

## ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αθανάσιος Γαγάτσης, Άρτεμις Λοΐζου, Μαρία Στυλιανού, Σταυρινή Τόφαρου  
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

*Η συμπεριφορά των μαθητών στα μαθηματικά προκύπτει από νόρμες, που δημιουργούνται με το χρόνο και ριζώνονται από τη δύναμη της συνήθειας. Στην παρούσα συνθετική εργασία παρουσιάζονται έρευνες σχετικές με την επίδραση του διδακτικού συμβολαίου από την προδημοτική μέχρι τη μέση εκπαίδευση. Η αρνητική επίδραση του διδακτικού συμβολαίου αρχίζει στο δημοτικό σχολείο και είναι έντονη στα μη συνηθισμένα προβλήματα, ενώ στο γυμνάσιο και λύκειο το διδακτικό συμβόλαιο επιδρά και στα προβλήματα ρουτίνας. Ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο ρόλος των εκπαιδευτικών στη διαμόρφωση κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος με στόχο την επιτυχή ρήξη του διδακτικού συμβολαίου, καθώς μέσω αυτής επιτυγχάνεται η μάθηση στα μαθηματικά..*

### 1. Έννοιες και μέθοδοι της Διδακτικής των Μαθηματικών

Ο τομέας της Διδακτικής των Μαθηματικών σχετίζεται με πολλούς επιστημονικούς κλάδους, όπως οι Επιστήμες της Αγωγής, η Ψυχολογία, η Γλωσσολογία, η Κοινωνιολογία κ.ά., με αποτέλεσμα να δανείζεται πολλές από τις μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί στα πλαίσια τους, όπως οι κλινικές παρατηρήσεις, οι συνεντεύξεις και τα ερωτηματολόγια. Ως ξεχωριστός κλάδος όμως έχει αναπτύξει και άλλες θεωρητικές μεθόδους και έννοιες, οι οποίες αφορούν την ίδια τη φύση και ιδιαιτερότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών (Γαγάτσης, 1992). Κρίνεται απαραίτητο να παρουσιαστούν εν συντομία στην παρούσα εργασία αφού το «διδακτικό συμβόλαιο» αποτελεί μια από αυτές τις μεθόδους.

Η «διδακτική μεταφορά», την οποία ερευνήσε κυρίως ο Yves Chevallard, είναι μια μέθοδος της Διδακτικής των Μαθηματικών που αφορά τη διαδικασία μετασχηματισμού της επιστημονικής γνώσης σε αντικείμενο διδασκαλίας. Ο Chevallard (1991) αναφέρει ότι το αντικείμενο επιστημονικής γνώσης, για να καταστεί κατάλληλο ως αντικείμενο διδασκαλίας, υφίσταται μια σειρά από μετασχηματισμούς προσαρμογής, οι οποίοι δεν προσδιορίζονται μόνο από τη μαθηματική κοινότητα, αλλά επηρεάζονται από ένα πλέγμα αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στους διδάσκοντες, τους κοινωνικούς παράγοντες, τις πολιτικές επιλογές και τους γονείς.

Ο Brousseau (1981) ασχολήθηκε στο ερευνητικό του έργο με τη «θεωρία διδακτικών καταστάσεων», η οποία εκφράζει τις συνθήκες γένεσης των μαθηματικών γνώσεων στα πλαίσια της διδασκαλίας. Η διδακτική κατάσταση ορίζεται ως ένα σύνολο σχέσεων ανάμεσα στο διδάσκοντα και το διδασκόμενο, στο οποίο μπορούμε να διακρίνουμε ένα κοινωνικού χαρακτήρα σχέδιο, που αποσκοπεί στην εκμάθηση μιας γνώσης από το διδασκόμενο. Ο διδάσκοντας πρέπει να ακολουθήσει δύο βήματα, όπου το πρώτο είναι η επιλογή της μαθηματικής έννοιας και των κατάλληλων μαθηματικών

δραστηριοτήτων και η πρόβλεψη της συμπεριφοράς των μαθητών. Το δεύτερο βήμα είναι ο πειραματισμός πάνω σε μια σειρά δραστηριοτήτων και η παρατήρηση των φαινομένων της τάξης, ώστε να διαπιστωθεί αν οι συμπεριφορές των μαθητών είναι σύμφωνες με τις προβλέψεις που προηγήθηκαν.

Η δημιουργία «καταστάσεων ενεργοποίησης και επικοινωνίας των μαθητών» αποτελεί μια άλλη μέθοδο της Διδακτικής των Μαθηματικών, η οποία αναφέρεται στην ακριβή ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών και τον προσδιορισμό των αντιλήψεών τους. Για να καταστεί αυτό δυνατό οι μαθητές εργάζονται ομαδικά στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, ώστε να υπάρχει γραπτή ή προφορική επικοινωνία μεταξύ τους, η οποία θα αποτελέσει το αντικείμενο της ανάλυσης.

Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη Διδακτική των Μαθηματικών συνετέλεσε στη γένεση της τέταρτης μεθόδου, η οποία μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε εμπόδια που αντιτίθενται στην κατανόηση και μάθηση στα μαθηματικά. Οι ιστορικές και επιστημολογικές έρευνες εντοπίζουν τα εμπόδια στα μαθηματικά κείμενα περασμένων εποχών και συμπληρώνουν τις πειραματικές μεθόδους, οι οποίες εντοπίζουν λάθη και εμπόδια στα σημερινά γραπτά των μαθητών. Αποδεικνύεται ότι μαθηματικές έννοιες που δυσκόλεψαν για αιώνες μεγάλους μαθηματικούς της αρχαιότητας, όπως οι δεκαδικοί (Brousseau, 1980), τα όρια (Cornu, 1980: Sierpinski, 1985) και οι σχετικοί αριθμοί (Glaeser, 1981), προκαλούν δυσκολίες και σήμερα στα παιδιά (Γαγάτσης, 1992, σελ. 23).

Τα εμπόδια στη μάθηση των μαθηματικών τα οποία αναφέρθηκαν πιο πάνω αποτέλεσαν αντικείμενο διαμάχης ανάμεσα σε ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ο Bachelard (1983) το πρωτοανέφερε ως «επιστημολογικό εμπόδιο», ο Glaeser (1981) πιο απλοϊκά ως εμπόδιο, δυσκολία ή σύμπτωμα, ενώ ο Brousseau (1983) επαναφέρει τον όρο «επιστημολογικό εμπόδιο» και του προσδίδει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Πρόκειται για μια γνώση που λειτουργεί μόνο σε ένα σύνολο καταστάσεων και μόνο για ορισμένες τιμές των μεταβλητών αυτών των καταστάσεων, ενώ στην προσπάθεια των μαθητών να εφαρμόσουν αυτή τη γνώση σε άλλες καταστάσεις ή με άλλες τιμές των μεταβλητών, προκαλούνται λάθη. Το επιστημολογικό εμπόδιο αποτελεί μια σταθερή γνώση και η απόρριψη της στοιχίζει στους μαθητές περισσότερο από μια προσπάθεια προσαρμογής της σε καταστάσεις που ξεφεύγουν από το πεδίο εγκυρότητάς της. Τέλος, ο Brousseau (1983) αναφέρει ότι το επιστημολογικό εμπόδιο μπορεί να ξεπεραστεί μόνο σε ειδικές καταστάσεις απόρριψης, τις διδακτικές καταστάσεις, και αυτή η απόρριψη είναι συστατικό στοιχείο της νέας γνώσης (Γαγάτσης, 1992, σελ. 23-25).

