ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ
ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ Δ7:

1.Διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων
2. Εισαγωγή στην Θεωρία της Διδασκαλίας

Νίκος Κλαουδάτος

2011

Οι σημειώσεις συνοδεύουν τις αντίστοιχες παραδόσεις του μαθήματος και για τον λόγο αυτό δεν πρέπει να θεωρηθούν ως αυτοτελές κείμενο για μελέτη.

Στην σελίδα αυτή παραθέτουμε το διάγραμμα της μεθόδου από το βιβλίο «Πώς να το λύσω» του G. Polya.

ΠΩΣ ΝΑ ΤΟ ΛΥΣΩ
Διάγραμμα της Μεθόδου

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Πρώτο
Πρέπει να *κατανοήσετε* το πρόβλημα.

- *Ποιο είναι το ζητούμενο; Ποια είναι τα δεδομένα; Ποια είναι η συνθήκη;*
- Είναι δυνατό να ικανοποιηθεί η συνθήκη; Είναι η συνθήκη επαρκής για τον προσδιορισμό του ζητουμένου; Μήπως είναι ανεπαρκής; Ή πλεοναστική; Ή αντιφατική;
- Χαράξτε ένα σχήμα. Χρησιμοποιήστε κατάλληλο συμβολισμό.
- Χωρίστε τα διάφορα μέρη της συνθήκης. Μπορείτε να τα γράψετε;

ΕΠΙΝΟΗΣΗ ΕΝΟΣ ΣΧΕΔΙΟΥ

Δεύτερο
Βρείτε τη σχέση μεταξύ των δεδομένων και του ζητουμένου. Αν δεν μπορεί να βρεθεί άμεση συσχέτιση, ίσως να αναγκαστείτε να εξετάσετε βοηθητικά προβλήματα. Πρέπει τελικά να αποκτήσετε ένα σχέδιο της λύσης.

- Το έχετε συναντήσει άλλοτε; Μήπως έχετε δει το ίδιο πρόβλημα με λίγο διαφορετική μορφή;
- *Γνωρίζετε κανένα σχετικό πρόβλημα;* Γνωρίζετε κανένα θεώρημα που θα μπορούσε να είναι χρήσιμο;
- *Αναλογιστείτε το ζητούμενο.* Και προσπαθήστε να σκεφτείτε γνωστό πρόβλημα με το ίδιο ή παρόμοιο ζητούμενο.
- *Να ένα πρόβλημα σχετικό με το δικό σας, που το έχετε λύσει άλλοτε. Θα μπορούσατε να το χρησιμοποιήσετε;* Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμά του; Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδό του; Μήπως πρέπει να εισαγάγετε κανένα βοηθητικό στοιχείο, για να γίνει δυνατή η χρησιμοποίησή του;
- Θα μπορούσατε να διατυπώσετε πάλι το πρόβλημα; Θα μπορούσατε να το διατυπώσετε διαφορετικά; Ανατρέξτε σε ορισμούς.
- Αν δεν μπορείτε να λύσετε το πρόβλημά σας, προσπαθήστε να λύσετε πρώτα ένα άλλο σχετικό πρόβλημα. Θα μπορούσατε να σκεφτείτε ένα προσιτότερο σχετικό πρόβλημα; Ένα γενικότερο πρόβλημα; Ένα ειδικότερο πρόβλημα; Ένα ανάλογο πρόβλημα; Θα μπορούσατε να λύσετε ένα μέρος του προβλήματος; Κρατήστε μόνο ένα μέρος της συνθήκης και αγνοήστε το άλλο μέρος· κατά πόσο έχει έτσι προσδιοριστεί το ζητούμενο και κατά ποιο τρόπο μπορεί αυτό να μεταβάλλεται;
- Θα μπορούσατε να εξαγάγετε κάτι χρήσιμο από τα δεδομένα; Θα μπορούσατε να σκεφτείτε άλλα δεδομένα, κατάλληλα για τον προσδιορισμό του ζητουμένου; Θα μπορούσατε να αλλάξετε το ζητούμενο ή τα δεδομένα, ή στην ανάγκη και τα δύο, έτσι ώστε το νέο ζητούμενο και τα νέα δεδομένα να βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους;
- Χρησιμοποιήσατε όλα τα δεδομένα; Χρησιμοποιήσατε ολόκληρη τη συνθήκη; Λάβατε υπόψη σας όλες τις ουσιώδεις έννοιες που περιέχονται στο πρόβλημα;

ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΟΥ

Τρίτο
Εκτελέστε το σχέδιο σας.

Όταν εκτελείτε το σχέδιο της λύσης, *να ελέγχετε κάθε βήμα.* Μπορείτε να αντιληφθείτε καθαρά ότι το βήμα είναι ορθό; Μπορείτε να αποδείξετε ότι είναι ορθό;

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Τέταρτο
Εξετάστε τη λύση που βρήκατε.

