενώ μερικές φορές τα αναλυτικά προγράμματα υποδεικνύουν τα πεδία εφαρμογών αυτών των γνώσεων ή άλλες φορές εμφανίζονται να έχουν θέση εργαλείου.

Ο καθηγητής οφείλει να προχωρήσει στην *εκχώρηση*⁶ της διδακτικής κατάστασης. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να προωθήσει προς τον μαθητή τα αντικείμενα της διδασκαλίας, με τέτοιο τρόπο ώστε ο τελευταίος να ενθαρρυνθεί έτσι που να ενεργήσει μόνος του χωρίς όμως ο ρόλος του

⁶ Η εκχώρηση αποτελεί την πράξη κατά την οποία ο ελέω θεού βασιλιάς παραιτείται των εξουσιών του και τις αναθέτει σε ένα σώμα που τις εξασκεί για λογαριασμό του.

καθηγητή να αντικατασταθεί. Ο Guy BROUSSEAU ανέπτυξε, σε σχέση με αυτή την άποψη, την ιδέα της *α-διδασκτικής κατάστασης* (a-didactique).

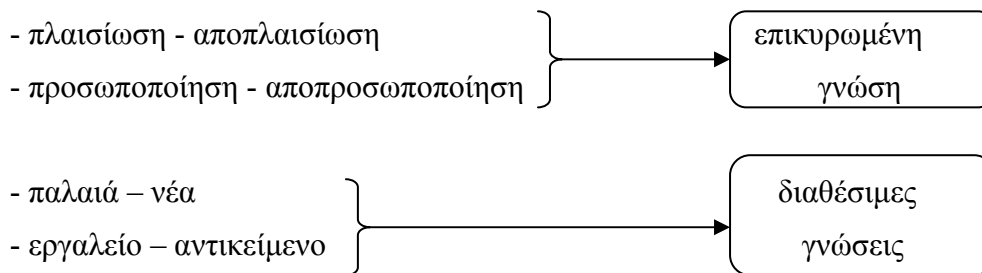
Μέσα σ' αυτήν την διαδικασία, αφού έχει επιτευχθεί η διδακτική μετατόπιση, ο διδάσκων πρέπει να παρουσιάσει τις καινούριες γνώσεις προσαρμόζοντάς τις στις ήδη αποκτημένες (προαποκτημένες ή προκατασκευασμένες, παλαιότερες γνώσεις) από τους μαθητές, μέσα στα πλαίσια όπου αυτές αποκτούν νόημα: να αναφέρονται, δηλαδή, σε καταστάσεις συγκεκριμένες όπου οι μαθητές καταλαβαίνουν και έτσι μπορούν να περιγράψουν.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, ο καθηγητής *επαναπλαισιώνει* (récontextualise) τα στοιχεία της γνώσης που θα διδάξει. Αυτή η πλαισίωση παρακολουθείται από το μαθητή, οφείλει δηλαδή για να αποδώσει νόημα, να εισάγει το πρόβλημα στις καθαρά δικές του αναπαραστάσεις και να το εντάξει στο δικό του χρόνο μάθησης: ο μαθητής *προσωποποιεί* (personnalise) αυτή την γνώση για να αξιολογήσει τις εικασίες και τις αποφασιστικές ενέργειες που πρέπει να πραγματοποιήσει για να διεκπεραιώσει τη εργασία που του ανατέθηκε.

Κατά το ξετύλιγμα της μαθηματικής δραστηριότητας, οι έννοιες που ενεργοποιούνται αποκτούν μια υπόσταση *εργαλείων* (d'outils) για την λύση προβλημάτων. Η λειτουργία των εργαλείων αυτών μέσα στα ποικίλα πλαίσια θα οδηγήσει τον μαθητή να τις ξανακατασκευάσει σ' ένα ανώτερο επίπεδο⁷.

Αλλά για να συγκροτηθεί η μαθηματική δραστηριότητα σε νέα γνώση, ο μαθητής πρέπει με την σειρά του να κάνει μια προσπάθεια αφαίρεσης των νέων εννοιών από το πλαίσιο μέσα στο οποίο τις αντιμετώπισε. Κάνει πάλι *αποπλαισίωση και αποπροσωποποίηση*. Επαναπροσδίδει έτσι στις έννοιες την υπόσταση *αυθύπαρκτων αντικειμένων* για να φτιάξει με αυτές νέες μαθηματικές γνώσεις, οι οποίες διασυνδέονται με τις *παλιές* και σταδιακά εξομοιώνονται με αυτές. Θα δούμε, μέσα στα πλαίσια της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων, τη σπουδαιότητα αυτής της φάσης της αφαίρεσης, που ο καθηγητής συνοδεύει την *θεσμοποίηση* της (institutionnalisation).

Ας δούμε αυτή τη διαλεκτική που εν συντομία περιγράφεται ως εξής:



σχήμα 5

Αυτές οι τέσσερις διαλεκτικές σχέσεις προσδίδουν στη διδαχθείσα γνώση κύρος σε μια συνεχή εξέλιξη κατά την διαδικασία της μάθησης, επιτρέποντάς της έτσι να μεταμορφωθεί μέσα στο μαθητή σε *γνώση διαθέσιμη* (connaissance disponible), ως υπόβαθρο για κάθε *επανεπένδυση* (réinvestissement).

7) Ο διδακτικός χρόνος

Μια από τις πλέον επιτυχημένες προσφορές της θεωρίας, που ήδη εκθέσαμε του Yves CHEVALLARD [2], για τη διδακτική μετατόπιση, είναι ότι έχει καταστήσει σαφή τη διχοτόμηση

⁷ Θα μπορούσαμε να αναφερθούμε πάνω σ' αυτό το θέμα μέσα από τις εργασίες της Régine DUADY η οποία μελέτησε ειδικά αυτή τη διαλεκτική "εργαλείου-αντικειμένου". Θα ξαναδούμε στο κεφάλαιο 4 τα κυριότερα στοιχεία της, ξεκινώντας από τα τετράδια διδακτικής No.3.

ανάμεσα στη δομή του χρόνου που έχει βιώσει ο καθηγητής και σε εκείνου που έχει βιώσει ο καθένας από τους μαθητές. Αυτό το θέμα, που είναι κατ' εξοχήν πολύ λεπτό, δε μπορεί να αναπτυχθεί επιτυχώς χωρίς να ληφθούν εν πολλοίς υπόψη οι παραδόσεις του Gilbert ARSAC [30].

Ο χρόνος της διδασκαλίας

Η διδακτέα γνώση είναι διατεταγμένη σε μια πρόοδο μέσα στο χρόνο:

- Νόμιμη (καθορισμένη από τα προγράμματα). Καθορίζουμε ως *χρόνο διδασκαλίας* (temps de l'enseignement) το χρόνο που ορίζεται από το εγχειρίδιο της διδακτέας ύλης. Αυτό υπάρχει εξαιτίας του προγράμματος που ρυθμίζει τον νόμιμο χρόνο της μάθησης. Εφ' όσον αυτός ο νόμιμος χρόνος δεν έχει τηρηθεί, μιλάμε τότε για σχολική καθυστέρηση ή ακριβέστερα για αποτυχία του μαθητή, λιγότερο συχνά για αποτυχία του καθηγητή και ακόμη λιγότερο μιλάμε για αποτυχία του εκπαιδευτικού συστήματος, όταν ήδη ένα σημαντικό ποσοστό του σχολικού πληθυσμού βρίσκεται να καθυστερεί.

- Λογική: Για το μάθημα των μαθηματικών, περισσότερο από άλλα μαθήματα, γίνεται προσπάθεια να προχωρεί με έναν τρόπο λογικό, γραμμικό. Κάθε κεφάλαιο προϋποθέτει να έχουν γίνει γνωστά τα προηγούμενα. Αυτή η ιδιαιτερότητα έχει επίμονα χαρακτηριστεί ότι εγείρεται ως εμπόδιο στην αυτόνομη εργασία. (Κείμενο του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας 1987).

Η πρόοδος της επιστημονικής γνώσης έχει καθοριστεί από την αλληλουχία των προβλημάτων, που έχουν επιτυχώς επιλυθεί και σχηματίζουν έτσι την κινητήρια δύναμη αυτής της εξέλιξης.

Δεν είναι το ίδιο για τη διδαχθείσα γνώση, η οποία εξελίσσεται μέσα στο χρόνο στηριζόμενη στη διαλεκτική από το παλιό στο καινούριο: Το ένα κεφάλαιο διαδέχεται το άλλο, το μάθημα ξεκαθαρίζει και ξεπερνά τα προβλήματα και προχωρά με πορεία γραμμική μέσα στην γνώση. Ένα αντικείμενο διδασκαλίας έχει παρουσιαστεί από τον δάσκαλο σαν κάτι καινούριο, σε σύγκριση πάντα με τις γνώσεις του μαθητή: θα γίνει το ζητούμενο της διαδικασίας μάθησης. Συγχρόνως, ο δάσκαλος θα δείξει ότι αυτό το αντικείμενο μπορεί να συνδέεται με τις γνώσεις που έχουν ήδη αποκτηθεί, ότι είναι κατά κάποιον τρόπο εν μέρει παλιό, ή εν πάση περιπτώσει ανήκει λογικά μέσα στο παλιό. Η διευθέτηση αυτή, μπορεί ακριβώς να βρεθεί αντίθετη με την ιστορική διευθέτηση του θέματος. Για παράδειγμα, αυτό ακριβώς γίνεται στον κλασικό τρόπο της διδασκαλίας της ανάλυσης: όριο, συνέχεια, παράγωγος.

Μέσα σ' αυτήν την κατάσταση, θα παρατηρήσουμε ότι ο δάσκαλος και ο μαθητής δεν έχουν την ίδια χρονική άποψη σχετικά με τη γνώση. Ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που γνωρίζει από πριν. Αυτή είναι η διαφορά μέσα στη *χρονογένεση* της γνώσης.

Υπάρχει ακόμη μια άλλη διαφορά ανάμεσα στον καθηγητή και στον μαθητή: Ο καθηγητής είναι επίσης αυτός που γνωρίζει "διαφορετικά". Διαφορά λοιπόν υπάρχει και στην *τοπογένεση* της γνώσης. Στα μαθηματικά, ο καθηγητής βρίσκεται από την πλευρά της θεωρίας και ο μαθητής από την πλευρά της πρακτικής. Ο μαθητής εφαρμόζει, ο δάσκαλος αναδεικνύει γενικούς κανόνες. Ο καθηγητής διατυπώνει τους τύπους, ο μαθητής τους επαληθεύει. Οι θέσεις που αναφέρονται στη γνώση είναι καθορισμένες, δεν αλλάζουν και κυρίως σ' ότι αφορά τη γνώση ο μαθητής δε θα μπορούσε να τις διδάξει: δεν είναι αρκετό να "γνωρίζει κανείς το μάθημα για να το διδάξει".

Ο χρόνος μάθησης

Προσδιορίζουμε το *χρόνο της μάθησης* (temps de l'apprentissage) ως τον πραγματικό ρυθμό μάθησης, αυτόν δηλαδή που ταιριάζει στον κάθε εκπαιδευόμενο. Γνωρίζουμε ότι ο χρόνος αυτός δεν είναι συνεχής. Χαρακτηρίζεται από διακοπές και πηδήματα. Δεν έχει λόγους να προσαρμοστεί στο χρόνο της διδασκαλίας. Αυτός ο χρόνος, περιλαμβάνει αναδρομές προς τα πίσω, ενέργειες προς τα πίσω, προσαρμόζεται με καθυστέρηση στα διάφορα χρονοδιαγράμματα που έχουν τεθεί από τα προγράμματα διδασκαλίας. Κυρίως δεν είναι γραμμικός. Τέτοια πρόοδος θα

είναι γρήγορη στην Άλγεβρα, ενώ αντίθετα η κατανόηση των εννοιών θα καθορίσει τα χρονικά βήματά μας στη Γεωμετρία.

Στην τοπογένεση, η κατασκευή των γνώσεων δεν θ' ακολουθήσει την ιεραρχική διάταξη του χρόνου διδασκαλίας.

Στη χρονογένεση, κάθε μαθητής θα έχει την ιδιαιτερότητά του και η αφομοίωση εξαρτάται από τον τρόπο βίωσης του καθένα χωριστά. Πώς να εξηγήσουμε από την σκοπιά της διδακτικής τις εκτιμήσεις των διδασκόντων στους ελέγχους: "μαθητής-τεμπέλης, απρόσεκτος, αργός, καθυστερημένος ή προχωρημένος στην ύλη".

Αλλά αν δούμε από πιο κοντά πώς ένας μαθητής μπορεί μια μέρα να γίνει καθηγητής μαθηματικών, βλέπουμε ότι η ταύτιση του χρόνου μάθησης με το χρόνο διδασκαλίας είναι ανυπόφορη. Πώς ο μέλλον καθηγητής μια μέρα θα φθάσει σε μια θέση άλλη (τοπογένεση) μέσα τη γνώση, πώς θα μπορέσει να γνωρίζει όχι μόνο περισσότερα, αλλά διαφορετικά;

Πράγματι, ο χρόνος του εκπαιδευόμενου επιδέχεται αναδιοργάνωση και επανερμηνείες ερμηνείες, μετά την διακοπή της γνώσης, οι οποίες αλλάζουν το νόημα: ο καθηγητής που διδάσκει την αναλογία δεν χρησιμοποιεί μόνο τη γνώση, που ως μαθητής πήρε μέσα στην τάξη, ή ότι υπάρχει για αυτή την έννοια στο σχολικό πρόγραμμα, αλλά και ότι πήρε από τις προηγούμενες μελέτες του που δεν αναφέρονται αποκλειστικά στην συγκεκριμένη έννοια.

Αλλά, το σύστημα της διδασκαλίας έχει τάση να αρνείται τη διαφορά μεταξύ του χρόνου διδασκαλίας και του χρόνου μάθησης και θέλει να τις ταυτίσει. Κάθε διαφορά μεταξύ τους ερμηνεύεται με τους όρους της καθυστέρησης ή της σχολικής αποτυχίας, ενώ πρόκειται το λιγότερο για μια "διαφορά φάσης" ανάμεσα στους διαφορετικούς ρυθμούς των μαθητών και των διδακτικών στόχων καθορισμένων από τη διδακτική μετατόπιση.

Προτεινόμενες εργασίες

1. Συγκρίνοντας τα σχολικά εγχειρίδια και αντιπαραβάλλοντάς τα με τα αναλυτικά προγράμματα [31], δείξτε μερικά αποτελέσματα της διδακτικής μετατόπισης στο επίπεδο της σχολικής γνώσης. Δώστε παραδείγματα της διδακτικής δημιουργίας γνώσεων.
2. Αν ένας προπτυχιακός φοιτητής ερχόταν να σας ρωτήσει τι είναι το Διαφορικό, ποιόν ορισμό θα του δίνετε; Τι παραστάσεις θα χρησιμοποιούσατε; Σε ποια παραδείγματα θα στηριζόσαστε; Κυρίως σε ποια βασικά σημεία θα επιμένετε; (Μπορούμε να ανατρέξουμε στην έκδοση GRECO της διδακτικής [33]: "Διαδικασίες διαφορίσης στη διδασκαλία των μαθηματικών και της φυσικής στον πρώτο πανεπιστημιακό κύκλο").

Βιβλιογραφικές αναφορές:

[2] - Yves CHEVALLARD et Marie- Alberte JOHSUA: "La transposition didactique", éditions de la Pensée Sauvage, ed. 1991.

[30] – Gilbert ARSAC: "La transposition didactique en mathématiques" dans ". "La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie", cours de DEA, IREM de Lyon, 1989.

[31] - Collectif: "Les programmes des collèges et des secondes", analyses et études thématiques: ARMER et IREM de Besançon.

[32] - Yves CHEVALLARD: "Les programmes et la transposition didactique: illusions, contraintes et possibles" Bulletin de L'ARMER no. 352, février 1986.

[33] - GRECO de Didactique: "Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire" no, 74, diffuse par L'IREM et le LPES de Paris VII, 1989.

5. Διδακτικές καταστάσεις και καταστάσεις-προβλήματος

Η ανάπτυξη της άποψης του κονστρουκτιβισμού στην παιδαγωγική, που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, οδήγησε στη αναζήτηση εκπαιδευτικών μηχανισμών που θα συγκέντρωναν τα συμπεράσματα των εργασιών στην επιστημολογία, κοινωνιολογία και διδακτική. Οι ενεργητικές μέθοδοι είναι διαδεδομένες, χωρίς να είναι πάντα αυτονόητο ότι αντιλαμβανόμαστε τα πραγματικά κέρδη των μαθητών, πέρα από τη διαπίστωση της ανάγκης μιας καλύτερης προσαρμογής τους στη λειτουργία του σχολείου.

Στα μαθηματικά αναπτύσσονται διαφορετικές πρακτικές οι οποίες ευνοούν τη δραστηριότητα των μαθητών. Προσεγγίζουμε δύο ιδιαίτερα σημαντικές πλευρές αυτής της προοπτικής: τις *καταστάσεις - προβλήματος* (situation problèmes) και τα *ανοιχτά προβλήματα* (problèmes ouverts).

Η ανάλυση των διαδικασιών της μάθησης μέσα σε τέτοια πλαίσια οδήγησε τον Guy BROUSSEAU στο να προτείνει την τυποποίησή τους με τη μορφή που τελευταία ονομάζουμε *θεωρία των διδακτικών καταστάσεων* (la théorie des situation didactiques) [14] και [34].

1) Θεωρία των διδακτικών καταστάσεων

Αυτή η θεωρητική προσέγγιση της διαδικασίας της μάθησης προτείνει, για τους αναλυτές της και τους παρατηρητές της, την αποσύνθεσή της σε τέσσερις διαφορετικές φάσεις, κατά τη διάρκεια των οποίων η γνώση δεν έχει την ίδια λειτουργία και ο μαθητής την ίδια σχέση μ' αυτή.

Σε αυτές τις διαδοχικές φάσεις, μπορούμε να παρατηρήσουμε χρονικά διαστήματα που κυριαρχούνται από: *δράση, διατύπωση, επικύρωση και θεσμοθέτηση*¹ (d'action, de formation, de validation, d'institutionnalisation) αντίστοιχα.

Υπάρχει σε κάθε μια από αυτές ένα είδος ανταλλαγής και διακανονισμού ανάμεσα σε κάθε μαθητή ή ομάδα μαθητών που δραστηριοποιούνται από κοινού και το αντικείμενο της γνώσης που εμπλέκεται. Αυτός ο αυτορυθμιζόμενος έλεγχος της μάθησης που εμφανίζεται κατά τη διάρκεια αυτών των δραστηριοτήτων, προσδιορίστηκε από τον Guy BROUSSEAU με τον όρο της *διαλεκτικής*.

A) Διαλεκτική της δραστηριοποίησης

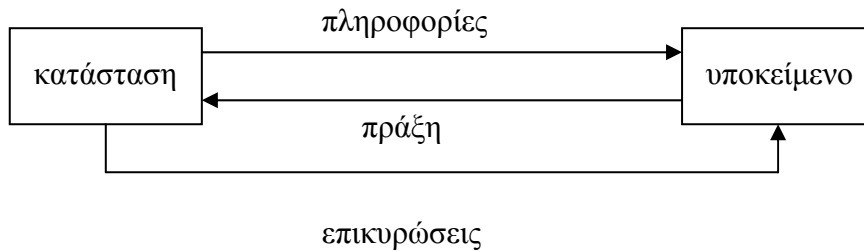
Συνίσταται στο να τοποθετεί το μαθητή μπροστά σε μια κατάσταση, που ονομάζεται κατάσταση δραστηριοποίησης, τέτοια:

- ώστε να θέτει στο μαθητή ένα πρόβλημα του οποίου, στις προτεινόμενες συνθήκες, η καλύτερη μέθοδος επίλυσης είναι η χρήση της γνώσης.
- ώστε να μπορεί να επεμβαίνει πάνω της και να ανατροφοδοτεί με πληροφορίες την δράση του.

Μια καλή κατάσταση δραστηριοποίησης δεν είναι μόνο μια κατάσταση ελεύθερου ή καθοδηγούμενου χειρισμού αλλά πρέπει να επιτρέπει στο μαθητή να κρίνει το αποτέλεσμα της πράξης του, να το προσαρμόζει χωρίς την παρέμβαση του δασκάλου, χάρη στη ανατροφοδότηση μέσα σ' αυτή την ίδια την κατάσταση. Έτσι, ο μαθητής εγκαταλείπει ή βελτιώνει ένα μοντέλο του για να δημιουργήσει ένα άλλο: Η κατάσταση προκαλεί μια μάθηση λόγω αναπροσαρμογής, σύμφωνα με τους όρους του Piaget.

¹ Την καθιστά θεσμική, θα μπορούσαμε να πούμε την θεσμοποιεί αλλά ως λέξη δεν συνηθίζεται (σ.μ)

Κατά τη διάρκεια μιας κατάστασης δραστηριοποίησης, διεξάγεται ένας αληθινός διάλογος ανάμεσα στο παιδί και σ' αυτήν. Αυτή η διαλεκτική επιτρέπει να δημιουργηθεί ένα υπόρρητο μοντέλο. Δεν είναι ακόμα αναγκαίο να μπορεί να διατυπώσει ούτε να οργανώσει θεωρητικά ό,τι προκύπτει από τις δραστηριότητες του.

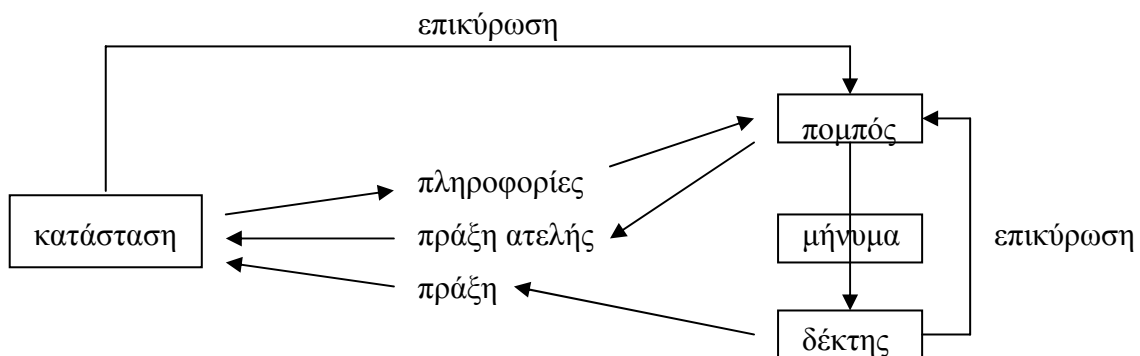


σχήμα 6

Β) Διαλεκτική της διατύπωσης.

Για να μπορέσει ο μαθητής να ξεκαθαρίσει μόνος του το υπόρρητο μοντέλο του, και για να έχει γι' αυτόν έννοια η διατύπωση, πρέπει να μπορεί να το χρησιμοποιεί για να πετύχει αποτελέσματα. Σε αυτές τις καταστάσεις, ο μαθητής ανταλλάσσει με ένα ή περισσότερα άτομα πληροφορίες. Οι συνομιλητές είναι πομποί και δέκτες και ανταλλάσσουν σειρές από γραπτά ή προφορικά μηνύματα που συντάσσονται σε απλή ή μαθηματική γλώσσα ανάλογα με τις δυνατότητες του κάθε πομπού.