Στα πλαίσια της προσπάθειας ερμηνείας των λαθών και της συμπεριφοράς των παιδιών, η Διδακτική των Μαθηματικών ανέπτυξε και την έννοια του «διδακτικού συμβολαίου», το οποίο ορίζεται ως ένα σιωπηρό και περιοριστικό είδος συμφωνίας ανάμεσα στο διδάσκοντα, το μαθητή και το γνωστικό αντικείμενο, πρόβλημα, άσκηση ή μαθηματική έννοια, και διακανονίζει τις μεταξύ τους σχέσεις. Ο Brousseau (1984) αναφέρει:

...Μέσα από τις επαναλαμβανόμενες διαπραγματεύσεις ανάμεσα στο δάσκαλο και τους μαθητές καθορίζονται οι ρόλοι του καθενός, οι υποχρεώσεις και οι σχέσεις δύναμης. Ο καθηγητής σέβεται το συμβόλαιο κάνοντας μάθημα και δίνοντας

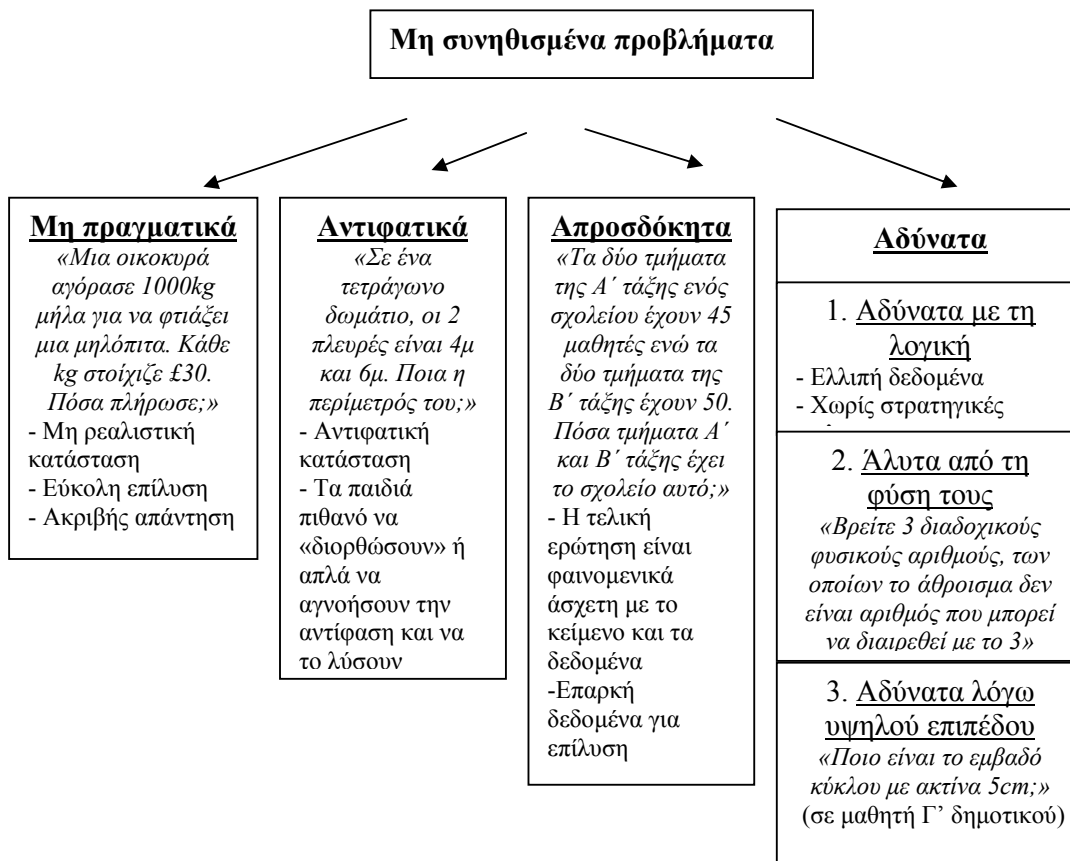
ασκήσεις. Προσπαθεί να κάνει τους μαθητές να μάθουν αυτό που θέλει, αυτό που πρέπει. Είναι αυτός που τα ξέρει όλα και οδηγεί τους μαθητές στο να παράγουν την απάντησή τους χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους. Ο μαθητής σέβεται το συμβόλαιο αν κάνει τις ασκήσεις, αν κάνει το μάθημά του. Προσπαθεί να καταλάβει αυτό που θέλει ο καθηγητής, να δώσει τις αναμενόμενες απαντήσεις.  
(Γαγάτσης, 1992, σελ. 17).

Πρόκειται για μια υπονοούμενη πεποίθηση που κατασκευάζεται με το χρόνο και την επανάληψη στα πλαίσια της σχολικής πρακτικής. Αποτελεί ένα πολύ ισχυρό, σιωπηλό συμβόλαιο και εφαρμόζεται από το μαθητή ακόμα και σε καταστάσεις που η χρήση του είναι ακατάλληλη. Η γένεση του πραγματοποιήθηκε το 1980 όταν 76 από τους 97 μαθητές σε ένα δημοτικό σχολείο της Γαλλίας, έδωσαν απάντηση στο πρόβλημα «Πάνω σε ένα καράβι υπήρχαν 26 πρόβατα και 10 κατσίκια. Ποια είναι η ηλικία του καπετάνιου;» (Γαγάτσης 1992), συνδυάζοντας τα αριθμητικά δεδομένα. Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών δεν αποδέχτηκαν ότι αυτός ο «παραλογισμός» οφείλεται σε έλλειψη γνώσεων ή στοιχειώδους ορθολογισμού, αλλά ακριβώς σε αυτό που αργότερα ονόμασαν «διδακτικό συμβόλαιο». Όπως αναφέρει ο Brousseau (1984) «...Η μάθηση στηρίζεται όχι πάνω στη σωστή λειτουργία του συμβολαίου, αλλά στην επιτυχή ρήξη του...». Στο επόμενο κεφάλαιο της εργασίας, θα γίνει λεπτομερέστερη αναφορά στην εφαρμογή του διδακτικού συμβολαίου σε συγκεκριμένες καταστάσεις της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος.

## **2. Επίλυση Προβλήματος και Διδακτικό Συμβόλαιο**

Μελετώντας το διδακτικό συμβόλαιο που τηρούν οι μαθητές ως προς την επίλυση προβλημάτων, ο Brousseau (1981) διαπίστωσε ότι τα σχολικά προβλήματα με τα οποία έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές, έχουν κοινά χαρακτηριστικά τόσο ως προς την παρουσίασή τους, όσο και ως προς τη διαδικασία επίλυσής τους. Όπως αναφέρουν οι D' Amore, Franchini, Gabellini, Mancini, Masi, Matteucci, Pascucci, & Sandri (1996), στα τυπικά σχολικά προβλήματα περιγράφεται το πλαίσιο και δίνονται μερικά αριθμητικά δεδομένα και μια σαφής ερώτηση η οποία δημιουργεί την προβληματική κατάσταση. Επιπλέον δίνονται στους μαθητές προβλήματα με την αναπόφευκτη απαίτηση για λύση. Ο Brousseau (1981) προσθέτει ότι τα τυπικά σχολικά προβλήματα επιδέχονται μια και μόνο απάντηση η οποία προκύπτει μετά από κατάλληλη χρήση και συνδυασμό όλων των προτεινόμενων δεδομένων με βάση τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις ή τη μέθοδο των τριών. Η επανάληψη των πιο πάνω φαινομένων κατά τη διδασκαλία διαμορφώνει τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση τυπικών σχολικών προβλημάτων. Με άλλα λόγια οι μαθητές τηρούν τους κανόνες του διδακτικού συμβολαίου παρουσιάζοντας κοινές συμπεριφορές στην επίλυση των προβλημάτων.

Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που παρουσιάζονται στους μαθητές μη συνηθισμένα προβλήματα; Οι D' Amore και Sandri (1994a) αναφέρονται σε μια κατάταξη των μη συνηθισμένων προβλημάτων η οποία θα μπορούσε να βοηθήσει στην εκτίμηση της συμπεριφοράς των μαθητών σε διάφορες ηλικίες. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρονται σε 4 κατηγορίες προβλημάτων, οι οποίες φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



Οι Verschaffel, Greer, & De Corte (2000) προτείνουν μια άλλη κατηγοριοποίηση και διακρίνουν τα συνηθισμένα από τα προβληματικά προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα αναφέρουν παραδείγματα προβληματικών προβλημάτων τα οποία ταξινομούν σε τρεις υποκατηγορίες:

(α) εκδοχές προβλημάτων της «ηλικίας του καπετάνιου», π.χ. «Ένα πλοίο ταξιδεύει στον ωκεανό. Έφυγε από τη Βοστώνη μεταφέροντας ένα φορτίο μάλλινων υφασμάτων. Ζυγίζει 200 τόνους. ... Υπάρχουν 12 επιβάτες πάνω στο πλοίο και η ώρα είναι τρεις και 15 το απόγευμα. Ο μήνας είναι Μάης. Ποια είναι η ηλικία του καπετάνιου;»

(β) προβλήματα διαίρεσης με υπόλοιπο, π.χ. «Ένα στρατιωτικό λεωφορείο μεταφέρει 36 στρατιώτες. Αν κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης των στρατιωτών πρέπει να μεταφερθούν 1128 στρατιώτες, τότε πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν;»

(γ) ψευδοαναλογικά προβλήματα, π.χ. «Αν το ύψος ενός 10χρονου αγοριού είναι 1 μέτρο και 40 εκατοστόμετρα, τότε ποιο θα είναι το ύψος του όταν θα γίνει 20 χρονών;»

Στην παρούσα εργασία, όλα τα πιο πάνω είδη προβλημάτων θα αναφέρονται ως «μη συνηθισμένα προβλήματα».

### 3. Προδημοτική Εκπαίδευση και Διδακτικό Συμβόλαιο

Οι μελέτες για το διδακτικό συμβόλαιο δείχνουν ότι η συμπεριφορά των μαθητών στην τάξη προκύπτει από νόρμες, που δημιουργούνται με το χρόνο και ριζώνονται από τη δύναμη της συνήθειας. Πότε όμως αρχίζει η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου; Απάντηση στο ερώτημα αυτό επιδίωξαν να δώσουν οι Baldisseri, D' Amore, Fascinelli, Fiori, Gastaldelli & Golinelli (1994) με την παρουσίαση του ακόλουθου αριθμητικού προβλήματος σε 47 παιδιά προσχολικής ηλικίας: «Η Γκρέτα έλαβε έξι μπαλόνια. Τα δύο ξεφούσκωσαν. Πόσα μπαλόνια έχει η Γκρέτα;». Το πρόβλημα αυτό ήταν αρκετά περίπλοκο σε αριθμητικό επίπεδο, τυπικά σχολικό, αλλά αρκετά πλούσιο σε δυναμικές ανακλήσεις για να προκαλέσει συγκινησιακές αντιδράσεις. Σκοπός της έρευνας ήταν να διαπιστωθεί αν η προσοχή των παιδιών θα επικεντρωνόταν στις μαθηματικές έννοιες του προβλήματος ή στις αφηγηματικές έννοιες και αν θα ένιωθαν πίεση να βρουν οπωσδήποτε ένα αποτέλεσμα.

Διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά του δείγματος ηλικίας 5-6 ετών ήταν ικανά να λύσουν επιτυχώς προβλήματα με μια αριθμητική πράξη και εντοπίστηκαν τέσσερις διαφορετικοί τρόποι απαντήσεων. Υπήρχαν παιδιά που ζωγράφισαν μόνο τα μπαλόνια (σημειωτικές απαντήσεις), παιδιά που ζωγράφισαν την Γκρέτα και τα μπαλόνια δίνοντας έτσι περισσότερες πληροφορίες από την απάντηση (σημειογραφικές απαντήσεις), παιδιά που έγραψαν μόνο έναν αριθμό (συμβολική απάντηση) και άλλα που έδωσαν σημειογραφικές και συμβολικές απαντήσεις. Όπως ήταν αναμενόμενο, μόνο 6 από τα 47 παιδιά χρησιμοποίησαν ένα γραφικό σύμβολο για να εκφράσουν έναν αριθμό και από αυτά, τα μισά «συμπλήρωσαν» το σύμβολο με ένα σχέδιο. Μάλιστα τα παιδιά που αυθόρμητα έδωσαν συμβολική απάντηση προσπαθούσαν να την επιβεβαιώσουν μέσα από τη συμπεριφορά της εκπαιδευτικού και των άλλων παιδιών.

Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε η έρευνα αυτή είναι ότι στα παιδιά της προσχολικής ηλικίας δεν παρουσιάζεται η τάση για αριθμητική λύση ούτε υπάρχει η πίεση για ένα αριθμητικό αποτέλεσμα «πάση θυσία». Η προσοχή των παιδιών επικεντρώνεται στη συγκινησιακή και αφηγηματική πλευρά της κατάστασης. Η έρευνα των D' Amore et al (1994) επιβεβαίωσε ότι το αρνητικό διδακτικό συμβόλαιο είναι απών στην προσχολική ηλικία και η επίδραση του αρχίζει από την είσοδο στο δημοτικό σχολείο. Φαίνεται όμως να υπάρχει κάποιο είδος συμφωνίας μεταξύ παιδιών και εκπαιδευτικού που προβλέπει ότι ο εκπαιδευτικός ζητά πάντα μια ζωγραφισμένη απάντηση.

### 4. Δημοτική Εκπαίδευση και Διδακτικό Συμβόλαιο

Οι συζητήσεις και οι έρευνες για το διδακτικό συμβόλαιο και την επίδρασή του στη μάθηση των μαθηματικών άρχισαν μετά την απάντηση που έδωσαν μαθητές δημοτικού στο μη ρεαλιστικό πρόβλημα της ηλικίας του καπετάνιου. Η δομή του προβλήματος αυτού είναι η ίδια με την τυπική δομή προβλήματος πρόσθεσης. Η μη λογική συμπεριφορά των μαθητών εξηγείται από το συμβόλαιο που έχουν σιωπηλά «υπογράψει» με το δάσκαλο και το οποίο προνοεί ότι οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να δίνουν απάντηση σε κάθε πρόβλημα που τους παρουσιάζεται, κάνοντας χρήση των αριθμητικών δεδομένων του προβλήματος. Αυτή η συμπεριφορά προκύπτει από την

πεποίθηση ότι ένα πρόβλημα που δίνεται από τον εκπαιδευτικό, πάντα σημαίνει κάτι και πάντα έχει λύση (Γαγάτσης & Μάρκου, 2004).

Το φαινόμενο του διδακτικού συμβολαίου είναι ιδιαίτερα έκδηλο όταν τα άτομα έχουν να αντιμετωπίσουν όχι τυπικά σχολικά προβλήματα αλλά μη συνηθισμένα. Σειρά ερευνών που διενεργήθηκαν τα τελευταία χρόνια μελέτησαν τον τρόπο που απαντούν τα παιδιά όταν έρχονται αντιμέτωπα με προβλήματα αυτού του είδους. Τα πορίσματα έδειξαν ότι οι μαθητές λύνουν τα μη συνηθισμένα προβλήματα με ένα στερεότυπο, μηχανικό, ασυνείδητο και μη ρεαλιστικό τρόπο, ως αποτέλεσμα της τήρησης των όρων του διδακτικού συμβολαίου (Verschaffel, Greer, & DeCorte, 2000: Greer, 1997).