- *Μπορείτε να ελέγξετε το αποτέσμα;* Μπορείτε να ελέγξετε την αιτιολόγηση;
- Μπορείτε να βρείτε το αποτέλεσμα με διαφορετικό τρόπο; Μπορείτε να το δείτε μεμιάς;
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο, για κάποιο άλλο πρόβλημα;

Κεφάλαιο 4ο

1. Λύση Μαθηματικού Προβλήματος

1.1. Οριοθέτηση της έννοιας:
Αναφερόμαστε στην «Λύση Μαθηματικού Προβλήματος» όταν αντιμετωπίζουμε μια μη-οικεία κατάσταση, από την οποία δεν μπορούμε άμεσα να διαμορφώσουμε τρόπους για να την διαπραγματευτούμε.
Επομένως, το βαθύτερο νόημα του όρου είναι η ανίχνευση ενός δρόμου για την επίλυση ενός προβλήματος και όχι η εφαρμογή μιας γνωστής τεχνικής. Κατά την διαδικασία αυτή ο λύτης έχει ένα μεγάλο βαθμό αυτονομίας, όπου αναζητεί διάφορες δυνατότητες και αποφασίζει κατάλληλα, εκμεταλλευόμενος το «απόθεμα» όλων των γνώσεων που διαθέτει με την βοήθεια κατάλληλων στρατηγικών οι οποίες ονομάζονται και ευρετικές (heuristics).
<u>Προσοχή:</u> Το να χαρακτηρίσουμε μια μαθηματική πρόταση ως πρόβλημα ή ως άσκηση, είναι μια ενέργεια υποκειμενική: Ότι αποτελεί πρόβλημα για κάποιον μπορεί να είναι άσκηση για κάποιον άλλο. Γενικότερα, θα ονομάσουμε πρόβλημα μια πρόταση που παρουσιάζει έναν βαθμό δυσκολίας για τους πιο πολλούς μαθητές μας, όπως περιγράφουμε στην πρώτη παράγραφο.

1.2. Οι ιδέες του G. Polya (1973 a, 1973 b,1965) :

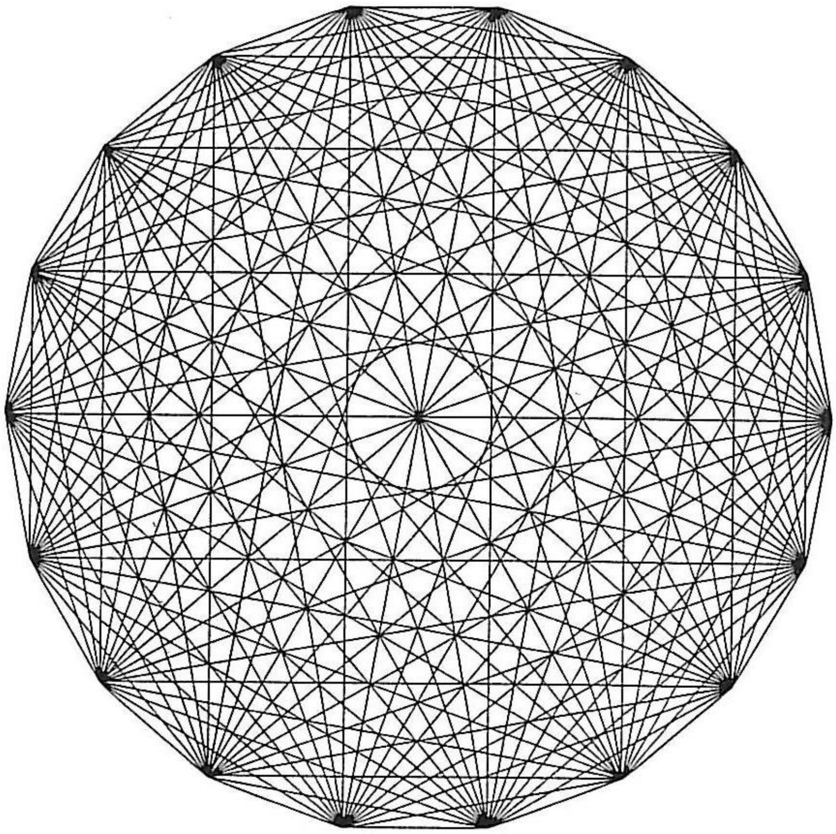
(α). Η Μέθοδος
1. Κατανόηση του προβλήματος.
(i). Ο λύτης πρέπει να διαβάσει το κείμενο και να «αποσπάσει» πληροφορίες με γραμματική και σημασιολογική ανάλυση.
(ii). Από τις πληροφορίες αυτές, πρέπει να κατασκευάσει μια εσωτερική αναπαράσταση του προβλήματος η οποία να περιέχει τη δεδομένη κατάσταση, τους στόχους και τις διαθέσιμες ενέργειες.
2. Επινόηση ενός σχεδίου.
(i). Αναγνώριση των χρήσιμων στρατηγικών.
(ii). Επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής ανάμεσα σε πολλές διαθέσιμες
3. Εκτέλεση του σχεδίου.
Πραγματοποίηση της επιλεγμένης στρατηγικής.
4. Ανασκόπηση.
Τι έχεις μάθει αφού έλυσες το πρόβλημα;