Το αποτέλεσμα αυτής της διαλεκτικής επιτρέπει να δημιουργηθεί ένα ευνόητο μοντέλο, που ίσως είναι διατυπωμένο με τη βοήθεια σημάτων και κοινών κανόνων, παλιών ή καινούργιων.



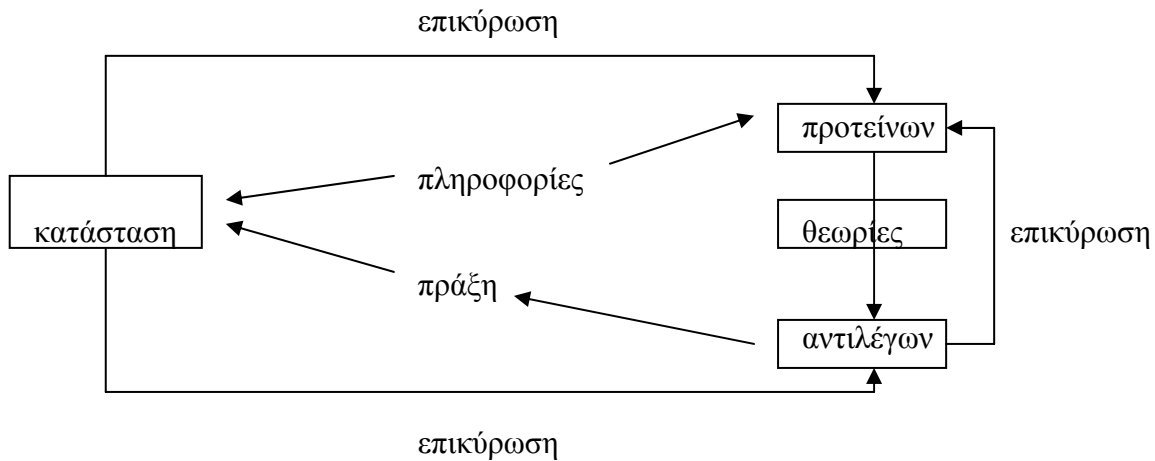
σχήμα 7

Γ) Διαλεκτική της επικύρωσης

Η εμπειρική επικύρωση που πετυχαίνεται από τις προηγούμενες φάσεις είναι ανεπαρκής. Ο μαθητής οφείλει τώρα να δείξει γιατί το μοντέλο, που μόλις δημιουργήθηκε, είναι έγκυρο. Για να κατασκευάσει μόνος του μια απόδειξη και για να έχει νόημα γι' αυτόν, πρέπει να μπορεί να το κάνει σε μια κατάσταση να την πούμε "επικύρωσης" μέσα από την οποία οφείλει να πείσει κάποιον άλλον. Είναι η ευκαιρία για ένα μαθητή (που προτείνει) να αντιτάξει το μαθηματικό μήνυμα (μοντέλο της κατάστασης) ως έναν ισχυρισμό για τον συνομιλητή (που αντιλέγει). Εκείνος που προτείνει, οφείλει να δικαιολογεί την ακρίβεια και την καταλληλότητα του μοντέλου του και να

παρέχει, αν είναι δυνατόν μια σημασιολογική και συντακτική επικύρωση. Ο αντιλέγων, μπορεί να ζητήσει συμπληρωματικές εξηγήσεις, να αρνηθεί αυτές που δεν καταλαβαίνει ή αυτές με τις οποίες δεν συμφωνεί, δικαιολογώντας τις αρνήσεις του.

Μπορούμε να αναπτύξουμε, ως προς αυτή την επίδραση την πρακτική της επιστημονικής συζήτησης στην τάξη, όπως την ενεργοποίησε και μελέτησε ο Marc LEGRAND² [35] στην προπτυχιακή διδασκαλία του στην Grenoble.



σχήμα 8

Δ) Διαλεκτική της θεσμοθέτησης

Αφού κατασκευαστεί και επικυρωθεί η καινούρια έννοια, θα γίνει μέρος της μαθηματικής γνώσης της τάξης. Δεν έχει ακόμα την υπόσταση (status) της κοινωνικής γνώσης.

Οι καταστάσεις της θεσμοθέτησης είναι αυτές όπου ο καθηγητής ορίζει συμβατικά και ρητά, τη γνωστική υπόσταση της γνώσης. Αυτές λοιπόν οι καταστάσεις αλλάζουν το status της γνώσης.

- Πρόωρη, η θεσμοθέτηση διακόπτει τη κατασκευή του νοήματος, βλάπτει την προσδοκώμενη μάθηση, βάζει τους μαθητές και το δάσκαλο σε δυσκολίες.
- Όψιμη, ενισχύει τις ανακριβείς ερμηνείες, επιβραδύνει την εκμάθηση, εμποδίζει τις εφαρμογές.
- Είναι στην πραγματικότητα διαπραγματευόμενο μέσα σε μια διαλεκτική.

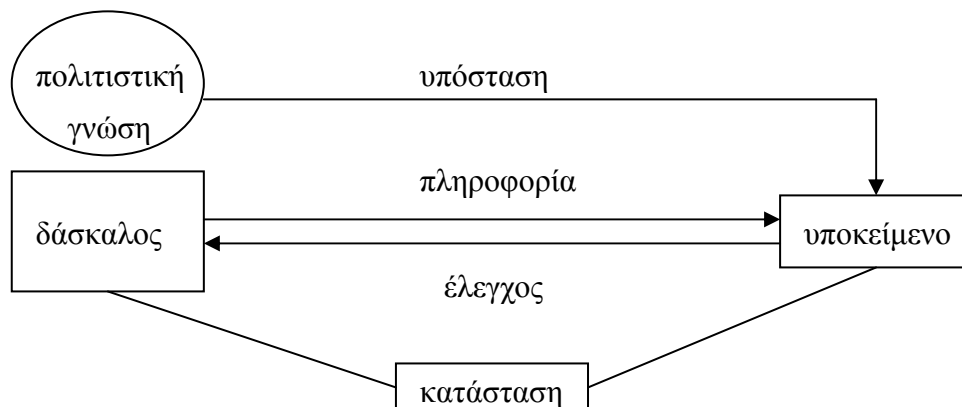
Μετά από αυτή τη φάση που χειρίζεται ο καθηγητής, η γνώση γίνεται πια επίσημη γνώση, που οι μαθητές οφείλουν να συγκρατούν και μπορούν να εφαρμόζουν. Εξ άλλου ασκήσεις εφαρμογής, εξάσκησης και επαναεφαρμογής συμπληρώνουν τη διδακτική διαδικασία.

Στην πράξη, οι τέσσερις αυτές φάσεις δεν διαδέχονται τόσο ομαλά η μια την άλλη, όσο η θεωρία φαίνεται να τις περιγράφει. Είναι αλληλοδιαπλεκόμενες, υπάρχουν οπισθοχωρήσεις, οπισθογυρίσματα και τάσεις ρήξεων του διδακτικού συμβολαίου.

Γι' αυτό η παρατήρηση μιας τάξης, που λειτουργεί σε μια κατάσταση - προβλήματος, για παράδειγμα είναι πολύπλοκη. Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων είναι λοιπόν μια πολύτιμη

² Ο Marc LEGRAND εργάζεται τώρα στη επιτροπή της Inter-IREM Universités. Διδάσκει στο Πανεπιστήμιο Joseph Fourier, όπου εφάρμοσε μια παιδαγωγική βασισμένη στην κατάρτιση επιστημονικών συζητήσεων ανάμεσα στους σπουδαστές, με ειδικούς κανόνες. Αυτή η πρακτική αποδεικνύεται αποτελεσματική για να παροτρύνει τους σπουδαστές στην επιστημονική μέθοδο, οδηγώντας τους στο βάθος των γνωστικών αντικειμένων της εκπαίδευσης.

βοήθεια για να αποσυνθέσουμε τις διαδικασίες και να αναλύσουμε τα φαινόμενα που παρατηρούνται.



σχήμα 9

Για να παρουσιάσουμε τα κύρια στοιχεία της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων, παραθέτουμε ένα συνοπτικό πίνακα εμπνευσμένο από μια παρουσίαση της Nadine MILHAUD³. Αυτός ο πίνακας μπορεί να διαβαστεί οριζοντίως και καθέτως, και αναδεικνύει τα χαρακτηριστικά της κάθε φάσης της διδακτικής κατάστασης.

Ξαναβρίσκουμε εδώ τη λειτουργία τεσσάρων διαλεκτικών διεργασιών στις αναφορές των μαθητών στη γνώση:

1. Διαδοχή της *προσωποποίησης* (personnalisation), της *αποπροσωποποίησης* (dépersonnalisation), της *κοινωνικοποίησης* (socialisation) και της *επαναπροσωποποίησης* (re personnalisation) της γνώσης: Οι μαθητές που εμπλέκονται μέσα στην δράση με μια γνώση στιγματισμένη με τα σημάδια των προσωπικών καταστάσεων επεξεργασίας και κινητοποίησης, οφείλουν στη συνέχεια να την *απαλλάξουν* από όλα όσα την καθιστούν ακατάλληλη για κοινοποίηση, πριν της αποδώσουν ένα θεσμικό status ώστε να γίνει κοινωνικά μεταβίβαστη.
2. Η γνώση αυτή τότε επανατοποθετείται μέσα στο *κείμενο* (contexte, πλαίσιο) του προβλήματος, που ήταν η πηγή της δραστηριότητας, τότε *αποπλαισιώνεται* (décontextualisé) για να μπορεί να επενδυθεί μέσα σε *άλλα πλαίσια* (autres contextes).
3. Αυτή η διαλεκτική του πλαισίου επάγει τη διαλεκτική *εργαλείο-αντικείμενο* (outil - objet) που εφαρμόστηκε από την Regine DOUADY [36].
4. Τέλος, η γνώση περνάει επιτυχώς από το status του "*νέου*" (nouveau) σ' αυτό του *παλιού* (ancien). Αυτή η "*απαξίωση*" είναι ο κινητήρας του διδακτικού ρολογιού.

Από την άποψη του διδακτικού συμβολαίου, σημειώνουμε ότι στις φάσεις δραστηριοποίησης, διατύπωσης και επικύρωσης, είναι ο μαθητής που έχει την ευθύνη να διαχειρίζεται την σχέση του προς την γνώση. Αντίθετα στη φάση της θεσμοθέτησης, η ευθύνη ξαναγυρίζει στον εκπαιδευτικό για να προσδιορίσει τον τύπο και την έκτασή της γνώσης στην οποία προσδίδει μια επίσημη υπόσταση, που απορρέει από την διδακτική μετατόπιση.

³ Η Nadine MILHAUD είναι τώρα επιθεωρήτρια παιδαγωγικής στην Ακαδημία του Montpellier. Έθεσε το ταλέντο της στην υπηρεσία εκπαίδευσης των δασκάλων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Τυποποίηση μιας μαθησιακής πράξης επικεντρωμένης στη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (κατά την Nadine MILHAUD)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ	ΠΡΑΞΗΣ	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ	ΕΠΙΚΥΡΩΣΗΣ	ΘΕΣΜΟΘΕΤΗΣΗΣ	ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ
Ο ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ	Κατά τις οποίες η γνώση έχει διαφορετικές λειτουργίες : παίρνει αποφάσεις, γενικεύει, επικοινωνεί, απαντά σε ερωτήσεις	Επιλέγει, προτείνει, οργανώνει και διαχειρίζεται τις διδακτικές καταστάσεις στις οποίες οι μαθητές έχουν την ευθύνη να διαχειρίζονται τις λειτουργίες της γνώσης	Σχετίζει τα προϊόντα με την κοινωνική γνώση που θεσμοθετεί	Κατασκευάζει ασκήσεις προπόνησης και προτείνει καινούργιες καταστάσεις	
ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ Η ΓΝΩΣΗ ΤΟΥΣ Αυτό που αναμένει ο εκπαιδευτικός από αυτούς Τα προϊόντα τους	<p>Προσωποποίηση της γνώσης</p> <p>Αποπροσωποποίηση</p> <p>Κοινωνικοποίηση της γνώσης</p> <p>Επαναπροσωποποίηση</p>	<p>Να εμπλέξουν προσωπικές γνώσεις που λειτουργούν σαν εργαλεία</p> <p>Να εμπλέξουν κοινές γνώσεις και γλώσσα χρησιμοποιημένες σαν εργαλεία</p> <p>Να εμπλέξουν γνώσεις για να δικαιολογήσουν, να αποδείξουν, να κριτικάρουν</p> <p>Για να διορθώσουν ή να εξελίξουν τα προϊόντα ή για να συμμετάσχουν σε μία ομαδική προσπάθεια</p>	<p>Οφείλουν να προσαρμόσουν τη γνώση που γίνεται αντικείμενο σπουδής</p> <p>Μελετώντας τους ορισμούς, τη γλώσσα, το συμβολισμό, τα θεωρήματα</p> <p>Αυτοματοποιώντας τις τεχνικές της χρήσης της γνώσης</p> <p>Για να λύσουν ένα πρόβλημα, για να πάρουν αποφάσεις</p>	<p>Εμπλέκουν το νέο σύστημα γνώσεων</p> <p>Για να λύσουν νέα προβλήματα σε νέες καταστάσεις</p>	<p>Η γνώση αποσπάζεται από τα συμφοραζόμενα: ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ</p> <p>Η γνώση αποσπάζεται από τα συμφοραζόμενα: ΑΠΟΠΛΑΙΣΙΩΣΗ</p> <p>Αυτοματοποιώντας τις τεχνικές της γνώσης</p>
Η ΓΝΩΣΗ Οι περιοχές που λειτουργεί	Κατά τη διάρκεια αυτών των καταστάσεων η γνώση συνδέεται στενά με τα συμφοραζόμενα: ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ	Κατά τη διάρκεια αυτών των καταστάσεων η γνώση συνδέεται στενά με τα συμφοραζόμενα: ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ	Κατά τη διάρκεια αυτών των καταστάσεων η γνώση συνδέεται στενά με τα συμφοραζόμενα: ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ	Η γνώση αποσπάζεται από τα συμφοραζόμενα: ΑΠΟΠΛΑΙΣΙΩΣΗ	Η γνώση αποσπάζεται από τα συμφοραζόμενα: ΑΠΟΠΛΑΙΣΙΩΣΗ
Η υπόστασή της	Οι ήδη αποκτημένες γνώσεις λειτουργούν σαν ρητά εργαλεία, οι γνώσεις που διαμορφώνονται λειτουργούν σαν : ρητά εργαλεία	Οι ήδη αποκτημένες γνώσεις λειτουργούν σαν ρητά εργαλεία, οι γνώσεις που διαμορφώνονται λειτουργούν σαν : ρητά εργαλεία	Οι ήδη αποκτημένες γνώσεις λειτουργούν σαν ρητά εργαλεία, οι γνώσεις που διαμορφώνονται λειτουργούν σαν : ρητά εργαλεία	Οι ήδη αποκτημένες γνώσεις λειτουργούν σαν ρητά εργαλεία, οι γνώσεις που διαμορφώνονται λειτουργούν σαν : ρητά εργαλεία	Οι ήδη αποκτημένες γνώσεις λειτουργούν σαν ρητά εργαλεία, οι γνώσεις που διαμορφώνονται λειτουργούν σαν : ρητά εργαλεία

2) Οι καταστάσεις - προβλήματος

Οι παραπάνω θεωρητικές παρατηρήσεις βρίσκουν άμεση εφαρμογή στις καταστάσεις-προβλήματος (situations problèmes). Προτείνουμε τον ακόλουθο ορισμό και τα χαρακτηριστικά που ακολουθούν:

Μια κατάσταση - πρόβλημα είναι η παρουσίαση των ανοικτών ερωτήσεων μιας κατάστασης λίγο ή πολύ μαθηματικοποιημένης, η οποία καταλήγει σ' ένα πεδίο προβλημάτων, που τίθεται μέσα σ' ένα ή πολλά πλαίσια.

Η κύρια λειτουργία μιας κατάστασης - προβλήματος, είναι να παροτρύνει τους μαθητές, με πλάγιες ερωτήσεις που τίθενται καθώς (οι μαθητές) προχωρούν στην διερεύνησή τους, για την αρχικά υπορρητη και αργότερα ξεκάθαρη χρήση καινούριων μαθηματικών εργαλείων.

Αλλά οι συνθήκες που υπάρχουν σ' αυτή την κατάσταση οδηγούν στην απόκτηση καινούριων εργαλείων. Με κάποιες διαφορές κατά τους συγγραφείς (Évelyne BARBIN, Bernard CHARLOT, Régine DOUADY¹, Michel MANTE), βρίσκουμε τα 5 ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Οι μαθητές οφείλουν να καταλάβουν εύκολα τα δεδομένα και να τα εμπλέξουν στη δική τους αναζήτηση με τις τρέχουσες γνώσεις τους. Μπορούν να αντιληφθούν καθαρά αυτό που αποτελεί μια πιθανή και κατάλληλη απάντηση στην ερώτηση που τέθηκε.

Παράδειγμα 1: Στην Α' Λυκείου, να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο που οι κορυφές του να είναι πάνω σε δύο δεδομένους ομόκεντρους κύκλους.

2. Η κατάσταση - πρόβλημα οδηγεί σ' ένα εννοιολογικό πεδίο, που πραγματικά επιθυμούμε να μελετηθεί και στο οποίο τοποθετούνται οι μαθησιακοί στόχοι.

Παράδειγμα 2: Στην Γ' Λυκείου, ένα τηλεφωνικό κέντρο δέχεται μια κλίση κατά μέσο όρο ανά πέντε λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα να λάβει τρεις κλήσεις στο επόμενο τέταρτο της ώρας;

3. Οι παλιές γνώσεις των μαθητών δεν είναι επαρκείς ώστε να τους επιτρέψουν να λύσουν άμεσα το πρόβλημα.

Παράδειγμα 3: Στην Γ' Λυκείου, σ' ένα σημείο της άκρης μιας κυκλικής αυλής στήνουμε ένα πάσσαλο, στον οποίο στερεώνουμε ένα σχοινί και στο άλλο άκρο του σχοινιού δένουμε μια κατσίκια. Πόσο πρέπει να είναι το μήκος του σχοινιού ώστε να μη μπορεί η κατσίκια να βοσκήσει πέραν του μισού της αυλής.

4. Οι γνώσεις, που είναι το αντικείμενο της διδασκαλίας, μας προμηθεύουν τα πλέον κατάλληλα εργαλεία για να πετύχουμε τη λύση.

Προηγούμενα παραδείγματα: 1 - Η περιστροφή και οι αναλλοιώτες της, 2 - Ο νόμος του Poisson, 3 - Όρια για τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων.

5. Η ερώτηση μπορεί να διατυπωθεί σε διάφορα πλαίσια, στα οποία μπορούν να ενεργήσουν τα προς κατασκευή εργαλεία: Αλγεβρικά πλαίσια, γεωμετρικά, γραφικά, αριθμητικά...

¹ Η Régine DOUADY παρουσίασε στην διατριβή της την επίδραση της λειτουργίας της διαλεκτικής εργαλείο - αντικείμενο για την μάθηση. Η διαλεκτική αυτή εγκαθίσταται αρκετά καλά από την πρακτική μιας κατάστασης - προβλήματος. Η εναλλαγή πλαισίου επιτρέπει τη νοηματοδότηση. Από αυτές τις παρατηρήσεις η συγγραφέας έβγαλε μια πρόταση για την οργάνωση της εκπαίδευσης, περίπου ταυτόσημη με την παρούσα περιγραφή μιας κατάστασης - προβλήματος. Δείτε επίσης μια παρουσίαση αυτής της θέσης στο άρθρο του RDM "Η εναλλαγή πλαισίου και η διαλεκτική εργαλείο - αντικείμενο"[37]

Παράδειγμα 5: Στη Γ' Λυκείου, ποιο είναι το ορθογώνιο ορισμένης περιμέτρου και μεγίστου εμβαδού; Η ίδια ερώτηση για τον όγκο.

Ανάλογα με την έκταση του διερευνούμενου εννοιολογικού πεδίου, η επεξεργασία μιας κατάστασης - προβλήματος μπορεί να είναι μεγάλη και πολύπλοκη. Απαιτεί εκτεταμένες γνώσεις από τη μεριά του εκπαιδευτικού που την προετοιμάζει και μάλλον οφείλει να είναι έργο μιας ομάδας. Οι εργασίες των IREM είναι πλούσιες από αυτόν τον τύπο εργασιών. Αναφέρουμε το άρθρο του Michel MANTE που είναι στο βιβλίο «ανοικτό πρόβλημα και κατάσταση- πρόβληματος» του IREM της Lyon [38], το φυλλάδιο "η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω των καταστάσεων - προβλήματος στο γυμνάσιο" του IREM των Pays de Loire [39], το άρθρο "ανάλυση δύο καταστάσεων – προβλήματος πάνω στην αναλογικότητα" που εκδόθηκε στο "petit x". [40]

Εν τούτοις, η επίδραση μιας τέτοιας διδασκαλίας στην μάθηση δικαιολογεί τον κόπο που χρειάζεται ώστε να προετοιμαστεί και να ενεργοποιηθεί μια κατάσταση - πρόβληματος. Αλλά σίγουρα δεν χρειάζεται να γενικευτεί η χρήση του σε κάθε συνεδρία στην τάξη. Για παράδειγμα, μπορούμε να προσφύγουμε σ' αυτή την πρακτική για την εισαγωγή των καινούριων βασικών ιδεών που δεν είναι ποτέ πολυάριθμες σ' ένα αναλυτικό πρόγραμμα.