Η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου επιβεβαιώθηκε και σε έρευνα των D' Amore, Franchini, Gabellini, Mancini, Masi, Matteucci, Pascucci, & Sandri (1996) σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών στην οικοδόμηση νοητικών μοντέλων κατά την ανάγνωση ενός λεκτικού προβλήματος. Ειδικότερα η έρευνα επικεντρώθηκε στη νοητική και γλωσσική επεξεργασία που κάνουν οι μαθητές, μεταξύ της ανάγνωσης του κειμένου και της επεξεργασίας μιας στρατηγικής επίλυσης του προβλήματος. Το δείγμα αποτέλεσαν μαθητές 7-12 χρονών, οι οποίοι κλήθηκαν, μέσω συζήτησης, να επαναδιατυπώσουν το ακόλουθο πρόβλημα: «Σε 4 μέρες μια τετραμελής οικογένεια καταναλώνει 6 λίτρα γάλα. Πόσα λίτρα γάλα θα καταναλώσει σε 1 μήνα;». Παρόλο που δεν είχε ζητηθεί από τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα, οι μαθητές νιώθοντας πίεση να προτείνουν λύσεις επικεντρώθηκαν αρχικά στην εύρεση της απάντησης. Συγκεκριμένα είτε ρωτούσαν ποια είναι η απάντηση ή εισηγούνταν μια πράξη για εύρεση της απάντησης ή έδιναν οι ίδιοι μια απάντηση κάνοντας μια πράξη με τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος. Χαρακτηριστική είναι η ακόλουθη δήλωση ενός μαθητή: «Είναι δύσκολο να καταλάβουμε την πράξη». Η συμπεριφορά αυτή παρατηρήθηκε σε παιδιά τόσο Β' όσο και Δ' τάξης. Συγκεκριμένα οι μαθητές Δ' τάξης προσπαθούσαν περισσότερο επίμονα να λύσουν το πρόβλημα και κατά τη συζήτηση τροποποίησαν τα δεδομένα για να καταλήξουν πιο εύκολα και γρήγορα στην απάντηση. Αυτή η επιμονή των παιδιών για εύρεση της απάντησης σχετίζεται με έναν κανόνα του διδακτικού συμβολαίου που αναφέρει ότι κάθε πρόβλημα έχει τη λύση του.

Η τάση των παιδιών να δίνουν απάντηση σε κάθε πρόβλημα διαπιστώθηκε επίσης σε έρευνα του D' Amore (1997) με μαθητές Ε' και Στ' τάξης. Η έρευνα αυτή εξέτασε αν η παρουσία ψευδολέξης σε ένα τυπικό σχολικό πρόβλημα θα καθιστούσε αδύνατη τη δημιουργία λεπτομερούς νοερής εικόνας για την κατάσταση του προβλήματος και κατ' επέκταση θα μείωνε το ποσοστό των ορθών λύσεων. Δόθηκαν δύο όμοια τυπικά σχολικά προβλήματα, με τη διαφορά ότι το ένα από τα δύο προβλήματα περιλάμβανε μια ψευδολέξη (portello αντί pencil). Κάθε τάξη είχε χωριστεί σε δυο ομάδες και κάθε ομάδα είχε ασχοληθεί με ένα από τα δυο προβλήματα.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι τα ποσοστά επιτυχίας για κάθε ομάδα ήταν περίπου τα ίδια. Επομένως η παρουσίαση ενός τυπικού σχολικού προβλήματος το οποίο περιλάμβανε ψευδολέξη δεν αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος, αφού κάθε μαθητής είχε ερμηνεύσει με το δικό του τρόπο την ανύπαρκτη λέξη και είχε επικεντρωθεί στη γενική ιδέα του προβλήματος. Αξιοσημείωτο είναι ότι η συμπεριφορά αυτή παρατηρήθηκε σε μαθητές τόσο Ε' όσο και Στ' τάξης. Χαρακτηριστική είναι η δήλωση ενός μαθητή κατά τη συνέντευξη: «Δεν είναι σημαντικό να καταλαβαίνεις. Το

σημαντικό είναι να λύσεις το πρόβλημα». Ο D' Amore (1997) καταλήγει ότι οι μαθητές υπακούουν στον εξής κανόνα του διδακτικού συμβολαίου: «*Αν ο δάσκαλος δώσει ένα πρόβλημα, πρέπει να σημαίνει κάτι και πρέπει να μπορεί να λυθεί*». Με άλλα λόγια οι μαθητές, σεβόμενοι το διδακτικό συμβόλαιο, προσπαθούν να δώσουν τις αναμενόμενες απαντήσεις, επιδεικνύοντας έτσι τη συμπεριφορά που θεωρούν ότι αναμένει ο δάσκαλος. Αυτό είναι εμφανές στα σχόλια ενός μαθητή μόλις πληροφορήθηκε ότι δεν υπήρχε λύση για ένα αδύνατο πρόβλημα που του παρουσιάστηκε: «*Μα δεν είναι δίκαιο. Όταν ένα πρόβλημα είναι αδύνατο, ο δάσκαλός μας μας το λέει. Έτσι έπρεπε να είχατε κάνει*».

Μια άλλη περίπτωση επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου που αναφέρεται στη βιβλιογραφία είναι η σχέση της εκτίμησης της απάντησης και του αποτελέσματος. Σε έρευνα των D'Amore et al. (1996) μαθητές Γ΄ τάξης κλήθηκαν να λύσουν ένα πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Παρόλο που αρχικά είχαν κατανοήσει την αντιστρόφως ανάλογη σχέση κάνοντας ορθές εκτιμήσεις της απάντησης, όταν προχώρησαν στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος αντιμετώπισαν το πρόβλημα ως πρόβλημα αναλογίας. Μάλιστα μετά την επίλυση του προβλήματος δεν παρατήρησαν την ασυμφωνία μεταξύ του αναμενόμενου αποτελέσματος και της λύσης που έδωσαν. Σύμφωνα με τους D' Amore et al. (1996) οι μαθητές δείχνουν τυφλή εμπιστοσύνη στο αποτέλεσμα που προκύπτει από υπολογισμούς.

Με βάση τα αποτελέσματα των ερευνών που έχουν αναφερθεί σχετικά με την επίδραση του διδακτικού συμβολαίου στη Δημοτική εκπαίδευση, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι «υποχρεώνει» τους μαθητές να δίνουν απάντηση σε κάθε πρόβλημα που τους παρουσιάζεται αγνοώντας το πλαίσιο του προβλήματος. Βέβαια η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου είναι πιο έντονη όταν δε χρησιμοποιούνται προβλήματα ρουτίνας εξαιτίας της ασυνέπειας μεταξύ των σωστών απαντήσεων και των απαντήσεων που θεωρούν οι μαθητές ότι αναμένει ο εκπαιδευτικός.

## 5. Μέση εκπαίδευση και Διδακτικό Συμβόλαιο

Η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου, όχι μόνο δεν ελαττώνεται καθώς οι μαθητές ανεβαίνουν τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, αλλά, σύμφωνα με τις έρευνες που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο, εξακολουθεί να είναι καταλυτική. Οι απαντήσεις που έδωσαν μαθητές γυμνασίου και λυκείου επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από το διδακτικό συμβόλαιο, τόσο σε προβλήματα ρουτίνας όσο και σε μη συνηθισμένα.

Οι Cassani, D' Amore, Deleonardi και Girotti (1996) εξέτασαν την πιθανότητα επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου στη γεωμετρία μελετώντας τη συμπεριφορά μαθητών κατά την παρουσίαση ενός μη συνηθισμένου προβλήματος σε αντίθεση με ένα ανάλογο πρόβλημα ρουτίνας. Το μη συνηθισμένο πρόβλημα αφορούσε τον υπολογισμό του όγκου μιας πραγματικής πυραμίδας και ανατέθηκε σε μαθητές ηλικίας 13-14 ετών οι οποίοι είχαν διδαχθεί συστηματικά την εύρεση όγκου της πυραμίδας στο χαρτί με χρήση τύπων και μπορούσαν να λύσουν επιτυχώς παρόμοια προβλήματα.