(β). Η έννοια της Ευρετικής (Γενική Ευρετική):
Ευρετική σημαίνει μια γενική οδηγία ή στρατηγική *ανεξάρτητη από οποιοδήποτε ειδικό θέμα,* που βοηθά το λύτη να προσεγγίσει και να καταλάβει το πρόβλημα και να διαχειριστεί αποτελεσματικά τις διαθέσιμες γνώσεις του για να το λύσει.
Παραδείγματα:
-Χαράξτε ένα σχήμα. Χρησιμοποιήστε κατάλληλο συμβολισμό.
-Γνωρίζετε κανένα σχετικό πρόβλημα; Γνωρίζετε κανένα θεώρημα που θα μπορούσε να είναι χρήσιμο;
-Αν δεν μπορείτε να λύσετε το πρόβλημά σας, προσπαθήστε να λύσετε πρώτα ένα άλλο σχετικό πρόβλημα. Θα μπορούσατε να σκεφτείτε ένα σχετικό πρόβλημα πιο προσιτό; Ένα γενικότερο πρόβλημα; Ένα ειδικότερο; Ένα ανάλογο πρόβλημα;
<u>Προσοχή</u>: Οι ευρετικές δεν αντικαθιστούν την έλλειψη γνώσεων!
Διακρίνουμε δύο είδη ευρετικών:

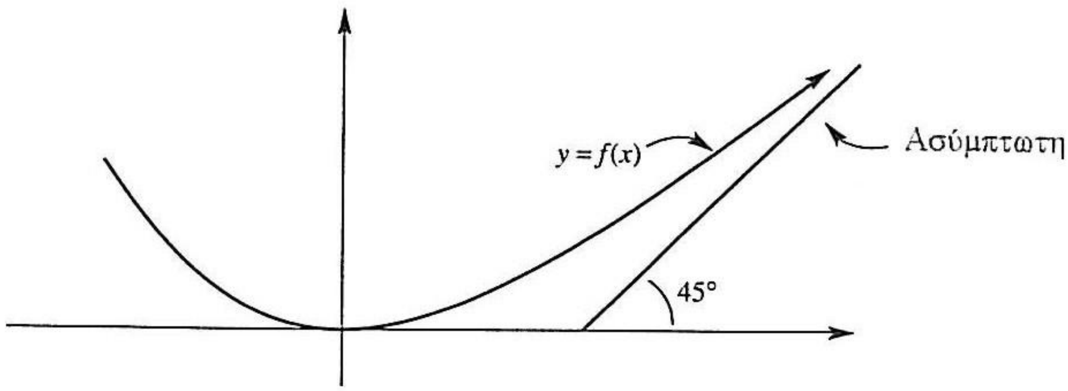
1.Τις γενικές ευρετικές (general heuristics), δηλαδή ευρετικές του τύπου που προαναφέραμε.
2.Τις ειδικές ευρετικές (task-specific heuristics), δηλαδή ευρετικές που αναφέρονται σε συγκεκριμένες περιοχές Μαθηματικής γνώσης.
Τα προβλήματα που ακολουθούν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παραδείγματα στη λύση προβλήματος.

Προβλήματα

1. Να βρεθεί ο αριθμός των ευθειών που περιέχει το ακόλουθο σχήμα.



2. Από το σχήμα να υπολογίσετε το $lim \frac{dy}{dx}$, όταν $\chi \to \infty$.



3. Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα (ημω)΄=συνω, όταν το ω είναι σε μοίρες.