Ένας εκπαιδευτικός που προτίθεται να επεξεργαστεί μια κατάσταση - πρόβληματος, θέτει στον εαυτό του έναν αριθμό ερωτήσεων που ο Michel MANTE συγκέντρωσε στο βιβλίο που αναφέραμε [38]. Παραθέτουμε ένα απόσπασμα:

Μερικές ερωτήσεις για να κατασκευαστεί ή να αναλυθεί μια κατάσταση προβλήματος, που αφορά μια δεδομένη έννοια

1. Επιστημολογική προσέγγιση:
 - Ιστορικά, ποια είναι τα προβλήματα που οδήγησαν στην κατασκευή αυτής της έννοιας;
 - Ποιος είναι ο ρόλος αυτής της έννοιας τώρα, στα μαθηματικά;
 - Ποιος είναι ο ρόλος αυτής της έννοιας σ' άλλους τομείς γνώσης;
 - Ποιος είναι ο ρόλος αυτής της έννοιας σήμερα στην καθημερινή ζωή;
2. Ο ρόλος αυτής της έννοιας στην εκπαίδευση:
 - Μελέτη των προγραμμάτων: πότε υπεισέρχεται αυτή η έννοια;
 - Μελέτη των εγχειριδίων: πώς προσεγγίζεται στην εκπαίδευση;
 - Ποιες ασκήσεις και προβλήματα συνδέονται με αυτή την έννοια;
3. Αρχικές αντιλήψεις των μαθητών (πριν από την εκπαίδευση):
 - Μελέτη λαθών των μαθητών που αφορούν σε αυτή την έννοια
 - Ποια εμπόδια οφείλει ο μαθητής να περάσει για να αποκτήσει αυτή την έννοια;
 - Ποιες είναι οι αντιλήψεις που αφορούν αυτή την έννοια πριν την διδασκαλία;
4. Επιθυμητή τελική αντίληψη:
 - Ποιοι είναι οι στόχοι γνώσεων και ικανοτήτων που οφείλει ο μαθητής να αποκτήσει;
 - Ποιες είναι οι παρατηρήσιμες συμπεριφορές που πιστοποιούν ότι ο μαθητής έχει κατακτήσει την έννοια;
5. Η εκ των προτέρων ανάλυση της κατάστασης - προβλήματος.
 - α) Τι θα κάνουν οι μαθητές;

- Θα μπορέσουν να εμπλακούν σε μια πορεία λύσης;
- Θα θελήσουν να εμφανίσουν "ατελείς" ιδέες τους.
- Ποια κριτήρια θα έχουν οι μαθητές για να ξέρουν αν η λύση που προτείνουν είναι σωστή;
- Η έννοια που επιθυμείτε να εισάγετε είναι ένα απαραίτητο εργαλείο για να λυθεί το πρόβλημα; Μήπως οι μαθητές βρουν ένα άλλο εργαλείο;
- Πώς ο μαθητής θα κατασκευάσει το νέο εργαλείο;

Αυτές οι ερωτήσεις επιτρέπουν να αναδειχθούν οι διδακτικές παράμετροι της κατάστασης και να οριστούν συναρτήσει των γνωστικών στόχων που επιδιώκουμε.

β) Ποια είναι η διαχείριση της τάξης;

- Η έρευνα γίνεται ομαδικά; Πώς συγκροτούνται οι ομάδες;
- Ποιες εντολές δίνονται στους μαθητές;
- Ποιος θα είναι ο ρόλος του καθηγητή κατά τη διάρκεια της φάσης της έρευνας; Μεταξύ άλλων, τι γίνεται σε περίπτωση μπλοκαρίσματος;
- Θα υπάρξει φάση διατύπωσης; επικύρωσης;

6. Αξιολόγηση:

- Τι πρέπει να αξιολογήσουμε; Τις γνώσεις και τις ικανότητες των μαθητών, αλλά και την εξέλιξη των αντιλήψεών τους.
- Ποια εργαλεία αξιολόγησης θα χρησιμοποιήσουμε γι' αυτό;
- Οι αντιλήψεις των μαθητών εξελίχθηκαν;

7. Η εκ των υστέρων (a posteriori) ανάλυση:

- Σε σχέση με αυτό που είχε προβλεφθεί, ποιες είναι οι διαφορές με αυτό που συνέβη; Γιατί αυτές οι διαφορές;
- Ποιες αλλαγές χρειάζονται για μια νέα διδασκαλία;

Η *ανάλυση a priori* (εκ των προτέρων) είναι ιδιαίτερα σημαντική. Από την ποιότητά της θα εξαρτηθεί η επιτυχία της κατάστασης - προβλήματος. Έτσι, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ελέγχει την εξέλιξη των δραστηριοτήτων των μαθητών, μπορεί επίσης να διορθώνει και να καταλαβαίνει τα παρατηρούμενα αποτελέσματα. Επίσης, οι πολλαπλές *εικασίες* (conjectures) που θα εμφανιστούν θα μπορούν να εκτιμηθούν και βεβαίως μεταξύ των άλλων να τροφοδοτήσουν μια *επιστημονική συζήτηση* (débat scientifique) στην τάξη.

Η ιδέα της κατάστασης - προβλήματος ενέπνευσε άλλες εργασίες για τη διδασκαλία σε άλλους τομείς (Ιστορία, Γεωγραφία, E.R.S.,...). Αν απομακρυνθούμε από την περιοχή της διδακτικής των μαθηματικών, θα ήταν ενδιαφέρον να συγκριθούν τα προηγούμενα με άλλες προσεγγίσεις που απαιτούν περισσότερο σφαιρικές αναφορές στις θεωρίες μάθησης, όπως η πρόταση του Philippe MEIRIEU² [41] σ' ένα κεφάλαιο του βιβλίου του «*Μαθαίνοντας .. ναι, αλλά πώς;*»

² Ο Philippe MEIRIEU είναι καθηγητής των επιστημών της αγωγής στο Πανεπιστήμιο της Lyon II. Η κονστρουκτιβιστική άποψη του συνδέεται με αυτή των καθηγητών της διδακτικής. Θέτει προς συζήτηση το ερώτημα: Υπάρχουν κοινές αντιλήψεις σε διαφορετικούς τομείς που θα δικαιολογούσαν την ανάπτυξη μιας γενικής διδακτικής θεωρίας; Πως αυτή η γενική διδακτική θα μπορούσε να ολοκληρώσει τον πόλο γνώσης; αναρωτιούνται με τη σειρά τους οι διδακτικοί των μαθηματικών.

3) Ανοικτά προβλήματα

Η ομάδα του IREM της Lyon ανέπτυξε εδώ και πολλά χρόνια *"την πρακτική του ανοικτού προβλήματος"*. Αυτός είναι άλλωστε ο τίτλος ενός φυλλαδίου που εκδόθηκε το 1985. Θα βασιστούμε επίσης στο βιβλίο *"Ανοικτό πρόβλημα και κατάσταση - προβλήματος"*.

Να λοιπόν, ο ορισμός του *ανοικτού προβλήματος* σύμφωνα με την ομάδα της Lyon:

- Η εκφώνηση είναι σύντομη.
- Η εκφώνηση δεν υπαινίσσεται ούτε τη μέθοδο, ούτε τη λύση (ούτε ενδιάμεσες ερωτήσεις, ούτε ερωτήσεις του τύπου "δείξτε ότι"). Σε καμιά περίπτωση, αυτή η λύση δεν πρέπει να περιορίζεται στη χρήση και άμεση εφαρμογή των πρόσφατα παρουσιασμένων αποτελεσμάτων στην τάξη.
- Το πρόβλημα βρίσκεται σε μια εννοιολογική περιοχή με την οποία οι μαθητές έχουν αρκετή οικειότητα. Έτσι μπορούν να ελέγξουν την κατάσταση και να ξεκινήσουν προσπάθειες, εικασίες, σχέδια επίλυσης, αντιπαραδείγματα.

Η διαφορά από τις καταστάσεις - προβλήματος εκφράζεται καθαρά στο τελευταίο σημείο: ο πρώτος αντικειμενικός σκοπός ενός ανοικτού προβλήματος δεν είναι η εισαγωγή μιας νέας έννοιας ή ενός νέου εργαλείου.

Εντούτοις, η κανονική πρακτική του ανοικτού προβλήματος σταθεροποιεί τις γνώσεις των μαθητών, όταν οφείλουν να αντιμετωπίσουν αληθινά εμπόδια. Επανερχόμαστε στην άποψη του Philippe MEIRIEU για τη σπουδαιότητα της υπέρβασης των εμποδίων.

Για να καταλάβουμε τη σημασία των ανοικτών προβλημάτων στην εξέλιξη της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών, μπορούμε να εισάγουμε τη διάκριση που έκανε η Aline ROBERT ανάμεσα στην *κατεχόμενη* (maîtrisable) γνώση και τη *διαθέσιμη* (disponible) γνώση.

Κατεχόμενη γνώση είναι εκείνη που κατ' αρχήν ο μαθητής είναι ικανός να χρησιμοποιεί ικανοποιητικά για να λύσει ένα πρόβλημα που αναφέρεται ρητά σ' αυτήν. Όπως και αυτή στην οποία που ο μαθητής δεν μπορεί ν' ανατρέξει μόνος του, αλλά μπορεί να τη χρησιμοποιήσει αν αυτό του υποδειχθεί.

Μια διαθέσιμη γνώση είναι μια επαρκώς σταθεροποιημένη έννοια διαθέσιμη ως "εργαλείο" από το μαθητή, στην οποία μπορεί να προστρέξει σε περίπτωση ανάγκης χωρίς καμιά δοσμένη υπόδειξη γι' αυτό.

Για παράδειγμα, φαίνεται ότι στην Γ' Γυμνασίου το θεώρημα του Θαλή είναι μια κατεχόμενη γνώση ενώ το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι διαθέσιμη γνώση.

Σ' αυτή την οπτική, ο ρόλος του ανοικτού προβλήματος είναι επίσης να αποκαλύψει τις διαθέσιμες γνώσεις, ή με την εκτέλεσή του να αποδίδει διαθέσιμες γνώσεις που δεν ήταν παρά κατεχόμενες.

Τέλος, η εκπαίδευση στην *ευρετική* (heuristique) προτείνεται συχνά σαν στόχος της διδασκαλίας. Δεν προτιθέμεθα να αναπτύξουμε εδώ μια θεωρία της έρευνας των προβλημάτων, θα περιοριστούμε στο να παραπέμψουμε στο διάσημο βιβλίο του George POLYA: [42] *"Πώς να το λύσω;"* στο οποίο θα βρείτε σύντομες συμβουλές με την μορφή των ερωτήσεων της επόμενης σελίδας. Η εξάσκηση με ανοικτά προβλήματα συμβάλλει στη σχετική κατάρτιση.

Αλλά μπορεί κανείς να αναρωτηθεί, είναι όλοι οι μαθητές ευαίσθητοι σ' αυτήν την παιδαγωγική προσέγγιση; Καθώς μαθαίνουμε ότι το 44% των μαθητών Λυκείου θεωρούν "καταθλιπτικό" ν' αφιερώσουν περισσότερο από μια ώρα πάνω σ' ένα πρόβλημα των μαθηματικών..... (έρευνα σε 50 Λύκεια, 1988).

Για να λύσετε ένα πρόβλημα οφείλετε διαδοχικά:

I - Να κατανοήσετε το πρόβλημα

- Ποιος είναι ο άγνωστος; Ποια είναι τα δεδομένα; Ποια είναι η συνθήκη;
- Είναι δυνατό να ικανοποιήσετε τη συνθήκη; Η συνθήκη είναι ικανή για να προσδιοριστεί ο άγνωστος; Είναι ανεπαρκής; Υπερβολική; Αντιφατική;
- Σχεδιάστε ένα σχήμα. Χρησιμοποιήστε κατάλληλο συμβολισμό.
- Χωρίστε τα διάφορα μέρη της συνθήκης. Μπορείτε να τα διατυπώσετε;

II - Να συλλάβετε ένα πλάνο

Να βρείτε τη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και στον άγνωστο.

Μπορεί να αναγκαστείτε να θεωρήσετε βοηθητικά προβλήματα αν δε μπορείτε να βρείτε μια άμεση σχέση.

Τελικά πρέπει να καταστρώσετε ένα σχέδιο επίλυσης.

- Μήπως το έχετε ξαναδεί; ή καλύτερα, μήπως συναντήσατε το ίδιο πρόβλημα με λίγο διαφορετική μορφή;
- Ξέρετε ένα πρόβλημα που σχετίζεται μ' αυτό; Ξέρετε ένα θεώρημα που μπορεί να είναι χρήσιμο;
- Κοιτάξτε καλά τον άγνωστο και προσπαθήστε να σκεφτείτε ένα πρόβλημα που να είναι οικείο και να έχει τον ίδιο ή έναν παρόμοιο άγνωστο.
- Να ένα πρόβλημα που συνδέεται με το δικό σας και που έχετε ήδη λύσει. Μπορεί να σας βοηθήσει; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμά του; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδό του; Θα έπρεπε να εισάγετε ένα κάποιο βοηθητικό στοιχείο για να μπορέσετε να το χρησιμοποιήσετε;
- Θα μπορούσατε να εκφράσετε το πρόβλημα διαφορετικά; Θα μπορούσατε να το εκφράσετε κάτω από έναν άλλο τύπο; Επιστρέψατε στους ορισμούς.
- Αν δε μπορείτε να λύσετε το προτεινόμενο πρόβλημα, προσπαθήστε να λύσετε πρώτα ένα πρόβλημα με το οποίο συνδέεται. Θα μπορούσατε να βρείτε ένα πρόβλημα με το οποίο να συνδέεται και που να είναι πιο προσιτό; Ένα πιο γενικό πρόβλημα; Ένα πρόβλημα πιο ειδικό; Ένα πρόβλημα ανάλογο; Θα μπορούσατε να λύσετε ένα μέρος του προβλήματος; Κρατήστε ένα μέρος της υπόθεσης, και παραλείψτε το άλλο. Σε ποιο βαθμό ο άγνωστος προσδιορίζεται ακόμα, πώς μπορεί να μεταβληθεί; Θα μπορούσατε να εξάγετε από τα δεδομένα ένα χρήσιμο στοιχείο; Θα μπορούσατε να σκεφτείτε για τα άλλα δεδομένα που θα μπορούσαν να σας επιτρέψουν να προσδιορίσετε τον άγνωστο; Θα μπορούσατε να αλλάξετε τον άγνωστο, τα δεδομένα ή και τα δυο αν είναι απαραίτητο, κατά τρόπο ώστε ο νέος άγνωστος και τα νέα δεδομένα να συνδέονται περισσότερο μεταξύ τους;

- Χρησιμοποιήσατε όλα τα δεδομένα; Χρησιμοποιήσατε όλες τις υποθέσεις; Λάβατε υπ' όψη όλα τα ουσιαστικά γνωρίσματα που περιέχει το πρόβλημα;

III - Εκτελέστε το σχέδιο σας

- Εκτελώντας το σχέδιο επίλυσης, εξακριβώστε την κάθε λεπτομέρεια τη μια μετά το άλλη. Μπορείτε να δείτε καθαρά αν αυτή η λεπτομέρεια είναι σωστή; Μπορείτε να αποδείξετε ότι είναι σωστή;

IV- Εξετάστε τη λύση που πετυχαίνετε

Να επανέλθετε στη λύση

- Μπορείτε να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα; Μπορείτε να επαληθεύσετε το συλλογισμό;
- Μπορείτε να επιτύχετε το αποτέλεσμα διαφορετικά; Μπορείτε να το δείτε με μια ματιά;
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο για κάποιο άλλο πρόβλημα;

G. Polya

Προτεινόμενες εργασίες

1. Από ένα σχολικό εγχειρίδιο, επιλέξτε τις δραστηριότητες, τις καταστάσεις - προβλημάτων, τα ανοικτά προβλήματα. Υποδείξτε τις διαφορές υπόστασης σ' αυτές τις τρεις διαδικασίες.
2. Προτείνετε δύο ή τρεις εκφρασμένες καταστάσεις – προβλήματος διευκρινίζοντας
 - το πιθανό επίπεδο της τάξης,
 - τον αναμενόμενο εκπαιδευτικό στόχο,
 - το εννοιολογικό πεδίο που διερευνάτε.
 - Για μια από τις καταστάσεις - προβλήματος, προτείνετε μια εκ των προτέρων ανάλυση.

Βιβλιογραφικές αναφορές:

- [14] - Guy BROYSSEAU: "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques": RDM VOL. 7 no2
- [34] - Guy BROYSSEAU: " Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques" Thèse d'état, Université de Bordeaux I, 1986.
- [35] - Marc LEGRAND: "Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe a une communauté scientifique" RDM. vol. 9.3., 1990
- [36] - Régine DOUADY: "Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques" Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 1984.
- [37] - Régine DOYADY: "Jeux de cadres et dialectique outil-objet" RDM vol. 7.2, 1986.
- [38] - Gilbert ARSAC, Gilles GERMAIN, Michel MANTE: "Problème ouvert et situation - problème" IREM de Lyon, 1988.
- [39] - IREM des Pays de Loire: "l'enseignement des mathématiques par situations - problèmes au collège", diffuse par le centre du Mans en deux volumes, 1987.
- [40] - M. C. GALAI, M. GERENTE, D. GRENIER, R. RIVOIRE: "analyse de deux situations - problèmes autour de la proportionnalité" petit X no. 22, édite par l' IREM de Grenoble, 1990.
- [41] - Philippe MEIRIEU: "Guide méthodologique pour l'élaboration d'une situation- problème" dans "Apprendre .. oui, mais comment?", ed. E.S.F., article reproduit dans les Cahiers Pédagogiques no. 262, mars 1988.
- [42] - Georges POLYA: "Comment poser et résoudre un problème?" Traduction de "How to solve it?"(Dunod), réédite par les éditions Jacques GABAY, 1989.

6. Το διδακτικό συμβόλαιο

1) Έννοια του διδακτικού συμβολαίου

Στο τετράδιο της Διδακτικής των Μαθηματικών n° 6, η Régine DOUADY [1] παρουσιάζει τα γνωρίσματα του διδακτικού συμβολαίου (§6, σ.16). Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τον ίδιο ορισμό που δανειζόμαστε από τον Guy BROUSSEAU [14]. Στον Guy BROUSSEAU [12] βρίσκουμε μια αρκετά πλήρη βιβλιογραφία πάνω στο κύριο αυτό θέμα της διδακτικής των μαθηματικών.

Καλούμε **διδακτικό συμβόλαιο**, το σύνολο των συμπεριφορών του διδάσκοντος που αναμένονται από το μαθητή και το σύνολο των συμπεριφορών του μαθητή που αναμένονται από το διδάσκοντα ... Αυτό το συμβόλαιο είναι το σύνολο των κανόνων που προσδιορίζουν εν μέρει ρητά αλλά κυρίως υπόρρητα αυτά που ο συμμετέχων στη διδακτική σχέση θα διαχειρίζεται και για τα οποία θα είναι με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο υπόλογος απέναντι στον άλλον.

Μερικές παρατηρήσεις που ακολουθούν ξεκαθαρίζουν αυτό τον ορισμό:

1- Η σχέση διδασκόντων - διδασκομένων εξαρτάται από ένα μεγάλο αριθμό κανόνων και συμβάσεων. Δεν αναφέρονται όλοι συστηματικά στη γνώση που είναι ο "τρίτος εταίρος" στη διδακτική σχέση. Είναι καλύτερα λοιπόν να διακρίνεται αυτό το *διδακτικό συμβόλαιο* (contrat didactique) από το *παιδαγωγικό συμβόλαιο* (contrat pédagogique) το οποίο συνδέεται και με ένα *συμβόλαιο κουλτούρας* ("contrat de culture") μέσα σ' ένα δεδομένο εκπαιδευτικό σύστημα, σύμφωνα με τους όρους¹ του Nicolas BALACHEFF [43].

2- Το διδακτικό συμβόλαιο εξαρτάται πρώτα απ' όλα από τη στρατηγική διδασκαλίας που έχει υιοθετηθεί. Οι παιδαγωγικές επιλογές, ο τρόπος εργασίας που απαιτείται από τους μαθητές, οι διδακτικοί στόχοι, η επιστημολογία του καθηγητή, οι συνθήκες αξιολόγησης ... είναι τμήμα των βασικών χαρακτηριστικών του διδακτικού συμβολαίου που πρέπει να προσαρμοστεί σ' αυτό το πλαίσιο.

3- Η απόκτηση της γνώσης από τους μαθητές, είναι ο ακρογωνιαίος λίθος του διδακτικού συμβολαίου. Σε κάθε καινούριο "στάδιο" το συμβόλαιο ανανεώνεται και επαναδιαπραγματεύεται. Τις περισσότερες φορές αυτή η διαπραγμάτευση περνά απαρατήρητη.

4- Το διδακτικό συμβόλαιο εκδηλώνεται κυρίως όταν παραβιαστεί από έναν από τους "εταίρους" της διδακτικής σχέσης. Ένα μεγάλο μέρος των δυσκολιών των μαθητών εξηγείται από το γεγονός ότι το συμβόλαιο δεν έχει τεθεί σωστά ή δεν έχει κατανοηθεί.

Παίρνουμε ένα παράδειγμα ρήξης του συμβολαίου που συνδέεται με τους διδακτικούς στόχους της γεωμετρίας στο Γυμνάσιο.

Τον πρώτο καιρό, στον κύκλο της παρατήρησης, οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν εικόνες και σχήματα, να μάθουν να χρησιμοποιούν τα όργανα σχεδιασμού για να αναπτύξουν γραφική επιδεξιότητα. Σ' αυτό το πλαίσιο, οι εικόνες είναι συγκεκριμένα γεωμετρικά αντικείμενα στα οποία μπορούν να ασκήσουν άμεσα μια πράξη, είναι τα *σημαινόμενα* (signifiés) των όρων που χρησιμοποιούνται από τους σχεδιαστές.

Στη συνέχεια, στον κύκλο του προσανατολισμού, οι μαθητές, προοδευτικά, οφείλουν να δώσουν μια άλλη υπόσταση στις εικόνες: αυτές οφείλουν να γίνουν αναπαραστάσεις αφηρημένων, ιδεατών αντικείμεμων. Δεν υπάρχουν πια 28 εικόνες σχεδιασμένες στα τετράδια των μαθητών,

¹ Ρητούς και συγκεκριμένους όρους (σ.μ.)

αλλά 28 σχέδια που αναπαριστούν μια μόνο εικόνα την οποία όλος ο κόσμος μπορεί να σκεφτεί από κοινού. Οι σχεδιαζόμενες εικόνες προσλαμβάνουν έτσι μια υπόσταση *σημαίνοντος* (signifiant).

Ποιος τύπος απάντησης αναμένεται σε ερωτήσεις όπως: "επαληθεύστε ότι τα τμήματα AB και ΓΔ είναι ίσα";

Στο πρώτο συμβόλαιο, ο μαθητής οφείλει να κάνει ένα επιμελημένο σχέδιο και με το διαβήτη ή τον βαθμονομημένο χάρακα οφείλει να πραγματοποιήσει αυτή την επαλήθευση.

Στο δεύτερο συμβόλαιο, πρέπει να ερευνήσει τις υποθέσεις που έχουν επιτρέψει τη δημιουργία του σχήματος, έτσι ώστε η αναφορά σε μια γνωστή ιδιότητα να επιτρέπει την δικαιολόγηση της απάντησης, που είναι έγκυρη ανεξάρτητα από το χαρτί στο οποίο σχεδιάστηκε αυτή η εικόνα.

Είναι γνωστό πώς μεγάλος αριθμός μαθητών έχει δυσκολίες να προσαρμοστεί σ' αυτή τη ρήξη συμβολαίου. (Συναντάμε επίσης, τον εν λόγω τύπο δυσκολίας στο πέρασμα από την έκθεση ιδεών στη σύνταξη δοκιμίου).

2) Η ηλικία του καπετάνιου

Πρόκειται για τον τίτλο ενός βιβλίου της Stella BARUK [44], που αναφέρεται σε ένα πασίγνωστο πείραμα στην IREM της Grenoble:

Προτάθηκε σε 97 μαθητές του CE 1 και σε CE 2 το ακόλουθο πρόβλημα:

"Πάνω σε ένα πλοίο υπάρχουν 26 πρόβατα και 10 κατσίκες. Ποια είναι η ηλικία του καπετάνιου;"

Από τους 97 μαθητές, 76 έδωσαν την ηλικία του καπετάνιου χρησιμοποιώντας τους αριθμούς που δόθηκαν.