Στο γραπτό πρόβλημα ρουτίνας ήταν δεδομένη η πλευρά της βάσης και η παράπλευρη ακμή της πυραμίδας και ποσοστό 90,8% των μαθητών το έλυσαν με επιτυχία, εφαρμόζοντας μια γνωστή διαδικασία και κάνοντας δύο φορές χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος. Όταν παρουσιάστηκε στους μαθητές η ασυνήθιστη

περίπτωση του προβλήματος που αφορούσε την εύρεση του όγκου μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με βάση ομοίωμά της (συμπαγής πυραμίδα ή/και πυραμίδα με μεταλλικό σκελετό), παρουσιάστηκε μεγάλη μείωση του ποσοστού των μαθητών που παρουσίασαν επιτυχία (40%). Παρόλο που οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους χάρακα και μολύβι για να λύσουν το πρόβλημα, ποσοστό 20% απέτυχε να τα χρησιμοποιήσει σωστά και ζητούσε επανειλημμένα τα «δεδομένα». Μερικοί μαθητές απέρριψαν ως λανθασμένη τη μέτρηση του ύψους της συμπαγούς πυραμίδας με το χάρακα, γιατί δεν ήταν δυνατό να δώσει ακριβή μέτρηση, επηρεασμένοι από το γεγονός ότι πάντα έβρισκαν μια ακριβή απάντηση βάσει των γραπτών δεδομένων. Στην ίδια έρευνα δόθηκε σε μαθητές το μη συνηθισμένο πρόβλημα χωρίς χάρακα και μολύβι για να διερευνηθεί κατά πόσο η επαφή τους με μια πραγματική πυραμίδα θα τους ωθούσε να σκεφτούν εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού του όγκου της. Από τους μαθητές αυτούς, κανένας δεν πρότεινε στρατηγικές για την εύρεση του όγκου και μόνο ποσοστό 33% ζήτησε χάρακα για να εργαστεί.

Τα αποτελέσματα της πιο πάνω έρευνας υποδηλώνουν ότι για πολλούς μαθητές δεν υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στο πρόβλημα ρουτίνας και την ασυνήθιστη κατάσταση της συμπαγούς πυραμίδας. Οι μαθητές επέδειξαν μεγάλο δισταγμό στην πρόκληση να εργαστούν με την πραγματική πυραμίδα και αυτό επειδή αυτή η κατάσταση δεν αποτελούσε μέρος της διδακτικής ρουτίνας, η οποία είναι συνδεδεμένη με γραπτά δεδομένα. Η δυσκολία απομάκρυνσης από διαδικασίες ρουτίνας σε «ασυνήθιστες καταστάσεις» θέτει τους μαθητές σε ένα εχθρικό, άβολο και αβέβαιο πλαίσιο εργασίας, αφού δεν εντάσσεται στα πλαίσια του διδακτικού συμβολαίου και τους οδηγεί σε αποτυχία.

Μια δεύτερη ενότητα, η οποία μελετάται διεξοδικά στη βιβλιογραφία είναι η τριγωνομετρία. Ο Bagni (1997) μελέτησε την επίδοση μαθητών 16-19 ετών στην επίλυση τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Τα σημαντικότερα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές, επηρεασμένοι από τον γνωστό τριγωνομετρικό πίνακα που δίνεται στη διδασκαλία της τριγωνομετρίας και στον οποίο αναφέρονται οι τιμές των  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\epsilon\phi x$  για διάφορες τιμές του  $\pi$ , θεωρούν ότι δεν υπάρχει απάντηση για τιμές που δεν βρίσκονται στον πίνακα. Έτσι, όταν τους δοθεί άσκηση που δεν παρουσιάζεται στον πίνακα, όπως «Βρείτε  $x \in \mathbb{R}$ , ώστε  $\eta\mu x = 1/3$ », καταφεύγουν σε άλλους τρόπους επίλυσης των συναρτήσεων, όπως να απαντούν ότι πρόκειται για αδύνατη εξίσωση, να δίνουν απάντηση βασισμένη στην εκτίμηση σύμφωνα με τις κοντινότερες τιμές που βρίσκονται στον πίνακα ή να συσχετίζουν λανθασμένα τις τιμές, π.χ στην άσκηση  $\sigma\upsilon\nu x = \pi/2$ , πολλοί μαθητές απαντούν ότι  $x=0$ , αντιστρέφοντας το γνωστό δεδομένο του πίνακα  $\sigma\upsilon\nu(\pi/2)=0$ . Ένα άλλο συχνό φαινόμενο που παρατηρείται, στην προσπάθεια των μαθητών να λύσουν πάση θυσία την άσκηση, είναι η λανθασμένη επέκταση γνωστών κανόνων σε άλλες καταστάσεις, π.χ. αναφέρουν ότι αφού  $\eta\mu x \leq 1$  και  $\sigma\upsilon\nu x \leq 1$ , τότε και  $\epsilon\phi x \leq 1$ .

Σε άλλη έρευνα του Bagni (1996), δόθηκε στους μαθητές μια κάρτα Α στην οποία παρουσιαζόταν η διαδικασία επίλυσης μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης με την εφαρμογή κάποιων γνωστών κανόνων. Στη συνέχεια οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν μια άλλη τριγωνομετρική εξίσωση, που παρουσιαζόταν στην κάρτα Β. Παρατηρήθηκε ότι μεγάλο ποσοστό των μαθητών λανθασμένα αντέδρασαν όμοια με τον τρόπο



επίλυσης που παρουσιάστηκε στην κάρτα Α, εφαρμόζοντας τους ίδιους κανόνες, χωρίς να ελέγξουν την εφαρμοσιμότητα τους στη δεδομένη περίπτωση. Συγκεκριμένα 63% των μαθητών που έδωσαν λάθος απάντηση στην κάρτα Β, δήλωσαν ότι είδαν πρώτα την κάρτα Α. Κάποιοι μαθητές ανέφεραν ότι αφού τους δόθηκε η κάρτα Α και μετά η Β θα έπρεπε να υπήρχε κάποιος λόγος και αυτός ήταν ο υποτιθέμενος όμοιος τρόπος λύσης τους.

Σε μια άλλη περίπτωση επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου στην τριγωνομετρία (Bagni, 1996), οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, όπου στην Α δόθηκε μια κάρτα με δύο ασκήσεις υπολογισμού τριγωνομετρικών εξισώσεων, οι οποίες ήταν αδύνατες, και μια άσκηση σχεδιασμού γραφικής παράστασης, ενώ στην ομάδα Β δόθηκε η ίδια κάρτα, αλλά με υπενθύμιση κάποιων γνωστών τριγωνομετρικών κανονισμών. Παρά την υπόθεση του ερευνητή, ότι οι επιπρόσθετες πληροφορίες θα βοηθούσαν τους μαθητές της ομάδας Β να αντεπεξέλθουν με μεγαλύτερη επιτυχία στις αδύνατες ασκήσεις, οι μαθητές θεωρώντας τις πολύ εύκολες δεν αξιοποίησαν τις δοσμένες πληροφορίες και σε κάποιες περιπτώσεις είχαν χαμηλότερα αποτελέσματα από την ομάδα Α.

Ο Bagni (1996) εξέτασε με ένα τεστ τη διαδικασία μάθησης των άρρητων ανισώσεων β' βαθμού από μαθητές Γ' λυκείου. Το τεστ περιλάμβανε 6 ασκήσεις, 3 από τις οποίες λύνονταν με τη χρήση των σχετικών κανόνων και τύπων που γνώριζαν ήδη οι μαθητές (1<sup>η</sup> ομάδα) και 3 που δεν απαιτούσαν τη χρήση κανόνων για να λυθούν (2<sup>η</sup> ομάδα). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας στα έργα της πρώτης ομάδας (76% έναντι 63%). Παρά το γεγονός ότι οι ασκήσεις της δεύτερης ομάδας ήταν πολύ απλές, 58% των μαθητών χρησιμοποίησαν κανόνες για να τις λύσουν, αλλά μόνο το 36% κατέληξε σε ορθές απαντήσεις. Οι υπόλοιποι μαθητές που τις έλυσαν ορθά (27%), το έκαναν χωρίς τη χρήση των κανόνων.