Εργασία

Ας υποθέσουμε ότι κάνετε ένα ειδικό μάθημα με θέμα την Λύση Προβλήματος και ότι στο μάθημα αυτό θέλετε να δείξετε την χρησιμότητα των γενικών ευρετικών. Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο μάθημα με την βοήθεια των ακόλουθων προβλημάτων, και στο οποίο να χρησιμοποιήσετε την κατάλληλη ή τις κατάλληλες από τις επόμενες στρατηγικές ή άλλη που θα επιλέξετε εσείς:

ΠΕΝΤΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ (ΕΥΡΕΤΙΚΕΣ)

Αν δεν μπορείς να λύσεις ένα πρόβλημα:

1. Λύσε ένα απλούστερο πρόβλημα
   Δοκίμασε:
- Συγκεκριμένους αριθμούς
- Ειδικές περιπτώσεις → ελάττωση της πολυπλοκότητας
- Συγκεκριμένες περιπτώσεις

2. Λύσε ένα σχετικό πρόβλημα
- Μείωσε τις προϋποθέσεις → Γενίκευση του προβλήματος

3. Λύσε ένα ισοδύναμο πρόβλημα

Ένας συνήθης τρόπος δημιουργίας ισοδυνάμου προβλήματος είναι:
- Επαναδιατύπωση του προβλήματος, με:
  - Αλλαγή ‘οπτικής γωνίας’
  - Χρήση της εις άτοπον απαγωγής ή της αντιθετοαντιστροφής
  - ‘Έστω ότι το πρόβλημα έχει λυθεί…(ανάλυση και σύνθεση).

4. Λύσε ένα ανάλογο πρόβλημα
   Δοκίμασε:
- Αντιστοιχία συγκεκριμένων συνθηκών ανάμεσα στο πρόβλημα που πρέπει να λυθεί και σε άλλο που έχετε λύσει. Η στρατηγική αυτή αποσκοπεί στο να χρησιμοποιήσετε κατάλληλες ιδέες ή διαδικασίες από το γνωστό, στο πρόβλημα που θέλετε να λύσετε.

5. Κάνε ένα σχήμα:
- Σχεδίασε ένα γράφημα, μια γραφική παράσταση,
  ένα διάγραμμα κτλ.
- Ακόμα και αν έχεις λύσει ένα πρόβλημα διαφορετικά π.χ. με αλγεβρικό τρόπο, κάνε ένα σχήμα αν αυτό είναι δυνατόν. Θα αποκτήσεις μια καλύτερη κατανόηση του προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να δείξετε ότι $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1-a-b-c-d$, όπου a,b,c,d, πραγματικοί αριθμοί μεταξύ 0 και 1.

2. Αν p, q, r, s, είναι θετικοί πραγματικοί, να δείξετε ότι:

$$\frac{(p^2+1)(q^2+1)(r^2+1)(s^2+1)}{pqrs} \geq 16$$

3. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, το σύστημα:

$\chi^2 - \psi^2 = 0$	έχει	- καμιά λύση
$(\chi-\alpha)^2 + \psi^2 = 1$		- 1 λύση
		- 2 λύσεις
		- 3 λύσεις
		- 4 λύσεις

4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $-\chi^4 + 4\chi^3 - 30 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

Υποδείξεις για εργασίες των μαθητών:

Ερευνητικές δραστηριότητες

1. Να βρεθεί το πλήθος των σημείων που ορίζουν ν ευθείες, που ανά δύο τέμνονται και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2. Να βρεθεί το πλήθος των περιοχών του επιπέδου που ορίζουν ν ευθείες, οι οποίες ανά δύο τέμνονται και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

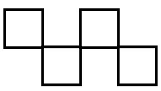
3. Να βρεθεί το πλήθος των περιοχών του χώρου που ορίζουν ν τυχαία επίπεδα (δηλαδή, επίπεδα που ανά τρία τέμνονται σε ένα σημείο και ανά τέσσαρα δεν έχουν κοινό σημείο τομής).
Σημείωση: Η λύση του προβλήματος αυτού στηρίζεται στην λύση των δύο προηγουμένων προβλημάτων. Παρόλα αυτά, η λύση του είναι δύσκολη για πολλούς μαθητές.

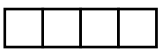
4. Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού 12345678987654321;

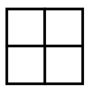
Ερευνητική εργασία

5. Πρόβλημα: «Η ελάχιστη περίμετρος»

Με ποιον τρόπο πρέπει να τοποθετήσουμε 4 τετράγωνα ώστε το σχήμα που θα προκύψει να έχει την ελάχιστη περίμετρο; Για παράδειγμα, αν τοποθετήσουμε τα τετράγωνα όπως στο σχήμα 1, θα έχουμε περίμετρο 16. Αν τα τοποθετήσουμε όπως στο σχήμα 2, θα έχουμε περίμετρο 10. Τελικά όμως, το σχήμα 3 μας δίνει την ελάχιστη περίμετρο 8.