Το βιβλίο της Stella BARUK εξηγεί ότι η εκπαίδευση των μαθηματικών μετατρέπει τους μαθητές "σε μαθηματικά αυτόματα " ώστε να απαντούν με παράλογο τρόπο σε παράλογες ερωτήσεις. Εμφανίζει εξάλλου ένα μεγάλο αριθμό λαθών από τους μαθητές και μεγάλη αστοχία στο χειρισμό τους από τους διδάσκοντες.

Στο άρθρο του "το δικαίωμα στο λάθος" ο Alain BOUVIER [45], επανέρχεται σ' αυτό το πείραμα και δείχνει τη σταθερότητα των αποτελεσμάτων. Ενοχοποιεί την τεράστια κατάρτιση της διδασκαλίας και το σεβασμό των μαθητών σε ακατανόητες εντολές. Υπάρχει μέσα σε αυτή την εκτίμηση ένα πρώτο βήμα απέναντι στο ρόλο του διδακτικού συμβολαίου, που θα εξηγήσουμε στη συνέχεια.

Εκφράζουμε κάποιους κανόνες του διδακτικού συμβολαίου που ισχύουν, υπόρρητα έστω, στη βασική εκπαίδευση:

- Στα μαθηματικά, ένα πρόβλημα λύνεται κάνοντας πράξεις. Η απαιτούμενη εργασία είναι να βρεθεί η κατάλληλη πράξη και να γίνει χωρίς λάθη. Από τη χρήση κάποιων μικρών λέξεων, η εκφώνηση επιτρέπει να μαντέψει κανείς την πράξη που πρέπει να γίνει.

- Οι ερωτήσεις που τίθενται, εν γένει δεν έχουν προφανή σχέση με την καθημερινή πραγματικότητα, ακόμη κι αν εμφανίζονται με μια τέτοια μεταμφίεση. Στην πραγματικότητα, δεν εξυπηρετούν παρά στο να διαπιστωθεί αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει κάτι.

- Για να λυθεί ένα πρόβλημα, πρέπει να βρεθούν τα δεδομένα στην εκφώνηση. Όλα τα αναγκαία δεδομένα οφείλουν να φαίνονται και να μην υπάρχουν περιττά.

- Οι αριθμοί οφείλουν να είναι απλοί και οι λύσεις οφείλουν να είναι επίσης απλές, αν όχι είναι δυνατόν κάποιος να έχει εξαπατηθεί.

- Σε κάθε περίπτωση σε μια ερώτηση των μαθηματικών υπάρχει πάντα μια απάντηση και ο εκπαιδευτικός τη γνωρίζει. Οφείλουμε λοιπόν πάντα να δίνουμε μια απάντηση που ενδεχομένως θα διορθωθεί.

Η εφαρμογή τέτοιων κανόνων, τελείως αφομοιωμένη από τους μαθητές, οδηγεί σε συμπεριφορές του τύπου "της ηλικίας του καπετάνιου", σε όλες τις τάξεις. (Προσπαθήστε, αλλάζοντας λίγο τη δυσκολία!).

Πολλές παρανοήσεις και συναισθήματα απογοήτευσης έχουν ως βάση ένα κακοπροσαρμοσμένο ή ακατανόητο διδακτικό συμβόλαιο. Η επιθυμία της προσαρμογής των μαθητών μπορεί να σκοντάψει στην αστάθεια του εκπαιδευτικού ο οποίος "δεν ξέρει ποτέ τι θέλει". Τέτοιες καταστάσεις μπορούν να οδηγήσουν σε μια σχολική άρνηση και σε ακραίες περιπτώσεις μπορούν να καταλήξουν σε μια σχολική αποτυχία.

Η έννοια του διδακτικού συμβολαίου επιτρέπει επίσης να προσεγγίσουμε, σε θεωρητικό πλαίσιο, την ερμηνεία των φαινομένων που παρατηρούνται σε μια διδασκαλία με τρόπο μη προφανή: δεν είναι όλοι οι μαθητές μαθηματικά αυτόματα ... και όμως!

3) Το φαινόμενο Πυγμαλίων

Ο μυθικός βασιλιάς της Κύπρου *Πυγμαλίων* ήταν ερωτευμένος με ένα άγαλμα, το οποίο είχε σκαλίσει ο ίδιος. Έπεισε λοιπόν την Αφροδίτη να του δώσει ζωή και το παντρεύτηκε.

Αυτός ο μύθος περιγράφει καλά αυτό που οι ψυχολόγοι της εκπαίδευσης ονομάζουν το *φαινόμενο των προσδοκιών*.

Οι πρόσφατες εμπειρίες, κυρίως αυτές του ROSENTHAL στο Oak School, φανερώνουν ότι η επιτυχία ή η αποτυχία των μαθητών εξαρτώνται από τις προσδοκίες που έχει ο εκπαιδευτικός γι' αυτούς.

Ξανασυναντάμε ακόμη αυτή την κατάσταση σε μαθητές που διατηρούν τον ίδιο βαθμό καθ' όλη την διάρκεια της χρονιάς, μ' ένα είδος σιωπηλής συμφωνίας με τον διδάσκοντα. Ο διδάσκων περιορίζοντας τις απαιτήσεις του στην εικόνα που έχει για τις ικανότητες του μαθητή, οδηγεί τον μαθητή στο να περιορίζει την εργασία του, στις απαιτήσεις της εικόνας που του προβάλλει (για τον εαυτόν του) ο διδάσκων.

Το φαινόμενο Πυγμαλίων είναι αναμφισβήτητο. Ορισμένοι εκπαιδευτικοί θέλουν να το αποφύγουν, αρνούμενοι κάθε πληροφορία για την προηγούμενη πορεία των μαθητών τους. Εντούτοις, τελικά εκδηλώνεται όταν η εγρήγορση ελαττώνεται.

Το διδακτικό συμβόλαιο λοιπόν, φέρει αναγκαστικά το σημάδι των προσδοκιών που ο καθηγητής έχει από την τάξη ή από κάποιο συγκεκριμένο μαθητή. Τα αποτελέσματα του συμβολαίου, που περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο, ενισχύονται από αυτό το φαινόμενο των προσδοκιών.

4) Οι (αρνητικές) επιδράσεις του διδακτικού συμβολαίου

Ο Guy BROUSSEAU [12] αποδεικνύει ότι η συνεχής διαπραγμάτευση του διδακτικού συμβολαίου οδηγεί στο να αναθεωρηθούν οι διδακτικοί στόχοι προς τα κάτω. Η ζητούμενη προσπάθεια μπορεί να φανεί στους μαθητές πολύ σπουδαία².

Ο καθηγητής επιθυμεί την επιτυχία των μαθητών του. Έχει την τάση να τους διευκολύνει την εργασία με διαφορετικούς τρόπους: των άφθονων εξηγήσεων (που είδαμε ότι μπορούν να

² εννοεί δύσκολη (σ.μ.).

εμποδίσουν την πραγματική κατανόηση), των "μικρών βημάτων" μέσα στα προβλήματα, τη διδασκαλία των αλγορίθμων ακόμη και μέσω τεχνασμάτων απομνημόνευσης.

Ανάμεσα στις υπεκφυγές, οι "διδασκτικοί" προσέχουν διάφορες στάσεις που αποτελούν πραγματικές ρήξεις του συμβολαίου από τη μεριά του εκπαιδευτικού, στο μέτρο που το συμβόλαιο στοχεύει συγκεκριμένα να καθοδηγήσει τους μαθητές να κατακτήσουν τις γνώσεις και όχι να τις κάνει αντικείμενα προς αποφυγή.

Αυτές οι στάσεις ή κοινές πρακτικές, συχνά αναπόφευκτες στη λειτουργία της τάξης, υποδηλώνονται με τον όρο «φαινόμενα του συμβολαίου». Οι κυριότερες καταγράφονται στις επόμενες σελίδες.

Το φαινόμενο Toraze και ο έλεγχος της Αβεβαιότητας

Η πρώτη σκηνή του Διάσημου Torage του Marcel Pagnol εικονογραφεί μια από τις θεμελιώδεις διαδικασίες : ο Torage κάνει μια υπαγόρευση σε ένα κακό μαθητή. Μη μπορώντας να ανεχθεί άλλο τα χοντρά λάθη και μη μπορώντας ούτε να δώσει κατευθείαν τη ζητούμενη ορθογραφία "υποδεικνύει" την απάντηση, υποκρύπτοντάς την κάτω από διδακτικούς κώδικες όλο και περισσότερο διαφανείς: *des moutons étaient réunis dans un parc...*" πρόκειται αρχικά για τον μαθητή για ένα πρόβλημα ορθογραφίας και γραμματικής... "*des moutonssses etai-hunt...*" το πρόβλημα αλλάζει τελείως. Μπροστά στις αποτυχίες που επαναλαμβάνονταν, ο Toraze ζητιανεύει ένα σημάδι επιδοκιμασίας και διαπραγματεύεται προς τα κάτω τις συνθήκες στις οποίες ο μαθητής θα καταλήξει να βάλει αυτό το "s". Μαντεύουμε ότι θα μπορούσε να συνεχίσει απαιτώντας την απαγγελία του κανόνα, αντιγράφοντάς τον στη συνέχεια ένα ορισμένο αριθμό φορών.

Η κατάρρευση του έργου της διδασκαλίας αντιπροσωπεύεται από μια απλή εντολή: Βάλτε ένα "s" στο "moutons": Ο καθηγητής κατέληξε να σηκώσει το βάρος της ουσίας της εργασίας. Η απάντηση που οφείλει να δώσει ο μαθητής προσδιορίζεται εκ των προτέρων, ο δάσκαλος επιλέγει τις ερωτήσεις στις οποίες ίσως δοθεί αυτή η απάντηση. Προφανώς, για να παραχθούν αυτές οι απαντήσεις αλλάζει και το νόημά των ερωτήσεων. Με την προσφορά όλο και πιο εύκολων ερωτήσεων, προσπαθεί να πετύχει το μέγιστο του νοήματος για το μέγιστο των μαθητών. Οι αποβλεπόμενες γνώσεις χάνονται Τελείως: αυτό είναι "το αποτέλεσμα Toraze". Ο έλεγχος του νοήματος, μέσω των αλλαγμένων ερωτήσεων, είναι υπό τον έλεγχο των γνώσεων των δασκάλων, μέσα στην εκάστοτε ειδικότητα, αλλά η επιλογή των καταστάσεων μάθησης και των χειρισμών τους, που συνήθως αφήνονται στην κρίση των καθηγητών, είναι σήμερα αντικείμενο τόσο θεωρητικών ερευνών όσο και ερευνών της διδακτικής μηχανικής.

Το φαινόμενο Jourdain και η θεμελιώδης παρεξήγηση

Το φαινόμενο Jourdain, που ονομάζεται έτσι από το κείμενο της σκηνής του «Bourgeois gentilhomme», που ο δάσκαλος της φιλοσοφίας δείχνει στον Jourdain τι είναι η πεζογραφία ή τι είναι τα φωνήεντα, είναι ένας τύπος του φαινομένου Toraze.

Ο καθηγητής για να αποφύγει την συζήτηση ιδεών με τον μαθητή και ενδεχομένως τη βέβαιη αποτυχία, δέχεται να αναγνωρίσει την ένδειξη επιστημονικής γνώσης στα περιεχόμενα ή στις απαντήσεις του μαθητή, αν και στην πραγματικότητα προκαλούνται από αίτια και νοήματα τετριμμένα.

Το αστείο της σκηνής είναι βασισμένο στο γελοίο αυτής της επανειλημμένης ιεροποίησης καθημερινών δραστηριοτήτων σε μια επιστημονική συζήτηση.

Παράδειγμα: Ο μαθητής που αναγκάζεται να κάνει τεχνάσματα λίγο παράξενα με δοχεία γιαουρτιού ή έγχρωμες εικόνες ακούει τη δήλωση "μόλις ανακάλυψες μια ομάδα Klein".

Με ένα λιγότερο χονδροειδή τρόπο, η επιθυμία να εντάξουμε την γνώση σε οικείες δραστηριότητες μπορεί να οδηγήσει τον καθηγητή στο ν' αντικαταστήσει τον πραγματικό και επιστημονικό προβληματισμό, με έναν άλλο, για παράδειγμα με μεταφορά ή με μετονομασία που δεν αποδίδει ένα σωστό νόημα στην κατάσταση. Συχνά κι οι δυο προβληματικές (καταστάσεις) είναι παρούσες, αλληλοκαλυπτόμενες, κι ο καθηγητής προσπαθεί να πετύχει τον "καλύτερο" συμβιβασμό.

Ορισμένες Παιδαγωγικές μέθοδοι, που βασίζονται στην προαπασχόληση του παιδιού, προκαλούν συχνά αυτό το αποτέλεσμα, αλλά η μεταρρύθμιση του 60 και η χρήση των μαθηματικών δομών που προτάθηκε, ήταν φανερά μια κινητήρια δύναμη σε αυτό το ζήτημα.

Την ίδια στιγμή η δομιστική ιδεολογία (structuraliste) του πρόσφερε μια επιστημολογική δικαιολογία. Πρόκειται λοιπόν για ένα διπλό αποτέλεσμα Jourdain: το πρώτο στο επίπεδο των σχέσεων του μαθητή με τον καθηγητή: *ο μαθητής επεξεργάζεται ένα παράδειγμα* κι ο δάσκαλος βλέπει σ' αυτό τη δομή. Το δεύτερο, στο επίπεδο σχέσεων των "διδακτικών" ή των μαθηματικών με τον καθηγητή, οι πρώτοι αποδίδουν μια φιλοσοφική και επιστημονική εξήγηση στην πρακτική των δευτέρων και την φетиχοποιούν, η αναγνώριση της δομής είναι η επιστημονική δραστηριότητα.

Το μεταγνωστικό ολισθήμα

Όταν μια δραστηριότητα εκπαίδευσης αποτυγχάνει, ο καθηγητής ίσως οδηγηθεί στο να δικαιολογηθεί και για να συνεχίσει τη δράση του, *να θεωρήσει τις ίδιες του τις εξηγήσεις και τις ευρετικές μεθόδους του ως αντικείμενα μελέτης στην θέση της πραγματικής γνώσης.*

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να εμφανιστεί πολλές φορές, να αφορά μια ολόκληρη κοινότητα, να συνιστά μια αληθινή διαδικασία που διαφεύγει από τον έλεγχο των δραστών. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι πιθανότατα αυτό που αφορά την χρήση των γραφημάτων στη δεκαετία του 60 για να διδαχθούν οι δομές, μέθοδος με την οποία συνδέθηκε το όνομα του G. Papy.

Στο τέλος της δεκαετίας του 30, η θεωρία των συνόλων εγκατέλειψε την αρχική επιστημονική της λειτουργία ώστε να γίνει μέσο εκπαίδευσης και να ικανοποιήσει τις ανάγκες που είχαν οι καθηγητές για τα μεταμαθηματικά και μια αυστηρή διατύπωση. Για τον σκοπό αυτό υποχρέωναν τους φοιτητές σε ένα σημασιολογικό έλεγχο αυτής της θεωρίας (που λέγεται και απλοϊκή παίβη). Για να αποφύγουμε τα λάθη, δεν αρκεί να εφαρμόζουμε αξιώματα, πρέπει να ξέρουμε γιατί μιλάνε και να αναγνωρίζουμε τα παράδοξα που συνδέονται με ορισμένες χρήσεις ώστε να τα αποφύγουμε. Αυτός ο έλεγχος διαφέρει αρκετά από τον συνήθη μαθηματικό έλεγχο, που είναι περισσότερο «συντακτικός». Αυτή η ήδη διδακτική χρήση της θεωρίας των συνόλων, θα κάνει δυνατή για άλλες θεωρίες μια αξιωματική παρουσίαση, της οποίας η διαπραγμάτευση θα ήταν περισσότερο κλασική.

Αυτό το μέσο εκπαίδευσης καταλήγει να γίνει αντικείμενο διδασκαλίας για όλο και πιο μικρά παιδιά. Ο σημασιολογικός έλεγχος επαφίεται σ' ένα "μοντέλο" που προέρχεται από τον Euler και που αναφέρεται στα διάφορα γραφήματα. Το μοντέλο δεν είναι παρά ένα μεταφορικό σχήμα για λόγους εκπαίδευσης, γιατί δεν υπάρχει στην πραγματικότητα ένα σωστό μοντέλο. Αλλά, λόγω εκπαιδευτικών δυσκολιών, αυτό το μέσο γίνεται με τη σειρά του αντικείμενο διδασκαλίας και φορτώνεται με συμβάσεις και με ειδικό λεξιλόγιο που με τη σειρά του διδάσκονται και εξηγούνται σε κάθε επίπεδο επικοινωνίας. Με τέτοιες διαδικασίες όσο περισσότερα σχόλια και συμβάσεις παράγει η δραστηριότητα, τόσο λιγότερο οι σπουδαστές μπορούν να ελέγξουν τις καταστάσεις που τους προτείνονται.

Αυτό είναι το φαινόμενο του "μεταγνωστικού ολισθήματος". Θα ήταν αφελές να πιστεύουμε ότι η λογική θα επέτρεπε να αποφύγουμε τις ιδιαίτερα υπερβολικές συνέπειες στις οποίες έχει

οδηγήσει η διαδικασία. Από την στιγμή που ο καθηγητής δεν γλιτώνει από την υποχρέωση να διδάξει πάση θυσία, η ισχύς των διδακτικών αποτελεσμάτων καθίσταται ακαταμάχητη. Όσο πιο μεγάλο είναι το κοινό που εμπλέκεται στη διαδικασία της διαπραγμάτευσης, τόσο περισσότερο η διαδικασία ξεφεύγει του "απλοϊκού ελέγχου".

Μετά από αυτά μπορούμε να κρατήσουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

α - φαινόμενο Toraze

Όταν ένας μαθητής συναντήσει μία δυσκολία, το φαινόμενο Toraze συνίσταται, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, στο να την ξεπεράσει ο δάσκαλος για λογαριασμό του μαθητή.

Όταν η βοήθεια είναι καθοριστική, ο μαθητής δεν αποπερατώνει ο ίδιος την απαραίτητη προσπάθεια, που θα τον οδηγούσε σε ένα επίπεδο κατανόησης ώστε να πραγματοποιήσει την μάθηση που στοχεύουμε. Ο αρχικός αντικειμενικός σκοπός λοιπόν δεν επιτυγχάνεται.

Το φαινόμενο Toraze είναι πολύ συχνό, συνήθως είναι απαραίτητο ώστε να "αποδεσμευτούν" οι μαθητές από τη δυσκολία. Ο δάσκαλος όμως οφείλει να είναι γνώστης της λειτουργίας του και των συνεπειών του.

β - φαινόμενο Jourdain

Μια κοινότυπη συμπεριφορά του μαθητή ερμηνεύεται σαν εκδήλωση επιστημονικής άποψης.

Αυτό επιτρέπει να μην επιτευχθεί η εκμάθηση της γνώσης που υποτίθεται ότι κατακτήθηκε και ο κάθε εταίρος της διαστρεβλωμένης αυτής διδακτικής σχέσης είναι ικανοποιημένος που την απέφυγε. Αλλά υπάρχει ρήξη του συμβολαίου από τη μεριά του εκπαιδευτικού.

γ - μεταγνωστικό ολίσθημα

Μια τεχνικής, που κρίνεται χρήσιμη για τη λύση ενός προβλήματος γίνεται η ίδια αντικείμενο μελέτης και συσκοτίζει την πραγματική γνώση που πρέπει να διδαχθεί.

Συναντώνται σε όλα τα επίπεδα οι ενδείξεις αυτού του αποτελέσματος. Το πιο ακραίο παράδειγμα είναι ίσως αυτό των "πατατοειδών" διαγραμμάτων συνόλων που διδάσκονται σαν δήθεν θεωρία συνόλων και όπου μπορούμε να ισχυριστούμε, για μια σχέση ισοδυναμίας ότι όλα τα στοιχεία της βρίσκονται σ' ένα κλειστό «βρόγχο».

Σαν πιο πρόσφατα παραδείγματα μπορούν να αναφερθούν οι κανόνες χρήσης των πινάκων αναλογιών, που αποφεύγουν μια επεξεργασία σε βάθος της έννοιας, ή ακόμα τα τυπικά σε μια χρήση των πινάκων μεταβολών για να προχωρήσουμε στη κατάκτηση του λειτουργικού εργαλείου.

δ - κατάχρηση της αναλογίας

Να αντικατασταθεί η μελέτη μιας πολύπλοκης έννοιας από αυτή μιας ανάλογης.

Οι μεταφορές συχνά είναι χρήσιμες για να εξασφαλίσουν την κατανόηση. Η κατάχρησή τους κινδυνεύει να περιορίσει την ιδέα που στοχεύουμε. Η χρήση αναλογιών είναι παράγωγος του φαινομένου Torpaze.

Η λύση ενός προβλήματος αναζητώντας τις απαντήσεις, μέσα από ανάλογα προβλήματα είναι μια καλή ευρετική πρακτική, αν όμως περιοριστούμε στην καθιερωμένη φράση: "επιστρέφουμε στο προηγούμενο πρόβλημα" αποφεύγουμε συχνά την άμεση ενασχόληση με το πρόβλημα που τέθηκε. Είναι η περίπτωση, για παράδειγμα, αντί της μελέτης των ποσοστών, να αναφερόμαστε αποκλειστικά σε κέρδη και ζημιές.

ε - φαινόμενο των ακατανόητων προσδοκιών

Να υποθέσουμε ότι μια αναμενόμενη απάντηση των μαθητών προκύπτει από μόνη της.

Για να τελειώσουμε την παρουσίαση του διδακτικού συμβολαίου, παραθέτουμε μια χιουμοριστική σημείωση που οφείλεται στο σχολικό βιβλίο του Gilbert ARSAC (IREM της Lyon):

Ερώτηση που έθεσε ο καθηγητής της Ιστορίας στο γυμνάσιο:

"Στον μεσαίωνα, οι άνθρωποι των πόλεων ανεγείρουν³ ... ;"

Απαντήσεις μαθητών: "γουρούνια, παιδιά,"

Αναμενόμενη απάντηση: "καθηδρικούς ναούς !"

Οι παιδαγωγικές επιτυχίες που απαιτούν καθημερινά οι εκπαιδευτικοί δεν τους οδηγούν στο να θέτουν κάπου - κάπου αυτόν τον τύπο ερωτήσεων, που μόνο οι ίδιοι μπορούν να δώσουν την απάντηση, αφού μέσα στο μυαλό τους δεν υπάρχουν άλλες δυνατές απαντήσεις;

Στις ακραίες περιπτώσεις, ορθώνονται εμπόδια ενάντια σε κάθε πρωτοβουλία ή ερώτηση των μαθητών. Μπορούμε να παραθέσουμε κάποια αποσπάσματα από ένα ρητό συμβόλαιο που κυκλοφόρησε σε μαθήματα γλώσσας στη περιοχή του Παρισιού και που όφειλαν οι μαθητές να υπογράψουν. Αυτός ο τύπος "συμβολαίου" εικονογραφεί την άρνηση του καθηγητή να εγκαταστήσει μαζί με τους μαθητές μια διαπραγματεύσιμη σχέση, όσον αναφορά τη γνώση:

"Το μάθημα των Αγγλικών είναι, πρώτα απ' όλα, ένα μάθημα "δασκαλοκεντρικό". Οι μαθητές δε μπορούν να παρέμβουν παρά μόνον αφού ζητήσουν και λάβουν άδεια από καθηγητή. (...)

