



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

**Διδακτική Μαθηματικών Ι**

Ενδεικτικές οδηγίες για τη δραστηριότητα

Γιώργος Ψυχάρης

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικό

---

# Διδακτική Μαθηματικών Ι: Ενδεικτικές οδηγίες για τη δραστηριότητα (εργασία)

(Το παράδειγμα εδώ αναφέρεται στη μελέτη της συνάρτησης  $y=ax+\beta$ )

## 1. Τίτλος της δραστηριότητας

Συμφέρουσα επιλογή ενοικίασης αυτοκινήτου.

## 2. Ταυτότητα της δραστηριότητας

Συγγραφέας (είς).

Γνωστική περιοχή των μαθηματικών: Άλγεβρα.

Θέμα (τα). Η μελέτη της συνάρτησης  $y=ax+\beta$ .

**Βασική ιδέα.** Η παρούσα δραστηριότητα αφορά τη διδασκαλία της γραμμικής συνάρτησης  $y=ax+\beta$  μέσα από την επίλυση πραγματικών προβλημάτων μοντελοποίησης. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται ως μοντέλο προβλήματος η συμφέρουσα επιλογή εταιρείας ενοικίασης αυτοκινήτου ανάλογα με τις τιμές που προσφέρουν συγκεκριμένες εταιρείες.

## 3. Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα

Εδώ αναφέρονται στα γνωστικά-διδακτικά προβλήματα που αφορούν τη μελέτη της γραμμικής συνάρτησης  $y=ax+\beta$  με αναφορές στην υπάρχουσα έρευνα (π.χ. πορίσματα ερευνών από το χώρο της διδακτικής των μαθηματικών).

(Τα ζητήματα αυτά αναλύονται στο μάθημα).

## 4. Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται. Μαθητές Β΄ Γυμνασίου (13-14 ετών).

Χρόνος υλοποίησης. 2 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης. Οι μαθητές θα εργαστούν εξ' ολοκλήρου στην αίθουσα διδασκαλίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών:

Οι μαθητές θα πρέπει να:

- μπορούν να αναπαριστούν ζεύγη αριθμών σε ένα καρτεσιανό σύστημα.

- να γνωρίζουν πότε δύο ποσά είναι ανάλογα και ποια είναι η γραφική τους παράσταση

.....

(Συμπληρώστε με βάση το σχεδιασμό της δικής σας δραστηριότητας)

**Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία.** Οι μαθητές θα βασιστούν σε κατάλληλα σχεδιασμένα φύλλα εργασίας και θα χρησιμοποιήσουν τετραγωνισμένο χαρτί (μιλιμετρέ).

(Συμπληρώστε με βάση το σχεδιασμό της δικής σας δραστηριότητας)

**Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης.** Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες. Κάθε ομάδα μαθητών διερευνά τη λύση του προβλήματος με βάση τις οδηγίες του διδάσκοντα. Ο διδάσκων παρεμβαίνει ως σύμβουλος και συνεργάτης των παιδιών, προκαλεί και συντονίζει συζητήσεις (ολομέλειες) τάξης σε φάσεις της εφαρμογής της δραστηριότητας που ο ίδιος κρίνει ότι είναι σκόπιμη η επικοινωνία της εργασίας κάθε ομάδας με το σύνολο της τάξης.

(Συμπληρώστε με βάση το σχεδιασμό της δικής σας δραστηριότητας)

**Στόχοι της δραστηριότητας:** Από την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου, η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει ως στόχο να παρέχει στους μαθητές δυνατότητες:

- να συσχετίσουν ένα πραγματικό πρόβλημα με μαθηματικές έννοιες όπως η έννοια της μεταβλητής και της γραμμικής συναρτησιακής συσχέτισης μεταξύ μεταβλητών
- να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές έννοιες της μεταβλητής, της συσχέτισης μεταξύ μεταβλητών και της συμμεταβολής τους στην μελέτη πραγματικών προβλημάτων
- να κάνουν υποθέσεις για την μορφή των συναρτησιακών σχέσεων όπως και των γραφικών τους παραστάσεων
- να διερευνήσουν τις έννοιες της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής για την περιγραφή μιας συναρτησιακής σχέσης
- να εμπλακούν στη χρήση πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης (συμβολικής, γραφικής και σε μορφή πίνακα) των δεδομένων που αφορούν τη μεταβολή και τη συσχέτιση μεταβαλλόμενων μεγεθών
- να διερευνήσουν τις σχέσεις συμμεταβολής δύο ή περισσότερων μεταβαλλόμενων μεγεθών και να τις χρησιμοποιήσουν ως εργαλεία ανάλυσης για την περιγραφή της μεταβολής συγκεκριμένων μεγεθών (π.χ. του κόστους επιλογής συγκεκριμένης εταιρείας για την ενοικίαση αυτοκινήτου)
- να διερευνήσουν το ρόλο της αλλαγής κλίμακας στην αρίθμηση των αξόνων στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης
- να συζητήσουν πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αποτελείται από μεμονωμένα σημεία
- να εκτιμήσουν την πρακτική αξία των συναρτήσεων και των γραφημάτων.