σχ.1


σχ.2


σχ.3

1.Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

αριθμός τετραγώνων	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ελάχιστη περίμετρος	4	6	8	8										

2. Από τον πίνακα να βρείτε έναν γενικό κανόνα για την ελάχιστη περίμετρο. Για παράδειγμα, ο κανόνας που θα διατυπώσετε θα επιτρέπει, χωρίς να κάνουμε σχήμα, να βρίσκουμε την ελάχιστη περίμετρο π.χ. 36 τετραγώνων ή 64 ή 72 κλπ

Ανασκόπηση της πορείας των λύσεων των προηγούμενων προβλημάτων

Αν εξετάσουμε τους τρόπους με τους οποίους λύθηκαν τα προηγούμενα προβλήματα, μπορούμε να τους συνοψίσουμε στα ακόλουθα βήματα:

1. Πειραματισμός - Παρατήρηση
2. Επισήμανση ενός pattern
3. Ανάπτυξη μιας εικασίας (Γενίκευση του pattern)

Τα τρία αυτά βήματα ανήκουν στην Επαγωγική Συλλογιστική

---

4. Έλεγχος της εικασίας :

Παραγωγική Συλλογιστική

Τα τέσσαρα βήματα είναι γενικά και τα ακολουθούμε προκειμένου να απαντήσουμε σε ένα μαθηματικό ερώτημα. Τα τρία πρώτα στοχεύουν στο να συνδέσουμε τις προηγούμενες γνώσεις μας με το συγκεκριμένο πρόβλημα και να καταλήξουμε σε κάποια υπόθεση-εικασία. Το τελευταίο βήμα αποτελεί τον έλεγχο της εικασίας και το οποίο, βήμα, σε πολλές περιπτώσεις είναι η γνωστή μας απόδειξη.
Παρατηρήστε ότι η απόδειξη είναι το τελευταίο βήμα και όχι το πρώτο και μοναδικό.

1.3. Ανάπτυξη των ιδεών του Polya.

Η ανάλυση των σταδίων της μεθόδου του Polya μπορεί να γίνει ως εξής, βλέπε Galovich (1993).

Ι. Κατανόηση του προβλήματος (Ανάλυση).

1.Αναγνώριση των αγνώστων.
2.Διαχωρισμός των υποθέσεων από τα δεδομένα.
3.Αναπαράσταση του προβλήματος.
   α. Με κατάλληλο διάγραμμα.
   β. Με κατάλληλο συμβολισμό.
4.Εξέταση ειδικών περιπτώσεων.
   α. Επιλογή ειδικών τιμών με σκοπό την ανάπτυξη μιας διαισθητικής προσέγγισης.
   β. Εξέταση ακραίων περιπτώσεων.
   γ. Τιμές σε παραμέτρους, π.χ. για ν=1,2,3,...και έρευνα για συγκεκριμένο μοντέλο (pattern).
5.Απλοποίηση του προβλήματος.
   α. Με συμμετρία.
   β. Με επιλογή κατάλληλων μονάδων.

ΙΙ. Ανάπτυξη ενός σχεδίου (Διερεύνηση).

1.Θεώρησε ένα ισοδύναμο πρόβλημα.

α. Αντικατάσταση κάποιων συνθηκών με άλλες ισοδύναμες.

β. Συνδυασμός των στοιχείων του προβλήματος με διάφορους τρόπους.

γ. Εισαγωγή βοηθητικών στοιχείων.

δ. Επαναδιατύπωση του προβλήματος:

i. Αλλαγή «οπτικής γωνίας» ή συμβολισμού.

ii. Χρήση της εις άτοπον απαγωγής ή της αντιθετοαντιστροφής.

iii.Έστω ότι το πρόβλημα έχει λυθεί, δηλαδή με την υπόθεση ότι υπάρχει μια λύση καθορίζονται οι ιδιότητες της λύσης.

2.Εξέταση «ελαφρώς» τροποποιημένων προβλημάτων.

α. Έρευνα για υποσκοπούς.

β. Αγνόηση μιας συνθήκης και επαναδιατύπωση του προβλήματος.

γ. Ανάλυση περίπτωσης (case analysis)

3.Εξέταση προβλημάτων που έχουν τροποποιηθεί πολύ.

α. Κατασκευή ανάλογου προβλήματος με λιγότερες μεταβλητές.

β. Γενίκευση του προβλήματος.

γ. Θεώρηση όλων των μεταβλητών ως σταθερών εκτός μιας, και εξέταση της επίδρασής της στο πρόβλημα.

δ. Εκμετάλλευση οποιουδήποτε προβλήματος με παρόμοια μορφή, υπόθεση ή συμπέρασμα.

ΙΙΙ. Εκτέλεση του σχεδίου (Επαλήθευση)

1.Ελεγχος σε κάθε βήμα.

2.Απόδειξη ότι το κάθε βήμα είναι σωστό.

ΙV.Ανασκόπηση (Επαλήθευση).