... Οι παρεμβάσεις των μαθητών, που καθυστερούν στο τέλος του μαθήματος και ενοχλούν υπερβολικά τον καθηγητή, θα τιμωρούνται με μια συμπληρωματική εργασία, ο καθηγητής δεν επιτρέπεται να απαντά σε ερωτήσεις παρά μόνο μέσα στο αυστηρό πλαίσιο του μαθήματος ...

... Καμία αμφισβήτηση βαθμολογίας δεν είναι αποδεκτή, ως εφαρμογή των επισήμων διοικητικών θέσεων ...

... (ο καθηγητής) ορίζει μόνος του τον τελικό βαθμό του τριμήνου, χωρίς να εξαρτάται από οποιονδήποτε κανόνα ..."

Μια υπερβολικά επιεικής ή ασταθής συμπεριφορά δεν ευνοεί επίσης καθόλου την εγκαθίδρυση συνθηκών στις οποίες οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν τη γνώση τους.

Εποπτευόμενες εργασίες:

Από μια παρατήρηση στην τάξη,

³ élever, που σημαίνει ανατρέφω, μεγαλώνω, εγείρω

- να διευκρινίσετε τους παρατηρούμενους κανόνες του διδακτικού συμβολαίου που ενεργοποιείται από τον καθηγητή,
- να περιγράψετε τα αποτελέσματα του παρατηρουμένου συμβολαίου.

Βιβλιογραφικές αναφορές:

- [1] Régine DOUADY: "De la didactique des mathématiques a l'heure actuelle": dans les cahiers de didactique des mathématiques n° 6, IREM de Paris 7
- [12] Guy BROUSSEAU: Le contrat didactique: le milieu": RDM Vol. 9 n° 3.
- [14] Guy BROUSSEAU: Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques : RDM, Vol 7, n° 2.
- [43] Nicolas BALACHEFF: "Le contrat et la coutume", actes du colloque franco-allemand de Luminy, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble 1987.
- [44] Stella BARUK: "L'age du capitaine" ed. Seuil, 1985.
- [45] Alain BOUVIER: "Le droit a l'erreur", dans "sans tambour ni trompette" n° I, bulletin de l'IREM de Lyon, 1989.

7. Λάθη και εμπόδια

1) Ο ρόλος του λάθους στη διαδικασία μάθησης

Τα λάθη, πάντα παρόντα στα έργα των μαθητών, απασχολούν μεγάλο μέρος των εργασιών στην παιδαγωγική. Η προσέγγιση αυτού του προβλήματος έχει εξελιχθεί πολύ. Οι ασχολούμενοι με την διδακτική του αποδίδουν μια σημαντική θέση στο θεωρητικό μοντέλο της διαδικασίας μάθησης.

Στη διδασκαλία μας, το λάθος εκτιμάται γενικά ως μια δυσλειτουργία της γνώσης του μαθητή, την οποία μια σωστή μάθηση θα όφειλε να αποτρέψει. Οι διδάσκοντες συχνά απογοητεύονται, όταν επικεντρώνονται στο στόχο απάλειψης των λαθών. Οι μαθητές τα βιώνουν βασανιστικά, αφού γι' αυτούς το λάθος είναι συνώνυμο της αποτυχίας. Το αίσθημα αυτό ενισχύεται όταν το λάθος χαρακτηρίζεται ως "παράπτωμα".

Η στάση των εκπαιδευτικών απέναντι στο λάθος είναι πολύ στενά συνδεδεμένη, με τις αντιλήψεις τους για τη διαδικασία μάθησης στις οποίες αναφέρονται.

Στην αντίληψη του *κενού νου* (la tête vide), το λάθος είναι ένδειξη μιας ατελούς εργασίας του μαθητή που (ακόμα) δεν ήξερε (ή δεν μπόρεσε) να καταχωρήσει μια επαρκή γνώση που θα του επιτρέψει να αποφύγει αυτό το λάθος.

Στην αντίληψη της *εύπλαστης ζύμης* (la pâte molle), το λάθος πρέπει να αποφεύγεται, διότι θα μπορούσε να αποτυπωθεί στο μυαλό του μαθητή και να γίνει μόνιμο.

Έτσι στις παραδοσιακές παιδαγωγικές, το λάθος πρέπει να καταργηθεί με κάθε θυσία. Σύμφωνα μ' αυτές, ο καθηγητής προλαβαίνει τους μαθητές: "προσοχή, εδώ υπάρχει κάποιο λάθος ή κάποια λάθη που δεν πρέπει να κάνεις" ,... εξηγεί υπερβολικά, εξηγεί ξανά και αν αυτό δεν αρκεί, αν ο μαθητής κάνει ακόμα πολλά λάθη, του προτείνει να επαναλάβει την τάξη: ο μαθητής θα έχει έτσι νέες επεξηγήσεις!

Για να προειδοποιήσουν τους δασκάλους για τα λάθη που θα μπορούσαν να συναντήσουν, οι εργασίες για το λάθος στα μαθηματικά οδήγησαν στις αρχές του αιώνα σε μια χιονοστιβάδα από καταλόγους λαθών, ως το σημείο, που έπρεπε να μπει εκεί τάξη, κατασκευάζοντας συστήματα ταξινόμησης λαθών.

Αυτός ο τύπος προσέγγισης, καθαρά περιγραφικός, δεν επιτρέπει να εγγραφούν τα λάθη σε ένα συλλογισμό σχετικά με την μάθηση, ούτε να βγάλει στοιχεία για ένα θεωρητικό μοντέλο συμπεριφοράς των μαθητών.

Η *συμπεριφοριστική* (behaviouriste) τοποθέτηση στηρίζεται στην προοδευτικότητα της μάθησης. Για να περάσουμε από μια αρχική κατάσταση γνώσης σε μια τελική, διευθετούμε ενδιάμεσους σταθμούς για τον μαθητή, "τα μικρά βήματα", που οδηγούν σε ένα κομμάτισμα της γνώσης σε μικροαντικείμενα. Η μάθηση γίνεται αντιληπτή ως μια συσσώρευση γνώσεων.

Σ' αυτή την αντίληψη, το λάθος πρέπει να αποφεύγεται και αν εμφανίζεται, δεν είναι οι γνώσεις του μαθητή που αμφισβητούνται, αλλά η προτεινόμενη "προοδευτική" διαδικασία προς αυτές: ένα από τα βήματα είναι πολύ μεγάλο.

Όσον αφορά τους μαθηματικούς, οι δεκαετίες 60 και 70 είδαν την ανάπτυξη εργασιών επηρεασμένων από τη συμπεριφοριστική αντίληψη, που θεωρούσαν τα λάθη ως την έκφραση "ελαττωματικού αλγορίθμου", "λανθασμένων τεχνικών".

Για παράδειγμα, το 1977 η Anna Graeber και η Lisa Wallace δημοσίευσαν την μελέτη τους για τα συστηματικά λάθη, λάθη οφειλόμενα σύμφωνα με τους συγγραφείς στη χρήση "ατελών

κανόνων" (αποτέλεσμα έρευνας "για καλύτερα σχολεία: εντοπισμός των συστηματικών λαθών", Φιλαδέλφεια, 1977). Στην πραγματικότητα, αυτοί οι λανθασμένοι αλγόριθμοι δεν οδηγούν οπωσδήποτε στην κατανόηση των διαδικασιών που τους δημιούργησαν στους μαθητές απ' όπου και η σχετική αδυναμία στην εύρεση οριστικής γιατρείας.

Σύμφωνα με τις εργασίες των Gaston BACHELARD και Jean PIAGET, η κατασκευαστική (constructiviste) αντίληψη της πορείας της μάθησης είναι αναπτυσσόμενη. Θα δούμε ότι σύμφωνα με αυτή την αντίληψη, το λάθος παίζει ένα ρόλο θεμελιακά διαφορετικό. Από το παραχωρημένο "δικαίωμα στο λάθος"¹ για τους μαθητές, περνάμε προοδευτικά στην έρευνα καταστάσεων, όπου τα λάθη θα ήταν ενδεικτικά για την πορεία κατασκευής της γνώσης, απαραίτητης στην διαδικασία μάθησης. Με άλλα λόγια, τα λάθη των μαθητών "μας ενδιαφέρουν", όσο είναι αποδοτικά (για την μάθηση). Το διδακτικό συμβόλαιο είναι έτσι κατά βάθος τροποποιημένο.

Για να συνοψίσουμε αυτή την παρουσίαση, αναφέρουμε ένα απόσπασμα του Herbert Ginsburg (από το "Children's Arithmetic", 1977): *"Σε τελευταία ανάλυση, δε βοηθάει σε τίποτα να εξηγηθούν τα λάθη με όρους έλλειψης εξυπνάδας ή επιδεξιότητας στα μαθηματικά. Τέτοιες αντιλήψεις συσκοτίζουν το γεγονός ότι τα λάθη είναι αποτέλεσμα συστηματικών στρατηγικών λογικής προέλευσης"*.

Σε ένα άρθρο του petit x, αφιερωμένο στα λάθη της αριθμητικής και την αντιμετώπισή τους από τις αρχές του αιώνα, ο Maurice Belanger [46] συμπεραίνει: *«είναι προφανές ότι έχουμε ξεπεράσει τώρα τις αφελείς ιδέες για τα λάθη στα μαθηματικά, που ήταν έγκυρες κατά τη διάρκεια της περιόδου από το 1910 έως το 1970... Δεν είναι δυνατόν να αναγνωρίζεις ένα λάθος χωρίς να γνωρίζεις και το εννοιολογικό πλαίσιο του ατόμου ή της ενδιαφερόμενης ομάδας»*.

2) Διδακτική ανάλυση του λάθους

Στη διδακτική των μαθηματικών, η ανάλυση του λάθους στηρίζεται την ιδέα του εμποδίου αναπτυγμένη από τον BACHELARD² και τη θεωρία της εξισορρόπησης του PIAGET. Αυτή διασαφηνίζεται από τις εργασίες για τη νοηματοδότηση (Britt-Mari BARTH [22], Gérard VERGNAUD [7]), και μοντελοποιείται από την ταξινόμηση των εμποδίων που προτάθηκε από τον Guy BROUSSEAU [25].

Πριν διασαφηνίσουμε αυτά που θεωρούμε εμπόδια, αναφέρουμε ένα απόσπασμα του BACHELARD:

"... το λάθος είναι χαρακτηριστικό του γνωρίζει και παρουσιάζεται από μια λειτουργική ανάγκη αργοπορίας και δυσχέρειας ... Η κατανόηση προκύπτει σε αντίθεση με μια προηγούμενη έννοια καταστρέφοντας έτσι έννοιες κακοφτιαγμένες" και προσθέτει: "καθώς αντιμετωπίζει την επιστημονική παιδεία, το πνεύμα δεν είναι ποτέ νέο. Είναι (το ίδιο) πολύ γερασμένο διότι έχει την ηλικία των προκαταλήψεών του" ...

Ο Guy BROUSSEAU [25] παραπέμπει λοιπόν σε μια διδακτική θεωρία των λαθών και γράφει:

«Ένα εμπόδιο εκδηλώνεται λοιπόν με τα λάθη, αλλά αυτά τα λάθη δεν οφείλονται στη τύχη. Παροδικά και άτακτα, αναπαράγονται επίμονα. Επιπλέον, αυτά τα λάθη, στο ίδιο υποκείμενο, συνδέονται μεταξύ τους σε μια κοινή αιτία: μια μέθοδο του γνωρίζει, μια χαρακτηριστική αντίληψη, συνεκτική αν όχι σωστή, μια παλιά "γνώση" και η οποία κατάφερε είναι επιτυχής μέσα σε ένα ολόκληρο πεδίο δραστηριοτήτων».

¹ Τίτλος άρθρου του Alain BOUVIER [45].

² Στο βιβλίο "η συγκρότηση του επιστημονικού πνεύματος" [13] εκδόθηκε το 1938, για διάβασμα!

Έτσι, το λάθος είναι η έκφραση ή η σαφής εκδήλωση από ένα σύνολο αυθορμήτων ή προκατασκευασμένων αντιλήψεων, ενταγμένες σ' ένα λογικά συνεπές δίκτυο γνωστικών αναπαραστάσεων, που ορθώνονται ως εμπόδια στην απόκτηση και στην κατοχή καινούριων γνώσεων. Η υπέρβαση αυτών των εμποδίων αποτελεί λοιπόν το σχέδιο της διδακτικής πράξης και το λάθος είναι η υποχρεωτική της διαδρομή.

3) Η έννοια του εμποδίου

Στη διδακτική, διακρίνουμε τα 5 ακόλουθα χαρακτηριστικά για ένα εμπόδιο

1. Αποτελεί γνώση (όχι έλλειψη γνώσης!)
2. Επιτρέπει να παραχθούν απαντήσεις προσαρμοσμένες σε ορισμένα προβλήματα ή κατηγορίες προβλημάτων.
3. Οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις για άλλους τύπους προβλημάτων.
4. Παρουσιάζει αντίσταση στην όποια τροποποίηση ή μεταμόρφωση και επιμένει να επανακάμπτει (Δηλαδή, επανεμφανίζεται να κυριαρχεί σε ορισμένες καταστάσεις, ακόμα και αν έχει αντικατασταθεί επιφανειακά από μια καινούρια γνώση).
5. Η απόρριψη αυτής της γνώσης θα οδηγήσει σε μια νέα.

Έτσι, μια κατάσταση ρήξης, βιωμένη από το μαθητή, μέσα στην οποία μια παλιά γνώση θα παράγει λάθη, θα έχει ως αποτέλεσμα να φανερωθούν ένα ή περισσότερα εμπόδια καθώς και να εκφραστούν λανθασμένες αντιλήψεις ή αλγόριθμοι που, για να ξεπεραστούν, θα πρέπει να οδηγήσουν στην εγκατάσταση μιας καινούριας γνώσης.

Σ' αυτή την οπτική που εξετάζουμε, το λάθος είναι απαραίτητο:

- στο μαθητή για να μπει στην πορεία αυτών των εξελίξεων,
- στον εκπαιδευτικό για να ταξινομήσει τις αντιλήψεις του μαθητή, ενδεχομένως να καταλάβει τα εμπόδια που προκύπτουν και για να προσαρμόσει τη διδακτική κατάσταση.

Είναι προφανές λοιπόν ότι το διδακτικό συμβόλαιο οφείλει όχι μόνο να δεχτεί το λάθος (το δικαίωμα στο λάθος), αλλά να το προκαλέσει για να το εξερευνήσει.

4) Διαφορετικοί τύποι εμποδίων

α-επιστημολογικά εμπόδια

Είναι ο τύπος εμποδίων, που αναδείχθηκαν από τον BACHELARD [13] και στα οποία αναφέρονται ιδιαίτερα οι προηγούμενες θεωρήσεις.

Αυτά τα εμπόδια είναι έμφυτα στην ίδια τη γνώση. Το πολυσύνθετο των εννοιών και των σχέσεων τους μέσα σ' ένα εννοιολογικό πεδίο το οποίο οι μαθητές κατέχουν ελάχιστα, συγκρούεται με αυθόρμητες αντιλήψεις που τείνουν να αντιπαραθέσουν τη γνωστική εμπειρία στην επιστημονική γνώση.

Τα επιστημολογικά εμπόδια μπορούν να εντοπιστούν από τις δυσκολίες που συνάντησαν ιστορικά οι ίδιοι οι μαθηματικοί και τις προσπάθειες τους να τις υπερνικήσουν κατά την διάρκεια της ιστορίας. Η κατανόηση αυτών των εμποδίων εμπλουτίζεται από τις έρευνες στην επιστημολογία και την ιστορία των μαθηματικών.

Στην πράξη, τα μεγάλα ερωτήματα στα μαθηματικά, που υπήρξαν αιτία σπουδαίας προόδου, είναι επιστημολογικά εμπόδια για τους μαθητές.

Δίνουμε μερικά παραδείγματα:

- Η υπόσταση των αριθμών:

"Ο Θεός δημιούργησε τους ακέραιους αριθμούς, οι άλλοι είναι έργο των ανθρώπων" δήλωνε ο Kronecker στο τέλος του 19ου αιώνα. Η αναλογία δύο μεγεθών (a/b) δεν είναι εύκολα αντιληπτή σαν αριθμός.

Ο ίδιος ο Euler στον 17ο αιώνα εξέφρασε τις ίδιες αριθμητικές ιδιότητες δύο φορές: μια φορά για τους αριθμούς και άλλη μια φορά για τα κλάσματα.

Γνωρίζουμε την άρνηση των Πυθαγορείων για το άρρητο $\sqrt{2}$, και την πρόδηλη αμφιβολία ακόμα και στην αρχή του 19ου αιώνα από τους Carnot και Stendhal να δεχτούν την ύπαρξη αρνητικών αριθμών, που κατά τη διάρκεια των προηγούμενων αιώνων παρουσιάζονται ως «παράλογοι αριθμοί».

Οι μιγαδικοί αριθμοί (οι "φανταστικοί") χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλεία αλγεβρικών υπολογισμών περισσότερο από 300 χρόνια, προτού ο Cauchy και ο Gauss τους δώσουν την υπόσταση³ του αριθμού.

- Το μηδέν:

Αν και εμφανίζεται στους Ινδούς για να γεμίζει τα κενά σε ένα θεσιακό σύστημα αρίθμησης, έπρεπε να περιμένουμε τον 9ο αιώνα για να το ανακαλύψουμε στις αραβικές πραγματείες και τον 12ο αιώνα για να δούμε να επεξεργάζονται τις αλγεβρικές του ιδιότητες.

Η εξομοίωση του μηδενός με το "τίποτα" μετατοπίζει το επιστημολογικό εμπόδιο προς μια ψυχολογική εκδοχή και γίνεται αιτία πολυάριθμων σφαλμάτων.

- Το άπειρο:

Η ιστορία του απείρου, ως πηγή πολύ μεγάλων δυσκολιών των θεμελιώσεων, είναι πλούσια σε προσπάθειες ορισμού, από τα παράδοξα του Ζήνωνα του Ελεάτη μέχρι αυτά του Cantor και του Russell. Η σημερινή ανάπτυξη της non standar ανάλυσης, που προσπαθεί να δώσει μια αυστηρή θεμελίωση στον απειροστικό λογισμό, φανερώνει ότι το επιστημολογικό ερώτημα δεν είναι ακόμα κλειστό.

- Η έννοια της συνάρτησης:

Χρειάστηκαν 2000 χρόνια για να εδραιωθεί στη σημερινή της πραγματικότητα. Η ιστορία της συνδέεται με αυτή της έννοιας το ορίου. Ο Cauchy επεσήμανε ότι για τον Euler, το $\sqrt{x^2}$ αναγνωριζόταν ως συνάρτηση, διότι οριζόταν από έναν μόνο τύπο, ενώ το $x \rightarrow x$, αν $x \geq 0$ και $x \rightarrow -x$, αν $x < 0$ δεν ήταν μια τέτοια!

β- διδακτικά εμπόδια:

Είναι τα εμπόδια που δημιουργούνται από την επιλογή της μιας ή της άλλης στρατηγικής διδασκαλίας, η οποία αφήνει να διαμορφωθούν κατά τη μάθηση λανθασμένες ή ημιτελείς γνώσεις εννοιών, που εκδηλώνονται μεταγενέστερα ως εμπόδια στην εξέλιξη της ανάπτυξης της νοηματοδότησης.

³ Γεωμετρική.

Τα διδακτικά εμπόδια είναι αναπόφευκτα, ενυπάρχουν στην αναγκαιότητα της διδακτικής μετατόπισης: δε μπορούμε να καταργήσουμε τα στάδια, τις προσεγγίσεις, τις αναλογίες περισσότερο ή λιγότερο κατάλληλες για τη διαδικασία μάθησης.

Αναγνωρίζοντας ένα διδακτικό εμπόδιο, επιτρέπουμε στο δάσκαλο να επιστρέψει στην πρωταρχική παρουσίαση της σχετικής έννοιας, ώστε να εξηγήσει καλύτερα τη δυσκολία που συναντά ο μαθητής. Οι έρευνες στη διδακτική έχουν ακριβώς ως εφαρμογή να παρουσιάσουν στους εκπαιδευτικούς τα διδακτικά εμπόδια που μπόρεσαν να αναδείξουν.

Μερικά παραδείγματα:

- Η εκμάθηση των δεκαδικών από τα μέτρα μεγεθών με μια μονάδα και υπομονάδες, οδηγεί στην έννοια του δεκαδικού, σαν ένα ζεύγος ακεραίων αριθμών που χωρίζονται από ένα κόμμα. Εδώ βρίσκουμε πολυάριθμα λάθη του τύπου: $3,7+2,8=5,15$ ή ακόμα: "ο επόμενος του 3,7 είναι ο 3,8". Ο Guy BROUSSEAU [47] έχει μελετήσει εκτεταμένα αυτό το διδακτικό εμπόδιο.

- Η ανακάλυψη των κλασμάτων με τον χωρισμό γλυκών αφήνει την ιδέα ότι ένα κλάσμα είναι πάντα ένα μέρος της μονάδας. Το ίδιο η μελέτη της διαίρεσης των ακεραίων οδηγεί στην άρνηση της ιδιότητας: $\alpha/\beta > \alpha$.

- Στο δημοτικό, ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο. Αυτή είναι μια πηγή μεταγενέστερων δυσκολιών.

- Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών μέσω αριθμητικών ισολογισμών ή ζυγίσεων ή αναφορών σε έναν άξονα (θερμοκρασίες), επιτρέπει τη διδασκαλία (μετάδοση) της πρόσθεσης, αλλά αποτελεί ένα εμπόδιο στη σωστή χρήση του κανόνα των προσήμων.

- Η γραφική μελέτη, (στην Β΄ Γυμνασίου), συναρτήσεων που είναι μόνο γραμμικές ανορθώνει ένα επί πλέον συμπληρωματικό διδακτικό εμπόδιο στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (στην επόμενη τάξη).

- Η αποκλειστική χρήση πινάκων αναλογικότητας περιορίζει την απαραίτητη αφομοίωση αυτής της έννοιας, μέσα από πολύ διαφορετικά πλαίσια.

Πολλά διδακτικά εμπόδια δημιουργούνται από τη χρήση των αναλογιών. Το ηλεκτρικό ρεύμα που παρουσιάζεται ως ροή ύδατος ή η μετάδοση της θερμότητας ως ροή «θερμικού υγρού», είναι επαρκείς αναλογίες σε κάποιο επίπεδο, αλλά πολύ ανθεκτικές όταν θέλουμε να περάσουμε στο επίπεδο της επιστημονικής γνώσης.

γ- Ψυχολογικά εμπόδια:

Είναι τα εμπόδια που παρουσιάζονται όταν η εκμάθηση έρχεται σε αντίθεση με τις βαθιά ριζωμένες αντιλήψεις του υποκειμένου ή όταν αυτή επιβάλλει μια αποσταθεροποίηση μη αποδεκτή.