(Συμπληρώστε με βάση το σχεδιασμό της δικής σας δραστηριότητας)

## **5. Ανάλυση της δραστηριότητας**

Η ενότητα αυτή αποτελεί τον κεντρικό άξονα της δραστηριότητας. Σε αυτή περιγράφεται ενδεικτικά η διαδικασία εφαρμογής της δραστηριότητας και η ανάλυση της αναμενόμενης διδακτικής και μαθησιακής πορείας. Θα αναφερθούν οι ενδεχόμενες απαντήσεις και δυσκολίες που αναμένεται να συναντήσουν οι μαθητές και ο τρόπος που αυτό θα αντιμετωπιστεί από το διδάσκοντα.

Ένας λειτουργικός τρόπος παρουσίασης της ανάλυσης είναι να δομηθεί με βάση διαφορετικές φάσεις εφαρμογής στις οποίες να δοθούν τα αντίστοιχα Φύλλα Εργασίας και με βάση αυτά να περιγραφεί η αναμενόμενη διδακτική και μαθησιακή πορεία. Από την ανάλυση θα πρέπει να γίνεται σαφής η 'λογική' του σχεδιασμού της δραστηριότητας σε όλες τις φάσεις της (π.χ. γιατί επιλέχθηκαν τα

συγκεκριμένα προβλήματα-ερωτήματα, γιατί επιλέχτηκε η αλληλουχία με την οποία δίνονται στους μαθητές κ.λπ).

## **Παράδειγμα**

### **Α΄ Φάση: Εισαγωγική**

Η φάση αυτή αφορά τη γενική περιγραφή του πλαισίου και των ζητημάτων που ανακύπτουν μέσα από τη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Προτείνεται ο διδάσκων να συζητήσει με τους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να γίνει η χρέωση μιας διαδρομής με αυτοκίνητο νοικιασμένο από μια εταιρεία. Οι μαθητές αναμένεται να συζητήσουν σχετικά με τη διαφοροποίηση των τιμών κόστους ανά εταιρεία και να αναφερθούν στους παράγοντες από τους οποίους μπορεί να εξαρτάται η επιλογή της μιας ή της άλλης για συγκεκριμένες μετακινήσεις.

### **Β΄ Φάση: Αναπαράσταση και επεξεργασία των δεδομένων**

Δίνεται στους μαθητές το παρακάτω Φύλλο Εργασίας 1.

#### ***Φύλλο Εργασίας 1***

Στη δραστηριότητα αυτή θα μελετήσουμε ποια επιλογή εταιρείας ενοικίασης αυτοκινήτου είναι συμφέρουσα όταν έχουμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε δύο εταιρείες.

Η πρώτη εταιρεία (Α) παίρνει για δικαιώματα ενοικίασης 9 ευρώ και χρεώνει 0,25 ευρώ κάθε χιλιόμετρο που διανύει το αυτοκίνητο. Η δεύτερη εταιρεία (Β) παίρνει για δικαιώματα ενοικίασης 5 ευρώ και χρεώνει 0.45 ευρώ κάθε χιλιόμετρο που διανύει το αυτοκίνητο.

Το ζητούμενο είναι ποια εταιρεία από τις δύο συμφέρει για την ενοικίαση αυτοκινήτου αν πρόκειται να διανύσουμε:

- 12 χιλιόμετρα
- 18 χιλιόμετρα
- 26 χιλιόμετρα
- 45 χιλιόμετρα
- 80 χιλιόμετρα

1. Να κατασκευάσετε ένα πίνακα τιμών για το κόστος μετακίνησης με αυτοκίνητο της εταιρείας Α. Στην πρώτη στήλη θα μπει ο αριθμός των χιλιομέτρων και στη δεύτερη το αντίστοιχο κόστος. Να γράψετε τουλάχιστον 8 ζεύγη.

2. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των ζευγών των αριθμητικών τιμών της πρώτης και της δεύτερης στήλης του πίνακα σε ένα σύστημα αξόνων. Τι παρατηρείτε για τα σημεία στο γράφημα; Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα δύο ποσά (χιλιόμετρα, κόστος); Μπορείτε να βρείτε μια σχέση που να συνδέει αυτά τα δύο ποσά;

3. Να κατασκευάσετε μια επιπλέον στήλη στον πίνακα που θα περιέχει το κόστος μετακίνησης με αυτοκίνητο της εταιρείας Β για τον αριθμό χιλιομέτρων που αναγράφονται στην πρώτη στήλη. Ποια σχέση συνδέει τις τιμές της πρώτης και της τρίτης στήλης;

4. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των ζευγών των αριθμητικών τιμών της πρώτης και της τρίτης στήλης του πίνακα. Μπορείτε να απαντήσετε στα αρχικά ερωτήματα;

Η Φάση Β περιλαμβάνει την αναπαράσταση των δεδομένων που σχετίζονται με το παραπάνω πρόβλημα και την περαιτέρω επεξεργασία τους.

**Ενδεικτική ανάλυση της αναμενόμενης μαθησιακής-διδασκτικής πορείας με βάση κάποια από τα παραπάνω ερωτήματα:**

- Ερώτηση 2. *Γραφική παράσταση των ζευγών των αριθμητικών τιμών χιλιομέτρων-κόστους ανά εταιρεία σε ένα σύστημα αξόνων.* Εδώ αναμένεται, για παράδειγμα, να έρθει στην επιφάνεια η έννοια της μονάδας σε ένα σύστημα αξόνων και το μέγεθος της που μπορεί να διαφέρει σε κάθε άξονα ανάλογα με τα μεγέθη που αναπαριστά. Ο διδάσκων ευνοεί τον πειραματισμό των μαθητών με διαφορετικές επιλογές μονάδων και συζητά μαζί τους τα ενδεχόμενα ζητήματα (π.χ. αναπαράστασης) που ανακύπτουν ανάλογα με το μέγεθος της εκάστοτε επιλεγόμενης μονάδας. Επίσης, στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές αναμένεται να αναγνωρίσουν ότι τα σημεία που αφορούν τα δεδομένα της πρώτης εταιρείας βρίσκονται σε ευθεία.

- Ερώτηση 3. *Συμβολισμός των εμπλεκόμενων μεγεθών.* Εδώ μπορεί να υπάρξουν ομάδες που θα επιλέξουν αρχικά λεκτική περιγραφή κάθε μεγέθους στον πίνακα. Η διαδικασία αυτή αναμένεται να λάβει περισσότερο αλγεβρικό χαρακτήρα όταν οι μαθητές θα επιχειρήσουν να εκφράσουν με σύμβολα τις αντίστοιχες συναρτησιακές σχέσεις.

- Ερώτηση 4. *Τομή ευθειών.* Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές αναμένεται να κατασκευάσουν την ευθεία που ενώνει τα αντίστοιχα σημεία που αφορούν τις τιμές αναφορικά με τη δεύτερη εταιρεία. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να δοθεί έμφαση στη συζήτηση αναφορικά με τη μαθηματική σημασία του σημείου τομής των δύο γραφημάτων, καθώς επίσης και στο τι αντιπροσωπεύει το σημείο αυτό στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

**(Συμπληρώστε κι άλλες φάσεις και αντίστοιχες δράσεις των μαθητών –αλλά και του διδάσκοντα- με βάση το σχεδιασμό της δικής σας δραστηριότητας. Η παραπάνω διαδικασία περιγραφής είναι ενδεικτική.)**

## **5. Επέκταση της δραστηριότητας.**

Στην παράγραφο θα αναφερθούν προτάσεις για τη μελλοντική αξιοποίηση της δραστηριότητας στο πλαίσιο ενός μαθήματος σε πραγματικές σχολικές συνθήκες, την περαιτέρω επέκτασή της, τη χρήση υπολογιστικών εργαλείων κ.λπ.

## **6. Βιβλιογραφία.**

Εδώ θα αναφερθούν οι βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν.

# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Γιώργος Ψυχάρης 2015. Γιώργος Ψυχάρης. «Διδακτική Μαθηματικών Ι. Ενδεικτικές οδηγίες για τη δραστηριότητα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH307>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