Συνηθισμένο λάθος των μαθητών ήταν να θεωρούν ότι η ανίσωση  $\sqrt{x} \geq 0$  έχει λύσεις για όλους τους πραγματικούς αριθμούς «ξεχνώντας», όπως ανέφεραν χαρακτηριστικά, «ότι το υπόριζο πρέπει να είναι θετικός αριθμός». Λανθασμένη επίσης ήταν η πρακτική μερικών μαθητών να προσπαθούν να βρουν λύσεις στην ανίσωση  $\sqrt{x} \leq -1$ , υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, αφού «γνώριζαν ότι  $(-1)^2 = 1$ ». Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν ότι η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου στους μαθητές είναι αξιοσημείωτη, αφού αρκετοί εφαρμόζαν πάντα ασυνείδητα τους τυπικούς κανόνες που τους έδωσε ο καθηγητής τους, χωρίς να αξιολογούν κάθε φορά το έργο που τους δίνεται.

Ένα άλλο θέμα που εξετάζεται στη βιβλιογραφία, σχετικά με την επίδραση του διδακτικού συμβολαίου στη μέση εκπαίδευση είναι οι γραμμικές συναρτήσεις και οι αλγεβρικές εξισώσεις (Bagni, 1996). Όπως αναφέρει ο Bagni (1996) οι μαθητές, κυρίως όταν έρχονται σε πρώτη επαφή με τις συναρτήσεις, τείνουν κάθε φορά που αναφέρεται η έννοια συνάρτηση, να φέρνουν στο μυαλό τους τη γραμμική σχέση. Έτσι συναντούμε συχνά λάθη όπως:  $(a \pm b) = a^2 \pm b^2$ ,  $\sin(a \pm b) = \sin a \pm \sin b$ ,  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3$  και  $\log_e(a \pm b) = \log_e a \pm \log_e b$ .

Οι μαθητές γνωρίζουν φυσικά ότι σχέσεις όπως  $x \rightarrow x^2$ ,  $x \rightarrow \sin x$  και  $x \rightarrow \log_e x$ , δεν είναι γραμμικές, αλλά διαδικαστικά, δηλαδή κατά την εφαρμογή τους σε ασκήσεις, τις

αντιμετωπίζουν ως τέτοιες. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση μιας μαθήτριας 17 ετών, η οποία ενώ γνώριζε ορθά ότι  $e^{a+b}=e^a \cdot e^b$  και όχι  $e^{a+b}=e^a+e^b$ , θεωρούσε ότι  $\sqrt{a^4+9}=a^2+3$ . Είναι προφανές ότι η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου, φαίνεται μόνο στην περίπτωση εφαρμογής του τύπου στην επίλυση της άσκησης και όχι στη γνώση του ίδιου του τύπου ο οποίος δεν υπόκειται στη διαδικασία της διδασκαλίας. Επομένως παρατηρείται και πάλι το φαινόμενο της λανθασμένης επέκτασης γνωστών κανόνων όταν δεν υπάρχουν άλλοι κατάλληλοι για να λυθεί μια άσκηση. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και σε άλλα θέματα των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα τα όρια, η τριγωνομετρία και η άλγεβρα και πιθανό να οφείλεται, στην ίδια τη φύση της άλγεβρας, η οποία παρουσιάζεται ως «διαδικασία γενίκευσης». Για παράδειγμα γενικεύουμε αριθμητικές πράξεις με κάποιες αλγεβρικές διαδικασίες και αυτή η αντικατάσταση της αριθμητικής από την άλγεβρα, είναι κάποιες φορές «πηγή εμποδίων» (Bagni, 1996).

Οι Bagni και Cecchini (2001) σε μια προσπάθειά τους να εντοπίσουν εμπόδια και αντιδράσεις των μαθητών ηλικίας 15-19 ετών αναφορικά με την έννοια των πιθανοτήτων, χορήγησαν ένα δοκίμιο με οκτώ προβλήματα σε 30 μαθητές λυκείου, πριν και μετά από μια σύντομη σειρά εισαγωγικών μαθημάτων στις πιθανότητες. Οι απαντήσεις των μαθητών σε μερικά από αυτά ήταν συνεπείς με τους όρους του διδακτικού συμβολαίου. Πιο συγκεκριμένα δύο προβλήματα του δοκιμίου περιέγραφαν μια πιθανολογική κατάσταση, έδιναν δηλώσεις παιδιών που αναφέρονταν στην πιθανότητα του αποτελέσματός της και στο τέλος παρουσίαζαν το πραγματικό αποτέλεσμα της κατάστασης. Στους μαθητές δίνονταν οι επιλογές «Σωστό – Λάθος» για κάθε δήλωση, αλλά παραλείφθηκε σε ορισμένες περιπτώσεις η σωστή επιλογή «δεν έχει αποδειχθεί ούτε αν η δήλωση είναι ορθή, ούτε αν είναι λάθος». Οι μαθητές επηρεασμένοι από την καθημερινή εκπαιδευτική πρακτική, δεν αποδέχθηκαν την πιθανότητα να μην τους έχει δοθεί ως επιλογή η σωστή απάντηση στο πρόβλημα. Αν και οι απαντήσεις τους φανέρωσαν κάποια αβεβαιότητα και διστακτικότητα, η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου τους έκανε να δώσουν απάντηση, με αποτέλεσμα να οδηγηθούν σε λάθη.

Σε ένα άλλο πρόβλημα της ίδιας έρευνας, οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο περιπτώσεις που περιγράφονταν, για τις οποίες υπήρχε η δήλωση ότι «σύμφωνα με την άποψη των ειδικών, οι πιθανότητες τους να συμβούν είναι ίσες». Η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου έκανε τους μαθητές να εκλάβουν διαφορετικά το πρόβλημα και να επιλέξουν μια από τις δύο περιπτώσεις, αγνοώντας το γεγονός της ίσης πιθανότητας των περιπτώσεων, αν και γινόταν σχετική αναφορά στην περιγραφή του προβλήματος.

Οι D' Amore και Sandri (1994b) αναφέρουν μιαν άλλη διάσταση της αρνητικής επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου σε σχέση με τη γλώσσα, λαμβάνοντας υπόψη ότι η καθημερινή γλώσσα δεν ταυτίζεται με τη γλώσσα που χρησιμοποιείται όταν κάποιος μιλά για τα μαθηματικά. Οι μαθητές όταν μιλούν για τα μαθηματικά χρησιμοποιούν μια πολύ ειδική γλώσσα μιμούμενοι τον εκπαιδευτικό, αφού βάσει διδακτικού συμβολαίου, η επιλογή του περιεχομένου και της μεθοδολογίας εναπόκειται μόνο σε αυτόν. Όταν ένας μαθητής κληθεί να μιλήσει για τα μαθηματικά, είναι δυνατό να συγκεντρώσει όλη του την προσοχή στην προσπάθεια να προσαρμόσει τη γλώσσα και τη συμπεριφορά του

στις αντιληπτές ή πραγματικές προσδοκίες του εκπαιδευτικού, με αποτέλεσμα να εκφράσει τελικά τις ιδέες του τροποποιημένες.