Πολλοί παράγοντες μπορούν να είναι πηγές ψυχολογικών εμποδίων. Μπορεί να είναι εξωτερικοί της διδακτικής σχέσης (αυτό δεν σημαίνει ότι δεν ενδιαφέρουν τον εκπαιδευτικό) ή (εσωτερικοί) να προκαλούνται από αυτή.

Μερικά παραδείγματα:

- Η μαθηματική λογική δεν είναι αυτή της καθημερινής ζωής: "Αν διαβάσεις τα μαθήματά σου θα έχεις σοκολάτα" ο μαθητής που εκπαιδεύεται (κακώς) πιστεύει ότι αν δεν διαβάσει τα μαθήματά του δεν δικαιούται να ζητήσει σοκολάτα. Εν πάσει περιπτώσει αυτό το λογικό σφάλμα δεν πρέπει να ενθαρρύνεται από τον καθηγητή των μαθηματικών!

- Το μηδέν είναι επίσης αίτιο ψυχολογικών εμποδίων, λόγω του φόβου του εκμηδενισμού, αφού "είναι πολύ άσκημο" να διαιρείς με το μηδέν.

- Οι ψυχολογικές συνθήκες μέσα από τις οποίες ένας μαθητής προσεγγίζει μια νέα ιδέα φτάνουν να καθορίσουν τη χρήση της αργότερα: κάποιος μαθητής αισθάνεται το στομάχι του να γίνεται κόμπος, όταν του ζητείται να κάνει υπολογισμούς δυνάμεων, γιατί "ποτέ δεν κατάλαβε τίποτα και ο καθηγητής τον ειρωνεύτηκε από την αρχή".

- Αναφέρουμε την περίπτωση του μαθητή που δεν μπορούσε να χρησιμοποιήσει τον αριθμό 2, η ανάλυση έδειξε ότι δε δέχθηκε ποτέ τον δίδυμο αδελφό του.

δ-οντογενετικά εμπόδια:

Είναι τα εμπόδια που εκφράζονται όταν η ζητούμενη μάθηση απέχει πολύ από την αντιληπτική ωριμότητα του υποκειμένου (μαθητή). Όποια και αν είναι η εξήγηση, ο μαθητής δεν καταλαβαίνει αυτό που του ζητάμε, η ανάπτυξη της σκέψης του παραμένει ξένη προς το εννοιολογικό πεδίο στο οποίο θέλουμε να την οδηγήσουμε.

Μερικά παραδείγματα:

Η θεωρία των σταδίων του PIAGET [19] δείχνει την αδυναμία της εκτέλεσης αφηρημένων συλλογισμών στο στάδιο των συγκεκριμένων πράξεων.

- Η σωστή χρήση της γλώσσας και των μαθηματικών συμβόλων έρχεται αντιμέτωπη σ' αυτόν τον τύπο εμποδίων. Μπορούμε λοιπόν να αναπτύξουμε την εκμάθηση αλγοριθμικού τύπου συνηθίζοντας τους μαθητές να επαναλαμβάνουν σωστά τους όρους που χρησιμοποιεί ο καθηγητής. Διακινδυνεύουμε όμως έτσι την απώλεια της αίσθησης της μαθηματικής δραστηριότητας και θα ακολουθήσουν πολυάριθμα λάθη.

Για να κάνουμε πιο εμφανή τα παραπάνω, δίνουμε ένα απόσπασμα από μια επιστολή της 15ης Μαΐου του 1843 από τον C.F.GAUSS:

«Το χαρακτηριστικό των σύγχρονων μαθηματικών είναι ότι, με τη μεσολάβηση του συμβολισμού και της ορολογίας μας, κατέχουμε ένα μέσο με το οποίο οι πιο πολύπλοκοι λογισμοί μπορούν να απλοποιηθούν σ' έναν ειδικό μηχανισμό. Η επιστήμη κέρδισε πλουσιοπάροχα, μια ομορφιά και μια συνοχή σχεδόν απεριόριστη. Αλλά, στην καθημερινή χρήση αυτού του εργαλείου, η επιστήμη έχασε σχεδόν ό,τι κέρδισε. Πολύ συχνά αυτό το μέσο εφαρμόζεται μηχανικά, παρόλο που η επίσημη χρήση του απαιτεί συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Επιμένω σ' αυτό ... κάθε χρήστης πρέπει να έχει πλήρη συνείδηση των αρχικών προϋποθέσεων γέννησης και χρήσης "του εργαλείου" αυτού».

- Οι οδηγίες των προγραμμάτων του 1971 πρότειναν στην Β' Γυμνασίου τον ακόλουθο ορισμό της Ευκλείδειας ευθείας:

Μια ευκλείδεια ευθεία D είναι ένα σύνολο E εφοδιασμένο με μια οικογένεια F, αμφιμονοσήμαντων σχέσεων από το E πάνω στο R, τέτοιο ώστε:

α) Για κάθε στοιχείο f του F και για κάθε πραγματική σταθερά a, οι απεικονίσεις που ορίζονται από τις $g(M) = f(M) + a$ και $g'(M) = -f(M) + a$ ανήκουν επίσης στο F,

β) Αντιστρόφως, αν το f_1 και το f_2 είναι δυο οποιαδήποτε στοιχεία του F, τότε ένα από τις δυο επόμενα ενδεχόμενα ισχύει:

- 'Η υπάρχει πραγματικός α τέτοιος ώστε $f_2(M) = f_1(M) + a$

- 'Η υπάρχει ένας πραγματικός β ώστε $f_2(M) = -f_1(M) + \beta$

Το σύνολο E ονομάζεται φορέας της Ευκλείδειας ευθείας D κι ένα στοιχείο M του E ονομάζεται σημείο της Ευκλείδειας ευθείας D.

Ένας μεγάλος αριθμός οντογενετικών εμποδίων εμφανιζόταν όταν οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου έπρεπε να κάνουν αυτόν τον ορισμό λειτουργικό.

Άλλοι τύποι εμποδίων που αναφέρονται, είναι για παράδειγμα τα *πολιτιστικά εμπόδια* όταν οι εισαγόμενες έννοιες παρεμβάλλονται σ' ένα πλέγμα ιδεών που αποκτούν νόημα μόνο σε μια δεδομένη κουλτούρα, αλλά δεν έχουν νόημα σ' εκείνη ενός συγκεκριμένου μαθητή.

Τα *τεχνικά εμπόδια* παρουσιάζονται εξ ίσου ως αιτία λαθών, όταν το πολυσύνθετο της εργασίας ξεπερνάει τις δυνατότητες της προσοχής του μαθητή. Προσπαθήστε, ας πούμε να κάνετε ένα μεγάλο πολλαπλασιασμό με ρωμαϊκά ψηφία!

5) Υπερπήδηση του λάθους

Τα λάθη των μαθητών λοιπόν μας ενδιαφέρουν. Μπορούν να μας οδηγήσουν σε γόνιμες ανακαλύψεις εάν είναι χαρακτηριστικά.

Το εάν είναι σχεδόν περιττό. Στην πραγματικότητα πολλά λάθη γίνονται λόγω επιπολαιότητας. Αν υπάρχουν λάθη από απροσεξία (πολύ λιγότερα απ' ότι πιστεύουμε), η έκφρασή τους αποκαλύπτει συχνά μια σημασία: Ο μαθητής δεν έγραψε στην τύχη, η εργασία του οδηγήθηκε από μια κρυμμένη πορεία.

Όμως η ανάλυση αυτών των λαθών απαιτεί από τον εκπαιδευτικό μεγάλη προσοχή και ιστορική καλλιέργεια, επιστημολογική και διδακτική. Η Suzette ROUSSET - BERT [48] έδειξε πώς οι αναπαραστάσεις των εκπαιδευτικών προσδιορίζουν τη διαχείριση των λαθών από τους μαθητές τους. Γενικά, δεν υπάρχει χρόνος γενικά για να εξαντλήσουμε τη διαχείριση κάθε λάθους! Παρ' όλα αυτά όταν ένα εμπόδιο εντοπίζεται, πρέπει να αρπάξουμε την ευκαιρία και να θέσουμε το μαθητή σε μια κατάσταση απ' όπου θα μπορέσει να το ξεπεράσει για πάντα. Ο χρόνος που θα κερδιθεί μπορεί να είναι πολύ σημαντικός για την μάθηση.

Οι εκπαιδευτικοί έχουν πλήθος παιδαγωγικών επιλογών στη διάθεση τους για τον τρόπο που θα διαχειριστούν τα σφάλματα. Δεν έχουμε περιθώρια για να περιγράψουμε αυτές τις επιλογές των εκπαιδευτικών κατά των εμποδίων: να δρούμε με αυτά ή να δρούμε εναντίον τους ή να δρούμε μέσω αυτών, να τα αποφεύγουμε ή να τα εξαφανίζουμε. Η χειρότερη επιλογή θα ήταν χωρίς αμφιβολία να τα αγνοήσουμε.

Προτεινόμενες εργασίες:

Αφού διορθώσετε ένα πακέτο εργασιών μαθητών, ταξινομήστε τις επεξεργασίες των λαθών που εφαρμόσατε με τη βοήθεια του απλοποιημένου σχεδιαγράμματος που ακολουθεί:

- 0- κόκκινη διαγραφή στο γραπτό.
- 1- αναγραφή του σωστού αποτελέσματος.
- 2- παραπομπή σ' έναν ορισμό ή σ' ένα θεώρημα.
- 3- παραπομπή στις υποθέσεις.
- 4- πρόταση να επεξεργαστούν μια ανάλογη ερώτηση.
- 5- πρόταση ενός αντιπαραδείγματος.
- 6- άλλα.

Για ορισμένα λάθη, χαρακτηρίστε το εμπόδιο που συναντάτε και φανταστείτε ένα τεστ που να επιτρέπει να εκδηλωθεί το λάθος στην πραγματικότητα. Μπορούμε να εμπνευστούμε από

το άρθρο της Suzette ROUSSET-BERT [48] πάνω στα λάθη που συναντώνται στην τετραγωνική ρίζα.

Βιβλιογραφικές αναφορές

[7] - Gérard VERGNAUD: "L'ENFANT les mathématiques et la réalité: ed. Peter Lang, Berne 1981.

[13] - Gaston BACHELARD: "La formation de l'esprit scientifique", ed. J VRIN, 1965.

[19] - Jean PIAGET "Problèmes de psychologie génétique" et "Mes idées" ed. Denoël- Gonthier, 1983 et 1977.

[22] - Britt- Mari BARTH: "L' apprentissage de l' abstraction", Actualités des Sciences Humaines - RETZ , 1987.

[25] - Guy BROUSSEAU: "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques" RDM Vol. 4 no 2, 1983.

[45] – Alain Bouvier: "Le droit à l'erreur", dans "sans tambour ni trompette" n° 1, bulletin de l' IREM de Lyon, 1989.

[46] - Maurice BELANGER: "Les erreurs en arithmétique. Un siècle de présomption américaine", CIRADE, Université du Québec a MONTREAL, publie dans petit x, no 26, IREM de Grenoble, 1991.

[47] - Guy BROUSSEAU" "Problèmes de didactique des décimaux" RDM vol, 2I, 1981.

[48] - Suzette ROUSSET-BERT: " Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths, en liaison avec certaines de leurs représentations" Petit x 25, IREM de Grenoble, 1990.

8. Ζητήματα Αξιολόγησης

1) Εισαγωγή

Για πολλούς διδάσκοντες, το να αξιολογήσουν σημαίνει πρώτα απ' όλα να εκφέρουν μια κρίση για την εργασία του μαθητή. Με σκοπό να καθιερώσουν συγκρίσεις μέσα στο χρόνο της διδασκαλίας και στον χώρο της τάξης, το προϊόν της αξιολόγησης λογαριάζεται μέσω ενός βαθμού που πιστεύεται ότι μετρά αυτή την εργασία. Περιορίζοντας έτσι την αξιολόγηση σε βαθμολόγηση, οι διδάσκοντες, οι υπεύθυνοι του εκπαιδευτικού συστήματος, δεν βλέπουν την πολυπλοκότητα αυτού του προβλήματος στο σύνολό της.

Ωστόσο, εδώ και μερικά χρόνια, γίνεται χρήση του όρου της αξιολόγησης μέσα σε διαφορετικά πλαίσια: αξιολόγηση καινούριων προγραμμάτων, αξιολόγηση ενός εκπαιδευτικού σεμιναρίου, μιας επιμόρφωσης, ενός εκπαιδευτικού συστήματος.

Αντιφάσεις παρουσιάζονται σ' εκείνους που ένα από τα καθήκοντά τους είναι η αξιολόγηση της μάθησης. Όταν η "αποτυχία" που αποκαλύπτεται μέσα από μια παραδοσιακή βαθμολόγηση είναι μαζική, τότε αναρωτιέται κανείς μήπως δεν ήταν το κατάλληλο εργαλείο; Για μια φορά, θα πρέπει να σπάσουμε το θερμόμετρο-βαθμολογία γιατί μας εμποδίζει να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο πραγματικό ζητούμενο που είναι η μάθηση, μαζί με όλες τις ποικιλίες και δυσαναλογίες που συνεχώς διαπιστώνονται από τον ένα μαθητή στον άλλο.

Αυτό το κείμενο παρουσίασης είναι αναγκαστικά περιορισμένο. Συνεπώς είναι αδύνατο να θίξει όλες τις πλευρές του εκτεταμένου αυτού προβλήματος, που είναι η αξιολόγηση. Εμείς θα κρατήσουμε τη διδακτική προσέγγιση επικεντρωμένη πάνω στην αξιολόγηση της μάθησης των μαθητών. Για περισσότερα, μπορεί κανείς να απευθυνθεί στο άρθρο του Antoine BODIN¹ [49], *l' évaluation du savoir mathématique*, το οποίο αξίζει μια προσεκτική ανάγνωση.

2) Στοιχειώδεις έννοιες αξιολόγησης

Οι αντιλήψεις πάνω στην αξιολόγηση είναι διαφορετικές και ποικίλουν μέσα στον χρόνο, κάτι που εξηγεί τη δυσκολία να δοθεί ένας ικανοποιητικός ορισμός, για όλους τους ειδικούς. Οι αντιλήψεις αυτές είναι συνδεδεμένες με τις αναπαραστάσεις τις οποίες έχουν οι διδάσκοντες για τον εκπαιδευτικό και κοινωνικό τους ρόλο και για το επάγγελμά τους. Αυτές προέρχονται, σε μεγάλο βαθμό, από την κουλτούρα και τις παραδόσεις του γαλλικού εκπαιδευτικού συστήματος και από την ατομική τους εμπειρία που είχαν ως μαθητές.

Μπορεί να διακρίνει κανείς τρεις τάσεις:

- αξιολόγηση - αξιολογική κρίση

Μέσα στο λεξικό του Robert βρίσκεται η ιδέα ότι η αξιολόγηση είναι: "το να εκφέρεις μια κρίση επί της αξίας, της τιμής του..." Το Petit Larousse υποδεικνύει "το να καθορίσεις την αξία, την τιμή, την σπουδαιότητα κάποιου πράγματος".

Για τον J. M. Barbier [50], η αξιολόγηση μπορεί να καθοριστεί ως:

μια πράξη συνειδητή και κοινωνικά οργανωμένη που καταλήγει στην παραγωγή αξιολογικής κρίσης.

¹ Ο Antoine BODIN είναι καθηγητής στη Μέση Εκπαίδευση, συνεργάτης του IREM της Besançon, ερευνητής της διδακτικής. Οι εργασίες του πάνω στην αξιολόγηση είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Κατεύθυνε τις αξιολογήσεις των προγραμμάτων του Γυμνασίου του I'ARMER, τα πρακτικά του οποίου θα μπορούσε κανείς να προμηθευτεί.

Ο ορισμός αυτός παραπέμπει σ' αυτόν της έννοιας της αξίας που σχετίζεται με την χρήση (ή την ανταλλαγή) του αξιολογούμενου αντικειμένου που κάνει κάποιος. Οι διδακτικοί δεν μπορούν ν' αποδεχθούν ένα τέτοιο ορισμό για τον μαθητή και τις γνώσεις του, χωρίς να διακρίνουν και τους φορείς της μόρφωσης (δηλαδή τους εργοδότες και τους ίδιους τους εκπαιδευόμενους).

- αξιολόγηση - μέτρηση.

Μέσα σε αυτή την αντίληψη το να αξιολογείς είναι:

Να εκφέρεις μια αξιολογική κρίση πάνω στο αποτέλεσμα μιας μέτρησης, να αποδώσεις μια σημασία σε αυτό το αποτέλεσμα παραπέμποντας σε ένα πλαίσιο αναφοράς, ένα κριτήριο, μια κλίμακα αξιών.

Η αξιολόγηση είναι λοιπόν συνδεδεμένη με μια μέτρηση και εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο εργαλείο. Κάποιος δεν αξιολογεί ένα μαθητή αλλά μια παραγωγή του μαθητή. Αυτή η αντίληψη είναι πιο ικανοποιητική για το πνεύμα, αφού η αξιολόγηση θα αναφερόταν σ' ένα πραγματικό αντικείμενο (την παραγωγή), βασισμένη σε αντικειμενικά κριτήρια (ο βαθμός που μετρά την παραγωγή).

Οι εργασίες, στα σχετικά δοκίμια, αναπτύχθηκαν για να εξοπλίσουν τον εκτιμητή με εργαλεία όλο πιο ακριβή και αξιόπιστα, όπως η απόπειρα του DE LANDSHEERE [51]. Άλλες εργασίες έχουν δείξει ότι η δυσαναλογία των βαθμών που απονέμονται από διαφορετικούς διορθωτές παραμένει μεγάλη, έτσι που μπορεί κανείς να αμφιβάλει για την ορθότητα αυτής της αντίληψης του *βαθμού-μέτρου*².

Στην πραγματικότητα, πρέπει ν' αναρωτηθούμε ποιο μετρήσιμο μέγεθος αξιολογείται από ένα βαθμό που εμφανίζεται πάνω σε ένα γραπτό. Ένα τέτοιο μέγεθος μπορεί να αθροίζεται; Η Μόρφωση θα περιοριστεί σε ένα όγκο γνώσεων;

Σε αυτή την κριτική αντιτάσσεται η αντίληψη του *βαθμού – σημείου αναφοράς*. Μετράμε ένα προϊόν όπως μετράμε μια θερμοκρασία, ο βαθμός δεν έχει παρά μόνο συγκριτική αξία και δεν επιτρέπει παρά μόνο ιεραρχικές ταξινομήσεις. Και εδώ ακόμη η δυσαναλογία, που προκύπτει από τους διαφορετικούς διορθωτές, επιτρέπει να αμφισβητήσουμε το εργαλείο.

Αυτή η διάκριση παρακάμπτει ολόκληρο το πρόβλημα της αξιολόγησης της μάθησης, αφού μεταθέτει το βάρος της πάνω στα κατασκευασμένα από τους μαθητές προϊόντα.

- αξιολόγηση και παιδαγωγικοί στόχοι.

Μια λίστα διαφορετικών στόχων προσδιορίζεται από την λειτουργία του εκπαιδευτικού συστήματος. Σε αυτούς μπορούν να συμπεριληφθούν οι στόχοι απόκτησης γνώσεων, ικανοτήτων προς κατανόηση, χειρισμού των εφαρμογών, ικανοτήτων στην σύνθεση και την ανάλυση. Μπορούν να συμπεριληφθούν επίσης στόχοι συμπεριφοράς και προσαρμογής.

Κάθε στόχος μπορεί ν' αναλυθεί σε επί μέρους στόχους ή μικροστόχους. Θα μπορούσε κάποιος ν' αναφέρει τις *ταξινομίες* των Bloom [10] και Régis Gras [11], που βρίσκονται στους πίνακες των επομένων σελίδων.

Συμβατικά *ενεργοποιημένοι* αυτοί οι στόχοι αποτελούν το στήριγμα της αξιολόγησης, ως προς το αν επιτεύχθηκαν τελικά ή όχι οι επιδιωκόμενοι στόχοι. Μετά από μια τέτοια διαπίστωση, η αξιολογική κρίση δεν παίζει πλέον σημαντικό ρόλο.

Αυτή η πρακτική αξιολόγησης είναι προφανώς προσαρμοσμένη σε μια παιδαγωγική στόχων, η οποία με την σειρά της αντιμετωπίζει τις ίδιες κριτικές: Κατακερματισμός του έργου, αδυναμία να εξασφαλιστεί η συνάφεια στην εκμάθηση, ελάχιστη εργασία πάνω σε θεμελιώδεις έννοιες. Ωστόσο, η πρακτική θα εφαρμόζεται όταν ο στόχος της αξιολόγησης είναι διαμορφωτικός.

² Ο Maurice CHASTRETTE [52] αναπτύσσει μια τέτοια κριτική πάνω στο σύνολο των σχετικών εργασιών. Η ανάγνωση του άρθρου είναι εποικοδομητική για τους φετιχιστές του βαθμού.

ΤΑΞΙΝΟΜΙΕΣ ΤΟΥ BLOOM

Η γνωστική περιοχή

Η γνώση

1.00 Απόκτηση γνώσεων

Η γνώση, έτσι όπως έχει οριστεί εδώ, προϋποθέτει την ανάκληση των γεγονότων επί μέρους και γενικών, των μεθόδων και των διαδικασιών, ή την ανάκληση ενός μοντέλου, μιας δομής ή μιας τάξης.

Ως προς την μέτρηση των γνώσεων, η συμπεριφορά της ανάκλησης δεν απαιτεί τίποτε περισσότερο από το να αναδειχθούν και πάλι τα συγκεντρωμένα μέσα στην μνήμη υλικά.

1.10 Γνώση των ειδικών θεμάτων.

1.11 Γνώση ορολογίας.

Παράδειγμα: Γνώση της σημασίας μιας σειράς συνωνύμων.

1.12 Γνώση ιδιαιτέρων γεγονότων.

Γνώση ημερομηνιών, γεγονότων, προσώπων, τόπων, κ.λ.π.

1.20 Γνώση των μέσων που επιτρέπουν την χρήση επί μέρους δεδομένων.

1.21 Γνώση των συνθηκών.

Προσαρμόζουμε μέσα σε κάθε τομέα τους χειρισμούς, την γλώσσα, τις μορφές, τις μεθόδους τις πλέον προσαρμοσμένες στις κοινές τους ανάγκες και (ή) που ταιριάζουν καλύτερα στα φαινόμενα που μελετώνται. Αυτές οι μορφές ή οι συμβάσεις επαφίονται συχνά σε τυχαίες αυθαίρετες βάσεις, ή πάνω στην εγκυρότητα των ειδικών, αλλά αυτές διευκολύνουν τις επικοινωνίες και εξασφαλίζουν την ελάχιστη συνάφεια.

1.22 Γνώση των τάσεων και των ακολουθιών.

Γνώση της εξέλιξης των φαινομένων που εκτυλίσσονται στον χρόνο.

1.23 Γνώση των ταξινομήσεων.

1.24 Γνώση των κριτηρίων.