1.Εφαρμογή των ακόλουθων ειδικών ελέγχων στη λύση:

α. Χρησιμοποιεί όλα τα δεδομένα;

β. Ακολουθεί κάποιες λογικές εκτιμήσεις ή προβλέψεις;

2.Εφαρμογή γενικών ελέγχων:

α. Τα αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν με διαφορετικό τρόπο;

β. Τα αποτελέσματα επαληθεύονται σε ειδικές περιπτώσεις;

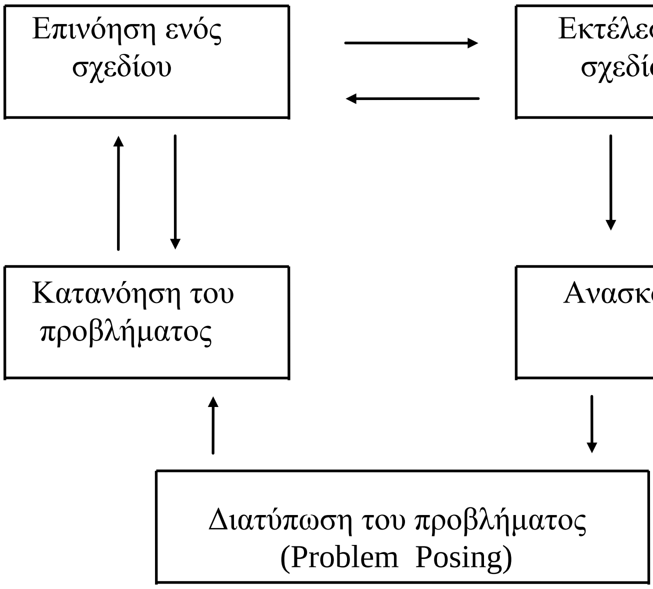
γ. Τα αποτελέσματα μπορούν να δώσουν γνωστά αποτελέσματα, με κατάλληλους περιορισμούς;

δ. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εξαγωγή άλλων, γνωστών, συμπερασμάτων;

1. 4. Λύση Μαθηματικού Προβλήματος (συνέχεια)

(α). Η Λύση Μαθηματικού Προβλήματος ως Διαδικασία

Το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει τη δυναμική και «κυκλική» φύση της Λύσης Προβλήματος, σύμφωνα με τον Wilson (1994).



(β). Βασικές συνιστώσες της λύσης προβλήματος:

1. Οι διαθέσιμες Μαθηματικές γνώσεις (Domain-Specific Knowledge):

Η αποτελεσματική οργάνωση των Γ.Σ. στη μακροπρόθεσμη μνήμη, είναι σημαντικός παράγοντας στην επίλυση προβλημάτων.

Η διαφορά ανάμεσα στους έμπειρους και στους άπειρους λύτες: Οι έμπειροι επικεντρώνουν την προσοχή τους στις Μαθηματικές έννοιες ενώ οι άπειροι σε επιφανειακά χαρακτηριστικά.

2. Οι Αλγόριθμοι:

Ένας αλγόριθμος είναι μια διαδικασία που εφαρμόζεται σε ένα συγκεκριμένο τύπο προβλημάτων και ο οποίος, αν εκτελεσθεί σωστά, θα μας δώσει μία απάντηση. Οι αλγόριθμοι είναι σημαντικοί στα Μαθηματικά γιαυτό η διδασκαλία πρέπει να τους προβάλλει. Προσοχή: Η εκτέλεση ενός αλγόριθμου δεν είναι Λύση Προβλήματος. Αντίθετα, η διαδικασία ανάπτυξης ενός αλγόριθμου μπορεί να ενταχθεί στην Λύση Προβλήματος.

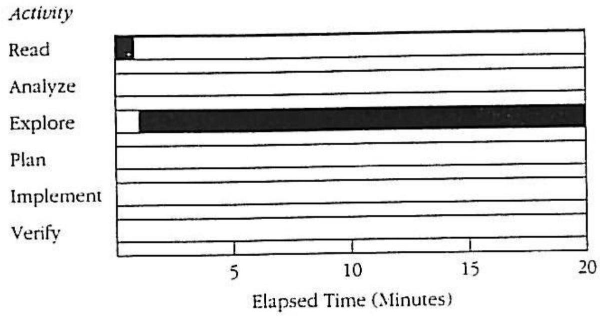
3. Οι ευρετικές

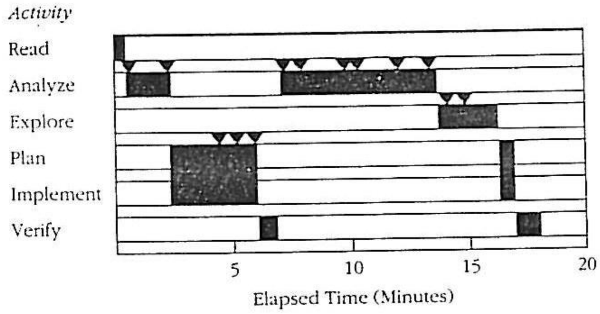
Εχουμε ήδη αναφερθεί στην έννοια των ευρετικών. Όμως, έρευνες, π.χ. Schoenfeld (1985), δείχνουν ότι η διδασκαλία των ευρετικών απαιτεί χρονική διάρκεια, χωρίς η χρήση τους να εγγυάται την επιτυχή επίλυση του προβλήματος, επειδή απαιτείται η παρουσία και άλλων παραγόντων, π.χ. ο έλεγχος (control).