Με σκοπό να διερευνηθεί αν είναι δυνατό να δημιουργηθούν κατάλληλες συνθήκες χρήσης της καθημερινής γλώσσας ακόμη και για μαθηματικά θέματα, οι D' Amore και Sandri (1994b) ζήτησαν από μαθητές ηλικίας 12-13 ετών να τοποθετήσουν τον εαυτό τους στη θέση ενός ενήλικα, ώστε να αποπλαισιωθούν από τη σχολική τάξη. Χρησιμοποιήθηκαν πέντε διαφορετικά κείμενα προβλημάτων στα οποία οι μαθητές καλούνταν να «φανταστούν ότι είναι πωλητές, δάσκαλοι σε δημοτικό σχολείο, σχεδιαστές, εργάτες σιδηροδρόμου και πατέρας ή μητέρα». Παρά το σχεδιασμό αυτό της έρευνας, πολλοί μαθητές δεν έκαναν χρήση της καθημερινής γλώσσας και δεν απελευθέρωσαν τους εαυτούς τους από τις γλωσσολογικές συνθήκες της διδακτικής πρακτικής, προβάλλοντας την έντονη επίδραση των όρων του διδακτικού συμβολαίου. Εντούτοις, οι μαθητές που αποδέχτηκαν το ρόλο που τους ανατέθηκε, έδειξαν ότι είναι και πιθανό και νόμιμο να χρησιμοποιείται η καθημερινή γλώσσα με πειστικό τρόπο όταν κάποιος μιλά για μαθηματικά. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της Simona, η οποία απορρίπτοντας το σύνηθες διδακτικό συμβόλαιο έπαιξε με επιτυχία το ρόλο της μητέρας που εξηγεί στο γιο της τι σημαίνει ύψος τριγώνου, βρίσκοντας την κατάλληλη γλώσσα που θα ταίριαζε σε ένα νεαρό παιδί. Επίσης προσπάθησε να βρει ένα κατάλληλο μοντέλο για την κατάσταση εξηγώντας «Γιε μου, [...] όπως εσύ, ο μπαμπάς και εγώ έχουμε ύψος που μετριέται από το κεφάλι στα πόδια, έτσι και τα τρίγωνα έχουν, αλλά το δικό τους μετριέται από την κορυφή, που είναι μια μικρή κουκίδα, ως τη βάση, που είναι σαν τα πόδια μας...». Το πιο πάνω απόσπασμα δείχνει ότι η επαναπλαισίωση πραγματοποιήθηκε επιτυχώς και ότι η ρήξη του διδακτικού συμβολαίου είναι ολική.

## **6. Συμπεράσματα**

Μέσα από τη μελέτη των πιο πάνω ερευνών, μπορούμε να προβούμε σε μια σύνοψη των τρόπων επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου στις απαντήσεις των μαθητών από την προδημοτική μέχρι και τη μέση εκπαίδευση, ανεξάρτητα από το διδασκόμενο θέμα.. Η αρνητική επίδραση του διδακτικού συμβολαίου αρχίζει στο δημοτικό σχολείο και είναι έντονη στα μη συνηθισμένα προβλήματα, ενώ στο γυμνάσιο και στο λύκειο το διδακτικό συμβόλαιο επιδρά και στα προβλήματα ρουτίνας.

Γενικά το διδακτικό συμβόλαιο δημιουργεί στερεότυπες αντιλήψεις στους μαθητές σχετικά με την επίλυση μαθηματικών έργων. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές πιστεύουν ότι δεν υπάρχουν έργα που δεν μπορούν να λυθούν και άρα λανθασμένα δημιουργούν νέους κανονισμούς ή επεκτείνουν και γενικεύουν τους γνωστούς, για να οδηγηθούν σε λύση. Σε περίπτωση που δεν καταλήξουν σε μια λύση, μια άλλη μέθοδος είναι να σκεφτούν τι μπορεί να αναμένει ο δάσκαλος και να λύσουν το έργο σύμφωνα με τις προσδοκίες ή τα προαναφερθέντα παραδείγματά του. Επικρατεί δηλαδή η τάση μηχανικής εφαρμογής κανόνων και τύπων που δίνονται από το δάσκαλο, αγνοώντας τη φύση του έργου. Έτσι δημιουργείται μια δυσκολία μεταφοράς των διαδικασιών και γνώσεων από μια συνηθισμένη μαθηματική κατάσταση σε μια ασυνήθιστη. Για παράδειγμα θεωρούν ότι ένα πρόβλημα χωρίς γραπτά δεδομένα δεν μπορεί να λυθεί με οποιοδήποτε άλλο τρόπο γιατί τότε η απάντησή του δεν θα είναι ακριβής.

Μερικές φορές οι μαθητές χαρακτηρίζουν ως αδύνατες τις ασκήσεις που δεν λύνονται σύμφωνα με τους «προφανείς» κανονισμούς. Όμως αυτή η νέα πρόταση του «αδύνατου» μιας άσκησης, κάποιες φορές τείνει να αντικαταστήσει την γνωστή πρόταση του διδακτικού συμβολαίου ότι κάθε άσκηση έχει λύση, με επικίνδυνες συνέπειες παρεκτροπής στο διαμετρικά αντίθετο άκρο. Μια άλλη αντίληψη που έχουν οι μαθητές είναι ότι μια άσκηση δεν μπορεί να είναι «πολύ απλή», γιατί τότε δεν υπάρχει νόημα στην προσπάθεια επίλυσης της, αλλά αντίθετα πρέπει να είναι ενδιαφέρουσα και κάπως δύσκολη για να θεωρείται άσκηση. Το διδακτικό συμβόλαιο μπορεί επίσης να εξηγήσει τη μίμηση της μαθηματικής γλώσσας του εκπαιδευτικού από τους μαθητές, φαινόμενο το οποίο εμποδίζει την εξωτερίκευση των αυθεντικών ιδεών των μαθητών.

## 7. Εισηγήσεις

Ένας από τους «όρους» του διδακτικού συμβολαίου που καθόρισε τη συμπεριφορά των μαθητών στις έρευνες που παρουσιάστηκαν, είναι η συνεχής ενασχόληση με τυπικά σχολικά προβλήματα, τα οποία πάντα υπάγονταν σε μια σταθερή δομή, απαιτούσαν μια σωστή και ολοκληρωμένη απάντηση μέσω του κατάλληλου συνδυασμού των δεδομένων τους ή της χρήσης σταθερών κανόνων που δίνονται από το δάσκαλο και δεν περιλάμβαναν οποιουδήποτε τύπου «παγίδες». Η έλλειψη επανειλημμένης πρακτικής άσκησης με μη συνηθισμένα προβλήματα ή προβλήματα που συνδέονται με την εμπειρία, οδηγεί συχνά τους μαθητές σε μηχανική επίλυση, αφού δεν τα μελετούν με προσοχή, δεν εκτιμούν και δεν αξιολογούν τις απαντήσεις τους, δείχνοντας τυφλή εμπιστοσύνη στην εφαρμογή τυπικών μαθηματικών υπολογισμών.

Οι μαθητές γνωρίζουν ότι χρησιμοποιώντας μια γνωστή διαδικασία με την οποία έλυσαν παρόμοια σχολικά προβλήματα ή υιοθετώντας τους τύπους και κανόνες που τους έδωσε ο δάσκαλός τους, μπορούν να λύσουν πολλές ασκήσεις. Για αυτό συχνά τους αποστηθίζουν και τους εφαρμόζουν ακόμη και σε περιπτώσεις που δεν είναι αναγκαία η εφαρμογή τους, πιστεύοντας ότι έτσι θα ευχαριστήσουν τον δάσκαλό τους και θα εξασφαλίσουν μια πιο θετική αξιολόγηση των γραπτών τους (Brousseau, 1987). Στις περιπτώσεις αυτές που παρατηρείται έντονη η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου στα έργα των μαθητών, ο ρόλος του εκπαιδευτικού κρίνεται καθοριστικός. Οι κανόνες και οι τύποι δίνονται για να διευκολυνθούν οι μαθητές στη λύση ασκήσεων, αλλά πολλές φορές ο ίδιος ο καθηγητής συνειδητά ή μη, ωθεί τους μαθητές, ιδιαίτερα τους αδύνατους, στη χρήση τους ως εύκολη διέξοδο για επίλυση πληθώρας σχολικών ασκήσεων, καλλιεργώντας τους έτσι τη ψευδαίσθηση ότι είναι πάντοτε αναγκαίο να ανατρέχουν σε αυτούς.