Γνώση των κριτηρίων σύμφωνα με τα οποία κρίνονται ή επαληθεύονται γεγονότα, αρχές, απόψεις, όπως και η συμπεριφορά

1.25 Γνώση των μεθόδων.

1.30 Γνώση αφηρημένων αναπαραστάσεων.

1.31 Γνώση των αρχών και των νόμων.

1.32 Γνώση των θεωριών.

Οι διανοητικές ικανότητες και επιδεξιότητες.

Οι στόχοι που ανήκουν εδώ τονίζουν την διανοητική διεργασία της προετοιμασίας και

τις αναδιοργάνωσης του υλικού έτσι ώστε να επιτευχθεί ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Ο σπουδαστής μπορεί να χρειαστεί να γνωρίσει ένα δεδομένο υλικό ή να ανακαλέσει στη μνήμη ένα γνωστό υλικό.

2.00 Κατανόηση.

Πρόκειται για το πλέον στοιχειώδες επίπεδο της νόησης. Αυτή η νόηση ή διανοητική αντίληψη επιτρέπει στον σπουδαστή να γνωρίσει εκείνο το οποίο μεταβιβάζεται χωρίς να χρειαστεί να συνδέσει αυτό το υλικό μ' ένα άλλο, ή να συλλάβει όλη την εμβέλεια του.

2.10 Μετατόπιση.

Παράδειγμα: Ικανότητα να μετατρέπεις στην καθημερινή γλώσσα, σχήματα του είδους: μεταφορές, σύμβολα, ειρωνείες ή υπερβολές.

Ικανότητα να μετατρέπεις προφορικό μαθηματικό υλικό σε συμβολικές εκφωνήσεις και αντιστρόφως.

2.20 Ερμηνείες.

Εξήγηση ή σύνοψη μιας επικοινωνίας. Ενώ η μετατόπιση ισοδυναμεί με το να αποδώσεις το κυριολεκτικό νόημα μιας επικοινωνίας, η ερμηνεία ισοδυναμεί με το να παρουσιάσεις το υλικό με είτε μια διαφορετική τοποθέτηση ή μια άλλη διάταξη είτε από μια καινούργια οπτική γωνία.

2.30 Γενίκευση.

Επέκταση των ρευμάτων και των τάσεων πέρα από τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν, ώστε τελικά να καθοριστεί η εμβέλεια, οι συνέπειες, τα πορίσματα, οι επιδράσεις, κ.λ.π., που αντιστοιχούν στις περιγραφόμενες συνθήκες της αρχικής επικοινωνίας.

3.00 Εφαρμογή.

Χρήση αφηρημένων αναπαραστάσεων σε ειδικές και συγκεκριμένες περιπτώσεις. Οι αναπαραστάσεις αυτές μπορούν να πάρουν είτε την μορφή γενικών ιδεών, διαδικαστικών κανόνων ή μεθόδων ευρέως διαδεδομένων είτε τη μορφή ιδεών και θεωριών που πρέπει να ανακληθούν και να εφαρμοστούν.

Παράδειγμα: Ικανότητα να προβλέπεις την πιθανή επίδραση της τροποποίησης ενός παράγοντα σε μια κατάσταση βιολογική ισορροπίας.

4.00 Ανάλυση.

Διαχωρισμός των στοιχείων που απαρτίζουν μια επικοινωνία κατά τρόπο ώστε να διευκρινίζεται η σχετική ιεραρχία των ιδεών και (ή) οι σχέσεις ανάμεσα στις εκπεφρασμένες ιδέες.

4.10 Έρευνα των στοιχείων.

Παράδειγμα: Ικανότητα διάκρισης των γεγονότων από τις υποθέσεις.

4.20 Έρευνα των σχέσεων.

4.30 Έρευνα των αρχών οργάνωσης.

5.00 Σύνθεση.

Η συνένωση στοιχείων και μερών ώστε τελικά να σχηματίζουν ένα όλο. Αυτή η λειτουργία συνίσταται στην τακτοποίηση και στον συνδυασμό των κομματιών. των μερών, των στοιχείων, κ.λ.π. έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα σχέδιο ή μια δομή τα οποία δεν διαφαίνονταν σαφώς από τα πριν.

5.10 Παραγωγή ενός προσωπικού έργου.

Παράδειγμα: Ευκολία στον υπολογισμό μιας προσωπικής εμπειρίας με ενδιαφέροντα τρόπο.

5.20 Επεξεργασία ενός σχεδίου δράσης.

Παράδειγμα: Ικανότητα να προτείνεις μεθόδους για την επιβεβαίωση υποθέσεων.

5.30 Παραγωγή ενός συνόλου αφηρημένων σχέσεων.

Παράδειγμα: Ικανότητα να κάνεις ανακαλύψεις και μαθηματικές γενικεύσεις.

6.00 Εκτίμηση.

Διατύπωση κρίσεων για την αξία του υλικού και των μεθόδων που χρησιμοποιούνται για ένα συγκεκριμένο σκοπό. Κρίσεις ποσοτικές ή ποιοτικές που καθορίζουν μέχρι ποιου σημείου το υλικό και οι μέθοδοι ανταποκρίνονται στα κριτήρια. Εφαρμογή ενός κανόνος αποτίμησης. Τα κριτήρια μπορούν να προταθούν στους σπουδαστές ή να καταρτιστούν από εκείνους.

6.10 Κριτήρια εσωτερικά.

Εκτίμηση της ακρίβειας μιας επικοινωνίας από στοιχεία όπως είναι η αυστηρότητα, η συνάφεια και άλλα εσωτερικά κριτήρια.

Παράδειγμα: Ικανότητα να διακρίνεις τα σοφίσματα μέσα σε μια συζήτηση.

6.20 Κριτήρια εξωτερικά.

Εκτίμηση του υλικού από κριτήρια που δίδονται ή εκείνα τα οποία θυμάται.

Παράδειγμα: Ικανότητα για σύγκριση ενός έργου σε σχέση με ένα άλλο του οποίου η υπεροχή είναι αναγνωρισμένη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2
ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΓΝΩΣΤΙΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Régis Gras I.R.M.U. της Rennes

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	α/α	ΣΤΟΧΟΙ	ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ
Α Γνώση των εργαλείων σύλληψης του αντικειμένου και του μαθηματικού γεγονότος	A1	Γνώση της ορολογίας και του συγκεκριμένου γεγονότος	συνδέω συναθροίζω
	A2	Ικανότητα εσωτερικευμένης δράσης για ανάμνηση μιας φυσικής μορφής της έννοιας	παρομοιάζω παρατηρώ
	A3	Ικανότητα ανάγνωσης χαρτών, πινάκων, γραφικών, σημειώσεων	αποδελτιώνω περιγράφω
	A4	Υλοποίηση απλών αλγορίθμων	οργανώνω υπολογίζω
Β Ανάλυση των γεγονότων και μετατόπιση	B1	Αντικατάσταση με ένα αντιπροσωπευτικό βήμα μιας επεξεργασίας – Γραφική αναπαράσταση	αφαιρώ , προεκτείνω συνάγω
	B2	Αναγνώριση και χρήση μιας απλής υπόρρητης σχέσης όπου επεμβαίνει το μαθηματικό αντικείμενο	αναλύω συγκρίνω
	B3	Μετάφραση ενός προβλήματος από μια μορφή σε άλλη με ερμηνεία	σχηματοποιώ μεταφράζω, μεταθέτω
Γ Κατανόηση των σχέσεων και των δομών	Γ1	Κατανόηση της έννοιας, των σχέσεών της με άλλα μαθηματικά αντικείμενα	αναγνωρίζω κατασκευάζω
	Γ2	Κατανόηση ενός μαθηματικού συλλογισμού : δικαιολόγηση ενός επιχειρήματος	δικαιολογώ
	Γ3	Επιλογή και διάταξη των επιχειρημάτων	συμπεραίνω
	Γ4	Εφαρμογή μέσα σε οικείες καταστάσεις	Αναλύω, αφαιρώ παρεμβάλλω, εφαρμόζω
Δ Σύνθεση και δημιουργία	Δ1	Ανακάλυψη και υλοποίηση σύνθετων αλγορίθμων και νέων σχέσεων	οργανώνω υπολογίζω
	Δ2	Κατασκευή αποδείξεων και προσωπικών παραδειγμάτων	αποδεικνύω επικυρώνω δημιουργώ εφευρίσκω
	Δ3	Ανακάλυψη γενικεύσεων	γενικεύω προβλέπω συνάγω ανασυγκροτώ
	Δ4	Αναγνώριση του μοντέλου και εφαρμογή σε ασυνήθιστες καταστάσεις	Μοντελοποιώ, αναγνωρίζω, ταξινομώ συνοψίζω, διαχωρίζω
Ε Κριτική και αξιολόγηση	E1	Διάκριση του αναγκαίου και του ικανού	Διαμορφώνω, υποθέσεις συμπεραίνω
	E2	Κριτική των δεδομένων και των μεθόδων ή των μοντέλων επίλυσης	Ελέγγω, βελτιώνω προβλέπω, επαληθεύω κρίνω, αναρωτιέμαι
	E3	Κριτική της επιχειρηματολογίας και κατασκευή αντιπαραδειγμάτων	Κρίνω αντικρούω

- αξιολόγηση και απόφαση.

Η αξιολόγηση, από τον ρόλο και την εφαρμογή της στην πράξη, έχει επιπτώσεις στην μάθηση, που δεν είναι καθόλου ευκαταφρόνητες. Οι επιδράσεις αυτές απασχολούν τους “διδασκικούς”. Αλλά για να μπορέσει να μελετήσει κανείς αυτά τα φαινόμενα σε όλη την απαραίτητη έκταση, πρέπει να εντάξει τον μαθητή μέσα στο διδακτικό σύστημα και επομένως να διευρύνει τους στόχους αξιολόγησης σε όλες τους τις συνιστώσες. Γι αυτό και ο ορισμός που εμείς επιλέγουμε είναι πολύ γενικός. Το βλέπει κανείς αυτό στο DE KETELE³ [53]:

«Το να αξιολογείς συνίσταται στο να συλλέγεις ένα σύνολο από κατάλληλες πληροφορίες, έγκυρες και αξιόπιστες, και στο να εξετάζεις το βαθμό αντιστοιχίας ανάμεσα σ' αυτό το σύνολο των πληροφοριών και σ' ένα σύνολο από κατάλληλα επιλεγμένα κριτήρια ώστε να είναι, έγκυρα σε σχέση με τους στόχους, αξιόπιστα στην χρήση τους, ώστε να πάρεις μια θεμελιωμένη απόφαση.»

Ο Antoine BODIN συνοψίζει αυτό τον ορισμό ως εξής :

Η αξιολόγηση είναι το σύνολο των διαδικασιών και των μηχανισμών της **συλλογής**, της **επεξεργασίας**, και της **κοινοποίησης των πληροφοριών** που πραγματοποιούνται με σκοπό να παίρνουμε **αποφάσεις**.

Μέσα σε αυτή την αντίληψη, δεν υπάρχει αξιολόγηση χωρίς να παρθεί απόφαση. Αυτές οι αποφάσεις μπορεί να ποικίλλουν. Ανάλογα με κάθε τύπο απόφασης (πιστοποίηση, τοποθέτηση σε ομάδες, ενδιαμέσος απολογισμός, διάγνωση, προσανατολισμός, επιλογή, πρόβλεψη, ιεράρχηση), θα έχει κανείς διαφορετικές πληροφορίες να λάβει υπόψη και επομένως να υλοποιήσει διαφορετικές διαδικασίες. Διακρίνοντας τις αποφάσεις, πρέπει να διακρίνουμε διαφορετικές μορφές αξιολόγησης.

Τέλος, θα αναλύσουμε μια μέθοδο αξιολόγησης τοποθετώντας την σε σχέση με τις ακόλουθες ερωτήσεις του υποδείγματος του Jean CARDINET⁴ «Pour apprendre le travail des élèves» :

γιατί, για ποιον, πάνω σε τι, πότε, πώς αξιολογείς;

3) Λειτουργίες της αξιολόγησης

Όσον αφορά την πρακτική στην τάξη, θα διακρίνουμε εδώ τρεις βασικές λειτουργίες της αξιολόγησης *τη διαμορφωτική, την αθροιστική και την προβλεπτική.*

Μέσα σε άλλα πλαίσια, συναντούμε τις λειτουργίες *διαγνωστική, κανονιστική, κριτηριακή ή επιβεβαιωτική.*

α – Διαμορφωτική αξιολόγηση (évaluation formative)

Συνίσταται στο να φανερώσει τις αποκτηθείσες γνώσεις κατά την διάρκεια της μάθησης ώστε να διαμορφώσουμε κατάλληλα την εκπαιδευτική διαδικασία.

³ Η Jean Marie DE KETELE είναι καθηγήτρια πειραματικής παιδαγωγικής στο Πανεπιστήμιο της Louven la Neuve. Με τις μεθοδολογικές της εργασίες συνέβαλε στην έρευνα της διδακτικής.

⁴ Ο Jean CARDINET είναι καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Neuchâtel, εμψυχώνει το Institut Romand de Recherches et de Documentation Pédagogiques. Είναι ένας από τους αδιαμφισβήτητους ειδικούς για τα ζητήματα αξιολόγησης. Το βιβλίο του [53] εκδόθηκε στις βελγικές εκδόσεις "De Boeck" στην σειρά "pédagogiques en développement", που διευθύνεται από την DE KETELE.

Ο πίνακας στο τέλος του κεφαλαίου, από τον Jean CARDINET [54], αποσαφηνίζει την διαφορά μεταξύ διαμορφωτικής και αθροιστικής αξιολόγησης.

Η διαμορφωτική αξιολόγηση στοχεύει λοιπόν κυρίως στον διδάσκοντα και τον μαθητή. Είναι έντονα εξατομικευμένη για να παρακολουθεί την πρόοδο καθενός από τους μαθητές. Προσαρμόζεται άριστα σε μια παιδαγωγική με στόχους, παίρνοντας έτσι τη μορφή μιας λίστας από επιτυχημένους ή όχι στόχους. Αλλά, ενδεχομένως, να ενδιαφέρεται για την εξέλιξη της συμπεριφοράς των μαθητών ενώπιον του ενός ή του άλλου τύπου ερώτησης.

Ωστόσο, δεν πρέπει να περιορίζεται ο ρόλος της διαμορφωτικής αξιολόγησης στην αμοιβαία πληροφόρηση του μαθητή και του δασκάλου επί της εξέλιξης της προόδου που έχει επιτευχθεί. Παρεμβαίνει άμεσα στην ίδια την μάθηση, τροποποιώντας τις διδακτικές καταστάσεις, τα συμβόλαια, το παιχνίδι των δραστηριοτήτων. Με αυτό το νόημα, οι διαδικασίες της διαμορφωτικής αξιολόγησης ανήκουν στις διδακτικές μεταβλητές.

Έχουμε δει τον ρόλο του λάθους κατά την διάρκεια της μάθησης. Η διαμορφωτική αξιολόγηση, εάν λειτουργεί αποτελεσματικά κατά την διάρκεια της μάθησης, πρέπει όχι μόνο να επιτρέπει την παραγωγή λαθών, αλλά να επιτρέπει στις αντιλήψεις, αυθόρμητες ή όχι, να εκφραστούν.

Το διδακτικό συμβόλαιο που συνοδεύει μια διαμορφωτική αξιολόγηση δεν πρέπει να περιορίζεται σε μια εκτίμηση της αναμενόμενης γνώσης. Αντίθετα, αυτή η ίδια πρέπει να υποδεικνύει μια ενεργητική συμπεριφορά, λαμβάνοντας υπόψη το ενδιαφέρον του μαθητή για τις κατάλληλες εικασίες ή τα ερωτήματα, ενώ ταυτόχρονα επιβάλλεται πάνω στη επιδιωκόμενη μάθηση.

Μέσα σ' αυτές τις συνθήκες, δεν βλέπουμε πια τη σημασία του βαθμού, που αποδίδεται σε ένα έργο, για την υποστήριξη μιας διαμορφωτικής αξιολόγησης. Ο βαθμός αυτός, στην πραγματικότητα δεν μπορεί παρά να είναι κακός, εάν αναφέρεται στην ποιότητα του έργου (ο μαθητής δεν μπορεί να τα έχει καταλάβει όλα καθόσον βρίσκεται σε πορεία εκμάθησης) και δεν μπορεί να δώσει μια καλή πρόβλεψη για τη συνέχεια.

Επιπλέον, η σχολική κουλτούρα υπολογίζει αρνητικά ένα κακό βαθμό. Θα είναι, λοιπόν, αδύνατο να πείσει κανείς τους μαθητές να διατυπώνουν ελεύθερα τις ερωτήσεις τους και τους δισταγμούς τους.

Εν τούτοις, τα αποτελέσματα που έχουν επιτευχθεί σε τεστ ή διαγωνίσματα κατά την διάρκεια της μάθησης είναι πολύ συχνά "βαθμολογημένα" και επεμβαίνουν τελικά σ' ένα αθροιστικό υπολογισμό. Δεν μπορεί κανείς να εμποδίσει τους μαθητές να έχουν την αίσθηση μιας ρήξης του συμβολαίου, ακόμα κι αν ο καθηγητής μετριάσει αυτούς τους βαθμούς σε μια φιλότιμη προσπάθεια για να λάβει υπόψη την εξέλιξη της "εργασίας" ή των κεκτημένων γνώσεων.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να υλοποιήσει κανείς μια διαμορφωτική αξιολόγηση, δεν μπορούμε εδώ να κάνουμε μια καταγραφή που θα ήταν αφηρημένη και ελλιπής. Η δυσκολία είναι στην βαρύτητα του μηχανισμού για τον διδάσκοντα.

Σημειώνουμε όμως ως ενδιαφέρουσα εφαρμογή, αυτή του προβλήματος με το ενδιάμεσο στάδιο, όπου το συμβόλαιο για τον μαθητή είναι να διατυπώνει τις ερωτήσεις που του παρουσιάζονται κατά την διάρκεια της έρευνάς του και να καταγράφει τα αναποτελεσματικά διαβήματά του. Το συμβόλαιο για το διδάσκοντα είναι να διαπραγματευτεί ατομικά ή συλλογικά αυτές τις ερωτήσεις, για να τις λάβει υπόψη του στην στρατηγική της διδασκαλίας του. Το δεύτερο στάδιο συμπεριλαμβάνει, για τον μαθητή, την υποχρέωση να τελειώσει την εργασία αυτή, που θα είναι πιο εύκολη στο βαθμό που το πρώτο στάδιο υπήρξε επωφελές.

Η αθροιστική αξιολόγηση λαμβάνει υπόψη τις αναμφισβήτητες, αποκτημένες και διαθέσιμες γνώσεις.

β- αθροιστική αξιολόγηση (évaluation sommative)

Αυτή λοιπόν σημειώνει τους σταθμούς της μάθησης, όπου κανείς σκέφτεται ότι οι θεωρούμενοι στόχοι θα πρέπει να έχουν επιτευχθεί. Συνήθως αυτή δεν οδηγεί σε παιδαγωγικές αποφάσεις επανάληψης της μιας ή της άλλης διδασκαλίας, εκτός από συνολικές αποφάσεις της "επανάληψης ολόκληρης της τάξης".

Παραδοσιακά, η αθροιστική αξιολόγηση στηρίζεται στις δοκιμασίες των εξετάσεων, γραπτών ή προφορικών, με ερωτήσεις που επιλέγονται τυχαία μέσα στο εύρος των συνολικών γνώσεων που περιέχονται τυπικά μέσα στο πρόγραμμα σπουδών.

Ο τελικός απολογισμός που γίνεται από το συμβούλιο των καθηγητών υποτίθεται ότι είναι αθροιστικός αν και συχνά βασίζεται σε εξετάσεις που γίνονται κατά τη διάρκεια της χρονιάς, με τις δυσκολίες που εμφανίζονται τότε να οδηγούν σε μια πρόβλεψη με χαρακτήρα αθροιστικό.

Γνωρίζει κανείς τις κακές επιπτώσεις της αθροιστικής αξιολόγησης, όταν λόγω του μεγάλου αριθμού μαθητών, αυτή πρέπει να στηριχθεί πάνω σε κάποιες γραπτές εξετάσεις, Στερεότυπα και βεβιασμένη προετοιμασία για τις εξετάσεις επιτρέπουν να αμφιβάλλουμε για την σημασία των εξετάσεων που υποτίθεται ότι κάνουν έναν απολογισμό των γνώσεων, ενώ οι συνθήκες των διαγωνισμάτων είναι μακριά από την πραγματικότητα. Αυτή η αμφιβολία ενισχύεται από την κριτική των σχετικών δοκιμίων, όπως την κάνει ο Maurice CHASTRETTE [52].

Ο ρόλος της αθροιστικής αξιολόγησης είναι ωστόσο σημαντικός και δεν τίθεται θέμα να εγκαταλειφθεί.

Τα διδακτικά μειονεκτήματα δεν μπορούν να αγνοηθούν, τόσο σε ότι αφορά την στρατηγική της διδασκαλίας που υιοθετείται από τον καθηγητή, όσο και σε ό,τι αφορά στην εργασία σύνθεσης και επανατοποθέτησης σε σειρά των απαιτούμενων από τον μαθητή γνώσεων.

Υπάρχουν και άλλες μορφές αθροιστικής αξιολόγησης εκτός από τα παραδοσιακά διαγωνίσματα.

Δεν είναι εξάλλου προφανές ότι το σύστημά μας είναι το πιο αποτελεσματικό, όσον αφορά το στόχο της εξακρίβωσης του συνόλου των γνώσεων και των ικανοτήτων ενός υποκειμένου.

Για παράδειγμα, τα ερωτηματολόγια πολλαπλής επιλογής όταν είναι καλά φτιαγμένα μπορούν να μας δώσουν την πληροφορία, με έναν τρόπο πιο ακριβή, πιο αξιόπιστο και με μικρότερο τίμημα.

Διάφοροι όροι χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν τις αποφάσεις που παίρνονται με βάση μια αθροιστική αξιολόγηση: στην περίπτωση απονομής ενός διπλώματος ή της πιστοποίησης των ικανοτήτων, μιλάει κανείς για *πιστοποιητική αξιολόγηση* (évaluation certificatrice), στην περίπτωση της αντιστοίχισης με μια λίστα γνώσεων (για παράδειγμα παραπεμπτικές), θα έχει μια *αξιολόγηση κριτηρίων* (évaluation critériée), στη σύγκριση με μια κλίμακα βασισμένη σε ένα πληθυσμό αναφοράς, μιλάει για *κανονιστική αξιολόγηση* (évaluation normative).

Η επιβεβαιωτική αξιολόγηση (évaluation répondante) λαμβάνει υπόψη την πραγματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού προγράμματος, τις απαιτήσεις των διάφορων μερών που εμπλέκονται και του συστήματος των αξιών τους με στόχο να βοηθήσουν ένα ή περισσότερους υπεύθυνους ν' αποφανθούν.

Η *διαγνωστική αξιολόγηση* (évaluation diagnostique) επιτρέπει να κάνει κανείς την ανάλυση μιας ενδεχόμενης δυσλειτουργίας στη διαδικασία της μάθησης και να καταφύγει σε μια διόρθωση ή *θεραπεία*. Το Γαλλικό Υπουργείο Παιδείας προέβη σε μια τέτοια ενέργεια στην αρχή της Α΄ Γυμνασίου το 1989 και 1990.