4. Ο έλεγχος (control):

Θα ονομάσουμε (συνειδητό) έλεγχο, την αποτελεσματική συμπεριφορά του λύτη απέναντι στο πρόβλημα, και ιδιαίτερα την σωστή «εκμετάλλευση» όλων των διαθέσιμων γνώσεών του. Στην πραγματικότητα ο έλεγχος αναφέρεται στην ανάπτυξη ενός «μηχανισμού αποφάσεων», με τον οποίο θα γίνεται η επιλογή της κατάλληλης ευρετικής, των κατάλληλων Γ.Σ., των αλγορίθμων κλπ. Το πεδίο της έρευνας που αναφέρεται στο θέμα αυτό ονομάζεται «Μεταγνωστική» (Metacognition).

Τα διαγράμματα που ακολουθούν είναι η γραφική έκφραση της συμπεριφοράς ενός «άπειρου» και ενός «έμπειρου» λύτη κατά την διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος με δύο ερωτήματα, Schoenfeld (1987). Τα μικρά τρίγωνα σημειώνουν τις στιγμές όπου τον λύτη απασχολούσαν ερωτήματα ελέγχου όπως π.χ. «τι πρέπει να κάνω τώρα;».





Μπορείτε να διακρίνετε ποιο διάγραμμα αντιστοιχεί στον έμπειρο και ποιο στον άπειρο λύτη; Μια καλή ιδέα για τους τύπους των μεταγνωστικών αποφάσεων κατά την λύση προβλήματος, μας δίνει ο πίνακας «Ένα μοντέλο μεταγνωστικών αποφάσεων» του Lester (1985), που παρατίθεται σε επόμενη σελίδα.

5. Η σημασία της Ανασκόπησης:

Η ανασκόπηση μπορεί να γίνει το πιο σημαντικό μέρος της Λύσης Προβλήματος, δεδομένου ότι το «τί έχεις μάθει αφού έλυσες το πρόβλημα» είναι, τελικά, αυτό που έχει σημασία. Οι διαδικασίες που προάγουν τη μάθηση στο στάδιο αυτό είναι:

-Η επέκταση (τροποποίηση) του προβλήματος.

-Η επέκταση της λύσης σε άλλα προβλήματα.

-Η επέκταση (διεύρυνση) της λύσης.

Οι διαδικασίες αυτές μπορούν να ενσωματωθούν στη διδασκαλία ως ειδικές εργασίες για τους μαθητές.

6. Η Διατύπωση του προβλήματος (Problem Posing):

Οι διάφορες εκδοχές που μπορεί να πάρει η «εκφώνηση» ενός προβλήματος καθώς και οι τροποποιήσεις που μπορούμε να της «επιβάλλουμε», προσφέρουν τη δυνατότητα για Λύση Προβλήματος.

7. Τα συστήματα των «πιστεύω» (Belief systems):

Θα ονομάσουμε «Συστήματα των πιστεύω», την οπτική γωνία με την οποία ένα άτομο αντιμετωπίζει τον κόσμο των Μαθηματικών, τον τρόπο που προσεγγίζει τα Μαθηματικά και τις Μαθηματικές δραστηριότητες. Τα πιστεύω μπορούν να καθορίσουν τις επιλογές προσέγγισης ενός προβλήματος, τις τεχνικές που θα χρησιμοποιήσουμε ή θα αποφύγουμε, τον χρόνο που θα αφιερώσουμε και το πόσο επίμονα θα εργαστούμε. Γενικά, τα πιστεύω δημιουργούν το πλαίσιο μέσα στο οποίο δραστηριοποιούνται οι γνώσεις, οι ευρετικές και ο έλεγχος.

Τρία τυπικά «πιστεύω» και οι συνέπειές τους:

1ο. Τα αυστηρά ή τυπικά Μαθηματικά έχουν πολύ λίγη σχέση, ή καθόλου, με την πραγματική σκέψη ή τη λύση προβλήματος.

Συνέπεια: Αν ένα πρόβλημα απαιτεί μια διαδικασία ανακάλυψης, τα τυπικά Μαθηματικά δε μας χρειάζονται!