Με σκοπό να μειωθεί η επίδραση των όρων αυτών του διδακτικού συμβολαίου ο δάσκαλος χρειάζεται να εισάγει στη διδασκαλία του μη συνηθισμένα προβλήματα και να αφιερώσει χρόνο για συζήτηση σε αυτά, ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν ότι σκοπός της μαθηματικής διδασκαλίας δεν είναι η απομνημόνευση και η εκτέλεση τύπων και διαδικασιών αλλά η εφαρμογή των καινούριων γνώσεων σε νέες καταστάσεις. Αυτό θα τους βοηθήσει να ανατρέψουν την αντίληψή τους ότι δεν υπάρχουν αδύνατα προβλήματα καθώς και να ξεφύγουν από την τάση να προσπαθούν

με οποιοδήποτε τρόπο να τροποποιήσουν τα δεδομένα ενός προβλήματος ή να επεκτείνουν λανθασμένα τους δοσμένους κανόνες απλά για να δώσουν μια απάντηση.

Ιδιαίτερα σημαντικό είναι να παρουσιάζονται απροσδόκητα τα μη συνηθισμένα προβλήματα ώστε να αντιληφθούν οι μαθητές ότι πρέπει να διαβάζουν και να κατανοούν, να επιλέγουν ανάμεσα σε πληροφορίες και όχι μόνο να ψάχνουν να βρουν κάποια λέξη-κλειδί που θα τους οδηγήσει στη λύση ή στην πράξη για να βρουν τη λύση. Η παρουσίαση προβλημάτων χωρίς γραπτά δεδομένα και η παρακίνηση των μαθητών να εντοπίσουν τα δεδομένα που χρειάζονται για την επίλυση με άλλο τρόπο, έστω και χωρίς μεγάλη ακρίβεια, θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν ότι ο ακριβής υπολογισμός δεν είναι πάντοτε απαραίτητος, αλλά στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα ισχύει και εφαρμόζεται η μέτρηση κατά προσέγγιση.

Σημαντικός είναι επίσης ο ρόλος της παρουσίασης παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, ώστε οι μαθητές να διαπιστώνουν τη σύγκρουση των λανθασμένων τους απαντήσεων με τις εκτιμήσεις ή ιδέες τους. Δεν είναι όμως πάντα θετική η παρουσίασή τους, καθώς το διδακτικό συμβόλαιο πιθανό να παρακινήσει τους μαθητές να χαρακτηρίσουν ένα πρόβλημα «αδύνατο» σε περιπτώσεις που δεν είναι, χωρίς να προβούν στον απαραίτητο έλεγχο (Bagni, 2001). Επιπλέον, οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν την πιθανότητα ύπαρξης διαφορετικών επιπέδων δυσκολίας στις ασκήσεις, ώστε να αποδεχτούν και την ύπαρξη εύκολων ασκήσεων.

Ιδιαίτερα σημαντική είναι επομένως η συνειδητοποίηση της επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου από τους εκπαιδευτικούς ώστε να διαμορφώσουν κατάλληλα τις αλληλεπιδράσεις τους με τους μαθητές σε σχέση με τη γνώση. Στόχος τους πρέπει να είναι η ρήξη του διδακτικού συμβολαίου, καθώς μέσω αυτής επιτυγχάνεται η μάθηση των μαθηματικών.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Bachelard, G. (1983). *La formation de l' esprit scientifique*. Paris: Vrin.
- Bagni, G. T. (1996). Irrational inequations: Learning and didactical contract. In A. Gagatsis (Ed.), *Didactics and history of mathematics* (p. 133-140). Thessaloniki: ERASMUS
- Bagni, G. T. (1997). Trigonometric functions: Learning and didactical contract. In A. Gagatsis (Ed.), *Didactics of mathematics – Technology in education* (p. 3-10). Thessaloniki: ERASMUS.
- Bagni, G. T. (2001). An investigation of some misconceptions in high school students' mistakes. In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in mathematics and science an educational technology* (p. 3-24). Nicosia: ERASMUS IP1
- Bagni, G. T. (2001). Some "impossible" problems in High School students' behaviour. In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in mathematics and science an educational technology* (p. 45-66). Nicosia: ERASMUS IP1

- Bagni, G. T., & Cecchini, C. (2001). A first approach to elementary Probability: an experimental educational research. In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in mathematics and science an educational technology* (25-44). Nicosia: ERASMUS IP1
- Baldisseri, F., D' Amore, B., Fascinelli, E., Fiori, M., Gastaldelli, B., & Golinelli, P. (1994). Τα μπαλόνια της Γκρέτα. Στον Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική των μαθηματικών* (σ. 239-246). Θεσσαλονίκη: ERASMUS
- Brousseau, G. (1980). Problèmes de l' enseignement des décimaux. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1(1), 11-59.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37-127.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164-198.
- Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In: Steiner et al., *Theory of mathematics education, occasional paper 54*, Bielefeld, IDM, 110-119.
- Brousseau, G. (1987). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, "Études en didactique des Mathématiques", Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux.
- Cassani, A., D'Amore, B., Deleonardi, C., & Girotti, G. (1996). Routine problems and "unusual" situations. The "case" of the volume of a pyramid. In A. Gagatsis (Ed.), *Didactics and history of mathematics* (p. 73-82). Thessaloniki: ERASMUS
- Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactique, avec un exemple de la Transposition Didactique de Y. Chevallard et M.-A. Johsua*. Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Cornu, B. (1980). Interférence des modèles spontanés dans l' apprentissage de la notion de limite. In: *Cahiers du Seminaire de Didactique des Mathématiques et de l' Informatique*, 8, 57-83.
- D' Amore, B., & Sandri, P.(1994a). Μια κατάταξη των προβλημάτων που θεωρούνται αδύνατα. Στον Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική των μαθηματικών* (σ.247–252). Θεσσαλονίκη: ERASMUS
- D' Amore, B., & Sandri, P. (1994b). Η καθημερινή γλώσσα και "εξωτερικά" μοντέλα σε μια α-διδασκτική κατάσταση. Στον Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική των μαθηματικών* (σ. 253-262). Θεσσαλονίκη: ERASMUS
- D' Amore, B., Franchini, D., Gabellini, G., Mancini, M., Masi, F., Matteucci, A., Pascucci, N., & Sandri, P. (1996). The re-formulation of text of standard school problems. In A. Gagatsis (Ed.), *Didactics and history of mathematics* (p.53-72). Thessaloniki: ERASMUS
- D' Amore, B. (1997). Mental images, everyday language and expected behaviours in problem solving. In A. Gagatsis (Ed.), *Didactics of mathematics – Technology in education* (p.11-24). Thessaloniki: ERASMUS

- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. In: Recherches en Didactique des Mathématiques, 2(3), 303-346.
- Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms. The case of word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 293-397.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de la limite. In: In: Recherches en Didactique des Mathématiques, 6(1), 5-67.
- Verschaffel, L., Greer, B., & DeCorte, E. (2000). *Making sense of word problems*. The Netherlands: Sweets & Zeitlinger.
- Γαγάτσης, Α. (1992). Έννοιες και μέθοδοι της διδακτικής των μαθηματικών-Σχέσεις μεταξύ ιστορίας και διδακτικής των μαθηματικών. Στον Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Θέματα διδακτικής των μαθηματικών* (σ.5-31). Θεσσαλονίκη: ERASMUS ICP-91-G-0027/11.
- Γαγάτσης, Α., & Μάρκου, Α. (2004). Διδακτικό συμβόλαιο, εικόνες και επίλυση μη ρεαλιστικών προβλημάτων: Η επίδραση των εικόνων στην επίλυση μη ρεαλιστικών προβλημάτων. Στον Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών* (σ.125-138). Λευκωσία: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού – Πανεπιστήμιο Κύπρου.

*Α. Γαγάτσης κ.ά.*