γ - προβλεπτική αξιολόγηση (évaluation prédictive)

Η απόφαση που πρέπει να προκύψει είναι να προβλεφθεί, με βάση τις κατάλληλες πληροφορίες, η μελλοντική επιτυχία ενός προσώπου μέσα σε μια σχολική ή επαγγελματική κατάσταση.

Αυτή η αξιολόγηση προϋποθέτει δυο όρους:

- Υπάρχει ένα μοντέλο επαρκώς αξιόπιστο που να επιτρέπει να συνδέουμε τις προβλέψεις της αξιολόγησης με κριτήρια μεταγενέστερης επιτυχίας.
- Οι όροι πάνω στους οποίους το μοντέλο έχει βασιστεί υλοποιούνται στη συγκεκριμένη κατάσταση όπου βρισκόμαστε.

Η απλή διατύπωση αυτών των στοιχειωδών όρων δείχνει την δυσκολία του εγχειρήματος και πόσο παρακινδυνευμένο θα ήταν να έχει κανείς πολύ μεγάλη εμπιστοσύνη σε μια τέτοια αξιολόγηση. Αν σ' ένα στατιστικό πλαίσιο μπορεί κανείς να εντοπίσει μερικές σταθερές (για παράδειγμα το να δώσεις δυο φορές το CP θα ήταν μια κακή πρόγνωση για την σχολική επιτυχία), η προβολή πάνω σε ατομικές περιπτώσεις δεν είναι έγκυρη. Οι αμφισβητήσεις περί του IQ αποτελούν ένα παράδειγμα. Θα μπορούσε κανείς να συμβουλευτεί σ' αυτό το θέμα τον Albert JACQUARD [55] ή τον Stephen JAY-GOULD [56].

Η αξιοποίηση των αποτελεσμάτων μιας αθροιστικής αξιολόγησης με στόχο την πρόγνωση είναι συνηθισμένη.

Η επιτυχία στο Baccalauréat επιτρέπει να προβλέψουμε την επιτυχία στην ανώτερη εκπαίδευση ; (Για το γεγονός αυτό έχουμε επιτυχή πρόβλεψη σε ποσοστό κάτω του 50%).

Η αποτυχία στο απολυτήριο του γυμνασίου είναι απαγορευτική για να συνεχίσει κανείς στο Λύκειο ;

Όταν η επιλογή κατεύθυνσης βασίζεται στα σχολικά αποτελέσματα (αυτός είναι ο κυριότερος κανόνας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση), δίνει ένα προβλεπτικό ρόλο σε μια αξιολόγηση παρουσιασμένη ως αθροιστική, αλλά που έχει πολύ συχνά βασιστεί πάνω σε καταστάσεις που θα προέκυπταν από μια διαμορφωτική αξιολόγηση.

Έτσι, ένας λίγο βαθυστόχαστος συλλογισμός πάνω στην αξιολόγηση, οδηγεί στην επανεξέταση της λειτουργίας της σχολικής αξιολόγησης.

Αναμφίβολα, υπάρχουν γεγονότα που μετριάζουν αυτή την παρατήρηση.

Σε γενικές γραμμές, το σχολικό σύστημα λειτουργεί (καλοί βαθμοί στις δύο τελευταίες τάξεις μπορούν να προβλέψουν ένα καλό αποτέλεσμα στο BAC).

Η εμπειρία που αποκτούν οι διδάσκοντες, οι ικανότητες τους για προσαρμογή σε πληθυσμούς μαθητών που διαρκώς αλλάζουν, η αντίληψη που έχουν για την ηθική του επαγγέλματός τους (κανείς δεν μεταχειρίζεται ένα μαθητή όπως ένα βιομηχανικό προϊόν) τους επιτρέπει γενικά να μετριάσουν τα κακά αποτελέσματα της αξιολόγησης...

Αλλά συχνά οι διδάσκοντες αυτοί αισθάνονται κάποια ανησυχία απέναντι σ' αυτό το καθήκον, που σίγουρα τους αναλογεί

Διότι δεν μπορεί να τεθεί θέμα εξάλειψης της αξιολόγησης από το εκπαιδευτικό σύστημα.

Η διδακτική σχέση χωρίς αυτό το παιχνίδι σίγουρα θα υπονομευόταν και οριακά δεν θα μπορούσε να υπάρξει, διότι αυτό θα υπέθετε ότι όλοι οι μαθητές έχουν τα κίνητρα να αποδεχθούν χωρίς ανταπόδοση τις απαραίτητες προσπάθειες για να αποκτήσουν όλες τις επιθυμητές γνώσεις.

Χωρίς αμφιβολία κάποιοι άλλοι θα αναλάμβαναν αυτή την αξιολόγηση, μέσα σε ανεξέλεγκτες προϋποθέσεις (μπορεί κανείς να φανταστεί το ρόλο της αστρολογίας ή της κρानιομετρίας που ήταν της μόδας στο τέλος του 19ου αιώνα, όπως υπογραμμίζει ο Stephen JAY - GOULD [56].

Διότι η αξιολόγηση, με όλες τις ατέλειές της, είναι μια ζωτική ανάγκη και για τον καθένα χωριστά και για την κοινωνία, που οφείλει να οργανώνει τις δικαιοδοσίες.

Προτεινόμενες εργασίες:

1. Άσκηση βαθμολόγησης των γραπτών των μαθητών: Βάλτε συλλογικά μια κλίμακα αξιολόγησης βασισμένη σε στόχους και βαθμολογείστε ατομικά. Συγκρίνετε τους βαθμούς που μπήκαν σε κάθε γραπτό και αναλύστε τις διαφορές.
2. (Για τους διδάσκοντες που συμμετέχουν σε σεμινάριο). Μέσα στην πρακτική της διδασκαλίας σας, κάνετε διάκριση μεταξύ διαμορφωτικής και αθροιστικής αξιολόγησης ; Αν ναι, ποια μέθοδο διαμορφωτικής αξιολόγησης χρησιμοποιείτε ; Τι σκέφτεστε για τα αποτελέσματα; Τι προβλήματα συναντήσατε με τους συναδέλφους, με το σχολείο ; Αν όχι, ποια είναι κατά την γνώμη σας τα εμπόδια που αντιτίθενται σε αυτή την διάκριση; Τι προτάσεις μπορείτε να κάνετε για να τα ξεπεράσετε;

Βιβλιογραφικές αναφορές

[10] Benjamin S. Bloom et al. : « Taxonomie des objectifs pédagogiques, domaines cognitifs et affectifs », les presses universitaires du Québec, 1979.

[11] Régis GRAS : « Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certains acquis cognitifs et de certains objectifs didactiques en mathématiques », thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1979.

[49] Antoine BODIN : « L'évaluation du savoir mathématique », Bulletin de l' APMEP n° 369, Avril 1989.

[50] Jean Marie BARBIER : « L'évaluation en formation », P.U.F, 1985.

[51] Gilbert DE LANDSHEERE : « Évaluation continue et examens. Précis de docimologie », ed. Labor, Bruxelles 1976.

[52] Maurice CHASTRETTE : « Démarches et outils de l'évaluation », IREM de Lyon, 1989.

[53] Jean Marie DE KETELE : « L'évaluation : approche descriptive ou prescriptive ? », ed. De Boeck, Bruxelles, 1986.

[54] Jean CARDINET : « Pour apprécier le travail des élèves », ed. De Boeck, Bruxelles, 1986.

[55] Albert JACQUARD : « Éloge de la différence, la génétique et les hommes », ed. Seuil, 1978.

[56] Stephen JAY GOULD : « La mal-mesure de l'Homme », ed. le livre de poche, 1986.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4. Τα βήματα της διαφοροποιητικής και της αθροιστικής αξιολόγησης για ένα μαθητή

ΑΞΙΟΛΟΓΩ ΓΙΑΤΙ ;	ΜΕ ΤΡΟΠΟ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΙΚΟ			ΜΕ ΤΡΟΠΟ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟ		
	Μόλις πριν Αρχική Δ.Α.	Κατά τη διάρκεια της μάθησης	Αμέσως μετά Στιγμιαία Δ.Α.	Δ.Α. σταδίου ενός	Μετά το τέλος της περιόδου επιμόρφωσης	Α.Α. εσωτερική εξωτερική
ΠΟΤΕ ;	Γνώσεις Να ξέρεις να το κάνεις, Συμπεριφορές Εξωτερικές συνθήκες απαραίτητες για τη μελέτη	Κατανόηση του έργου, Προσωπική ή ομαδική κινητοποίηση, Μέθοδος εργασίας Αναπαραστάσεις των μαθητών (λάθη, δυσκολίες, προόδος)	Καταστάσεις προσωπικές (ικανότητες, στάσεις, αποκλεισμοί), οικογενειακές, κοινωνικές, ιατρικές (πολιτιστικό πλαίσιο),	Απόκτηση των τελικών συμπεριφορών στις οποίες στόχευε ο δάσκαλος	Απόκτηση των απαιτούμενων για τις επόμενες επιμορφώσεις (περιεχόμενα της διδαχθείσας ύλης)	Να ξέρεις να κινείσαι μέσα στην κοινωνία (σε πραγματικές καταστάσεις)
ΤΙ ;	Διαδικασία χωρίς εργασία (παρατήρηση, συνδιάλεξη) με εργασία (τεστ γνώσεων, γρίλια παρατήρησης, αυτοαξιολόγησης)	Διαδικασία κυρίως χωρίς εργασία (ανάλυση σεναρίων, παρατήρηση ολικής συμπεριφοράς πολλαπλές πηγές πληροφορήσης, αυτοαξιολόγησης)	Καταστάσεις (ικανότητες, στάσεις, αποκλεισμοί), κοινωνικές, ιατρικές (πολιτιστικό πλαίσιο),	Χρήση της βοήθειας των διαθέσιμων πληροφοριών (ασκήσεις, φυλλάδια, γραπτές εργασίες)	Διαδικασία κυρίως με εργασία (ομαδικές εργασίες)	Εργασία που αναφέρονται στους τελικούς στόχους ενσωμάτωσης
ΠΩΣ ΝΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΩ (ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ)	Καθιέρωση ελάχιστων απαιτήσεων Έρευνα των στρατηγικών υποστηρίξιης Εκτίμηση της πιθανότητας να ξεκινήσω μια μελέτη	Διασθητική ερμηνεία της διαδικασίας της εκμάθησης Διαμόρφωση των υποθέσεων εργασίας για άμεση εξέταση	Αιτιολογημένη εξήγηση της δυσκολίας πάνω στη βάση του λιγότερο ή περισσότερο αντικειμενικών πληροφοριών	Υπολογισμός των ολικών σκορ της επιτυχίας Επλόγη ενός καλύτερου ορίου	Αναφορά σε κριτήρια ή νόρμες για να γίνει γνωστό αν ο στόχος έχει επιτευχθεί	Αναφορά κυρίως σε κριτήρια για να γίνει γνωστό αν ο στόχος έχει επιτευχθεί
ΠΩΣ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΩ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ (ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ)	Συνεχίζω την προβλεπόμενη διαδικασία Ζητώ από ένα μαθητή να βοηθήσει έναν άλλο	Επανεξήγώ Ζητώ να αυξήσω το κίνητρο Ζητώ από ένα μαθητή να βοηθήσει έναν άλλο	Προτείνω μια διαδικασία εκμάθησης χρησιμοποιώντας τα ισχυρά σημεία του μαθητή	Συνεχίζω τη διδασκαλία Ορίζω διορθωτικές ασκήσεις Τροποποιώ τον προγραμματισμό	Απονέμω (ή όχι) το δίπλωμα Βοηθώ τους μαθητές που δεν έχουν φτάσει στο σκοπό τους Ενημερώνω τους γονείς	Πιστοποιώ (ή όχι) την επάρκεια

ΓΛΩΣΣΑΡΙΟ

Μερικοί ορισμοί της διδακτικής

Η διδακτική των Μαθηματικών

«Η μελέτη των διαδικασιών μετάδοσης και απόκτησης διαφόρων περιεχομένων αυτής της επιστήμης (των μαθηματικών), ιδιαίτερα σε σχολικές και πανεπιστημιακές συνθήκες.

Προτίθεται να περιγράψει και να εξηγήσει τα σχετικά φαινόμενα της διδασκαλίας και της εκμάθησης. Δεν περιορίζεται στην αναζήτηση ενός καλού τρόπου διδασκαλίας μιας συγκεκριμένης έννοιας». (R. DOUADY)

Διδακτική μηχανική

«Είναι το σύνολο των εργασιών που καταλήγουν στη δημιουργία και στην υλοποίηση των διαδοχικών βημάτων της διδασκαλίας». (Y. CHEVALLARD)

Διδακτική μετατόπιση

Είναι η διαδικασία μέσω της οποίας ένα στοιχείο της επιστημονικής γνώσης γίνεται διδακτέα ύλη, διδακτικός στόχος και τέλος μια διδαγμένη γνώση. (βλ. Y. CHEVALLARD)

Διδακτική κατάσταση

«Είναι εκείνο το σύνολο των αναφορών που εγκαθίσταται ρητά ή υπόρρητα ανάμεσα σ' ένα μαθητή ή μια ομάδα μαθητών, ένα κάποιο μέσο (συμπεριλαμβάνοντας ενδεχομένως τα όργανα ή τα αντικείμενα) και ένα διδακτικό σύστημα (τον καθηγητή) με σκοπό να μεταδώσει στους μαθητές αυτούς μια θεσμοποιημένη γνώση». (G. BROUSSEAU)

Γνώση των μαθηματικών

«Δεν αρκεί μόνο το να μαθαίνεις ορισμούς και θεωρήματα για να αναγνωρίσεις τον τρόπο που θα τα χρησιμοποιήσεις και θα τα εφαρμόσεις. Το να κάνεις μαθηματικά περιλαμβάνει και την ενασχόληση με ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ». (G. BROUSSEAU)

Εννοιολογικό πεδίο

«Χώρος των προβλημάτων ή των καταστάσεων – προβλήματος των οποίων η διαχείριση περικλείει έννοιες και διαδικασίες πολλών τύπων σε στενή μεταξύ τους συνοχή". (G. VERGNAUD)

Κοινωνιο-γνωστική σύγκρουση

Είναι μια κατάσταση διάστασης μεταξύ δύο διδακτικών αντικειμένων. Αυτή η σύγκρουση που κάνει να συνυπάρχουν μέσα στην ίδια κατάσταση και στον ίδιο χρόνο δυο διαφορετικές απόψεις, μπορεί να δώσει με τη λύση της την ευκαιρία για μια ανακατασκευή της γνώσης που δεν θα συνέβαινε τόσο γρήγορα με άλλο τρόπο. (A. PERRET-CLERMONT)

Διδακτικό συμβόλαιο

«Είναι αυτό που καθορίζει, ρητά κατά ένα μέρος ή υπόρρητα ως επί το πλείστον, αυτό που κάθε μέλος της διδακτικής πράξης, (ο διδάσκων και ο διδασκόμενος), θα αναλάβει να διαχειριστεί και για το οποίο θα είναι, κατά τον ένα ή τον άλλο τρόπο, υπεύθυνος ενώπιον του άλλου". (G. BROUSSEAU)

Βιβλιογραφία

- [30] – Gilbert ARSAC: "La transposition didactique en mathématiques" dans ".La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie", cours de DEA, IREM de Lyon, 1989.
- [38] - Gilbert ARSAC, Gilles GERMAIN, Michel MANTE: "Problème ouvert et situation - problème" IREM de Lyon, 1988.
- [4] Michèle ARTIGUE: "Contribution a l'étude de la reproductibilité des situations didactiques", Thèse de doctorat, publiée par l'IREM de Paris VII.
- [23] - Michèle ARTIGUE: "Épistémologie et didactique" cahier de didirem no. 3, IREM de Paris 7, 1989.
- [24] - Jean Pierre ASTOLFI et Michel DEVELAY: "La didactique des Sciences Expérimentales" ed. PUF, col. "Que Sais-je?" no. 2448, 1989.
- [13] Gaston BACHELARD: "La formation de l'esprit scientifique", ed J. VRIN, 1965.
- [43] Nicolas BALACHEFF: "Le contrat et la coutume", actes du colloque franco-allemand de Luminy, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble 1987.
- [50] Jean Marie BARBIER : « L'évaluation en formation », P.U.F, 1985.
- [22]. Britt-Mari BARTH: L'Apprentissage de l'abstraction" Actualités des Sciences Humaines RETZ, 1987.
- [44] Stella BARUK: "L'âge du capitaine" ed. Seuil, 1985.
- [46] - Maurice BELANGER: "Les erreurs en arithmétique. Un siècle de présomption américaine", CIRADE, Université du Québec a MONTREAL, publie dans petit x, no 26, IREM de Grenoble, 1991.
- [10] Benjamin S. BLOOM et al. : "Taxonomie des objectifs pédagogiques, domaines cognitifs et affectifs" les presses universitaires du Québec, 1979.
- [49] Antoine BODIN : « L'évaluation du savoir mathématique », Bulletin de l' APMEP n° 369, Avril 1989.
- [20]. Françoise BOSCHET: "Un aperçu des travaux de VYGOTSKY" dans les cahiers de didactique no. 52, publiés par l'IREM de Paris VII, 1988.
- [45] Alain BOUVIER: "Le droit a l'erreur", dans "sans tambour ni trompette" n° I, bulletin de l'IREM de Lyon, 1989.
- [12] Guy BROUSSEAU: "Le contrat didactique: le milieu" RDM Vol. 9 no. 3.
- [14] Guy BROYSSEAU: "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques ": RDM Vol. 7 no. 2
- [25] - Guy BROUSSEAU: "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques" RDM Vol. 4 no. 2, 1983.
- [34] - Guy BROYSSEAU: " Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques" Thèse d'état, Université de Bordeaux I, 1986.
- [47] - Guy BROUSSEAU" "Problèmes de didactique des décimaux" RDM vol, 2I, 1981.
- [21]. Jérôme BRUNNER: "A study of thinking" ed. Wiley and sons, New York, 1956.

- [54] Jean CARDINET : « Pour apprécier le travail des élèves », ed. De Boeck, Bruxelles, 1986.
- [9] Bernard CHARLOT: "L'école en mutation" ed. Payot, 1987.
- [27] - Bernard CHARLOT: "Histoire de la réforme des "maths modernes"; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique" Bulletin ARMER NO, 352, février 1986.
- [28] - Bernard CHARLOT: "Qu'est-ce que faire des maths?" Bulletin ARMER No, 359, juin 1987.
- [52] Maurice CHASTRETTE : « Démarches et outils de l'évaluation », IREM de Lyon, 1989.
- [2] Yves CHEVALLARD et Marie- Alberte JOHSUA: "La transposition didactique", éditions de la Pensée Sauvage, ed. 1991.
- [3] Yves CHEVALLARD: "Sur l'Ingénierie didactique", publication de l'IREM d' Aix-Marseille, 1982.
- [26] - Yves CHEVALLARD: "Le concept de rapport au savoir- rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel" actes du séminaire didactique des mathématiques et de l'informatique, Grenoble, LSD-IMAG, Institut Fourier, 1988-1989.
- [29] - Yves CHEVALLARD: "Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique", actes de l'École d'Été de didactique de mathématiques, Plestin les grèves 1991 (à paraître) .
- [32] - Yves CHEVALLARD: "Les programmes et la transposition didactique: illusions, contraintes et possibles" Bulletin de L'ARMER no. 352, février 1986.
- [31] - Collectif: "Les programmes des collèges et des secondes", analyses et études thématiques: ARMER et IREM de Besançon.
- [53] Jean Marie DE KETELE : « L'évaluation : approche descriptive ou prescriptive ? », ed. De Boeck, Bruxelles, 1986.
- [1] Régine DOUADY: "De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle" dans les cahiers de didactique des mathématiques no. 6, IREM de Paris VII.
- [5] Régine DUADY: "Rapport enseignement- apprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadres": Les cahiers de didactique no. 3, IREM de Paris VII.
- [36] - Régine DOUADY: "Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques" Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 1984.
- [37] - Régine DOUADY: "Jeux de cadres et dialectique outil-objet" RDM vol. 7.2, 1986.
- [40] - M. C. GALAI, M. GERENTE, D. GRENIER, R. RIVOIRE: "analyse de deux situations - problèmes autour de la proportionnalité" petit X no. 22, éditée par l' IREM de Grenoble, 1990.
- [11] Régis GRAS: "Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certains acquis cognitifs et de certains objectifs didactiques en mathématiques", thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1979.
- [33] - GRECO de Didactique: "Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire" no, 74, diffuse par L'IREM et le LDPES de Paris VII, 1989.
- [39] - IREM des Pays de Loire: "l'enseignement des mathématiques par situations - problèmes au collège", diffuse par le centre du Mans en deux volumes, 1987.
- [55] Albert JACQUARD : « Éloge de la différence, la génétique et les hommes », ed. Seuil, 1978.
- [56] Stephen JAY GOULD : « La mal-mesure de l'Homme », ed. le livre de poche, 1986.

- [51] Gilbert DE LANDSHEERE : « Évaluation continue et examens. Précis de docimologie », ed. Labor, Bruxelles 1976.
- [35] - Marc LEGRAND : "Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe a une communauté scientifique" RDM. vol. 9.3., 1990
- [41] - Philippe Meirieu: "Guide méthodologique pour l'élaboration d'une situation- problème" dans "Apprendre .. oui, mais comment?", ed. E.S.F., article reproduit dans les Cahiers Pédagogiques no. 262, mars 1988.
- [17] . Jean PIAGET: "Six études de psychologie" ed. Denoël, 1964.
- [19]. Jean PIAGET: "Problèmes de psychologie génétique" et "Mes idées" ed. Denoël - Gonthier, 1983 et 1977.
- [42] - Georges POLYA: "Comment poser et résoudre un problème?" Traduction de "How to solve it?" (Dunod), réédite par les éditions Jacques GABAY, 1989.
- [8] Aline ROBERT et Jacqueline ROBINET: "Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement" Cahier de DIDIREM no. I, publié par l'IREM de Paris VII, 1989.
- [18]. Janine ROGALSKI: "Quelques éléments de théorie piagétienne et didactique des mathématiques": dans les cahiers de didactique des mathématiques no. 2, IREM de Paris 7
- [48] - Suzette ROUSSET-BERT: " Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths, en liaison avec certaines de leurs représentations" Petit x 25, IREM de Grenoble, 1990.
- [6] Gérard VERGNAUD: "La théorie des champs conceptuels": Recherches en Didactique des Mathématiques no. 6, 1991, Vol. no. 2,3.
- [7] Gérard VERGNAUD: "L'enfant les mathématiques et la réalité": ed. Peter Lang, Berne 1981.
- [16]. L.S. VYGOTSKY: "Thought and language" MIT Press, New York, 1962.
- [15]. Henry WALLON: De l'acte a la pensée" ed. Flammarion, 1970. "La vie mentale" ed. Sociales, 1982.

Μοντέλο επίλυσης Προβλήματος των Krulik και Rudnick