2ο. Τα προβλήματα των Μαθηματικών λύνονται πάντα μέσα σε δέκα λεπτά το πολύ, ή είναι άλυτα!
Συνέπεια: Αν οι μαθητές δεν μπορούν να λύσουν ένα πρόβλημα σε δέκα λεπτά, το εγκαταλείπουν!
3ο. Μόνον οι «μεγαλοφυΐες» είναι ικανές να ανακαλύπτουν ή να δημιουργούν Μαθηματικά.
Συνέπεια 1η: Αν ξεχάσεις κάτι αυτό είναι πολύ κακό για σένα γιατί, επειδή είσαι ένας τυπικός μαθητής και όχι μεγαλοφυΐα, δεν μπορείς να το βρεις μόνος σου.
Συνέπεια 2η: Οι μαθητές αποδέχονται τις διάφορες μεθόδους επίλυσης, χωρίς να προσπαθήσουν να κατανοήσουν τους λόγους για τους οποίους οι μέθοδοι αυτές είναι αποτελεσματικές. Εξάλλου, οι μέθοδοι είναι γνώση που «έρχεται από πάνω».

Σύνοψη: Μέσα στη σημερινή πραγματικότητα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, οι «ευκαιρίες» για Λύση Προβλήματος προσφέρονται από:

-Την ανάπτυξη και διερεύνηση αλγορίθμων.
-Την Ανασκόπηση.
-Την Διατύπωση του προβλήματος.

Η πιο σημαντική, όμως, συνεισφορά της Λύσης Προβλήματος στην διδασκαλία, προκύπτει όταν την θεωρήσουμε ως διδακτικό μοντέλο, δηλαδή η Λύση Προβλήματος ως μέθοδος εισαγωγής και διδασκαλίας Μαθηματικών εννοιών, ιδεών και αλγορίθμων.

Ένα μοντέλο Μεταγνωστικών αποφάσεων κατά την Λύση Προβλήματος (Lester 1985)

Στάδιο της διαδικασίας επίλυσης	Δείγμα μεταγνωστικών αποφάσεων
Κατανόηση του προβλήματος: Στρατηγική συμπεριφορά με σκοπό την κατανόηση του προβλήματος. 1.Στρατηγικές κατανόησης. 2. Ανάλυση πληροφοριών. 3. Αρχική και επόμενες παραστάσεις. 4. Εκτίμηση του επιπέδου δυσκολίας και των πιθανοτήτων επιτυχίας.	Ερευνώ για λέξεις «κλειδιά» που θα με οδηγήσουν στο τι πρέπει να κάνω. Οι αριθμοί είναι μεγάλοι. Το πρόβλημα μοιάζει με [τύπος προβλήματος]. Δεν ξέρω πως να το λύσω. Υπάρχουν πολλοί αριθμοί, δεν μοιάζει με άλλο γνωστό πρόβλημα.
Επινόηση ενός σχεδίου: Οργάνωση της συμπεριφοράς και επιλογή των ενεργειών. 1.Αναγνώριση των στόχων. 2. Συνολική σχεδίαση. 3. Τοπική σχεδίαση (για την εκτέλεση του συνολικού σχεδίου).	Νομίζω ότι το πρόβλημα μου ζητά να βρω [...]. Μπορώ να το λύσω αν υπολογίσω [...]. Νομίζω πως θα πρέπει πρώτα να [πράξη] αυτούς τους αριθμούς. Δεν είμαι βέβαιος αλλά [αλγόριθμος, μέθοδος] μπορεί να ταιριάζει σε αυτόν τον τύπο προβλήματος. Δεν είμαι βέβαιος τι πρέπει να κάνω. Θα κάνω μια υπόθεση: Το πρόβλημα είναι [τύπος προβλήματος]. Θα το λύσω όπως λύνονται αυτού του είδους τα προβλήματα.
Εκτέλεση του σχεδίου: Ρύθμιση της συμπεριφοράς για να γίνει συμβατή με το σχέδιο. 1. Παρουσίαση των τοπικών ενεργειών. 2. Έλεγχος της προόδου και της συνέπει-ας των τοπικών σχεδίων.	Είμαι απρόσεκτος με [αλγόριθμος]. Είναι πιο καλά να εργαστώ αργά, το πρόβλημα είναι σύνθετο. Αυτή η μέθοδος δεν οδηγεί πουθενά. Θα επιχειρήσω κάτι άλλο. Πρέπει να γράψω τι κάνω προκειμένου να

3. Αποφάσεις για την εκτέλεση, π.χ. ταχύτητα αντί ακρίβειας, βαθμός «κομψότητας» της απόδειξης.	μην μπερδευτώ. Πρέπει να καταγράψω τα βήματα.
Ανασκόπηση: Αξιολόγηση των αποφάσεων και των αποτελεσμάτων του σχεδίου. **Α. Αξιολόγηση της κατεύθυνσης και της οργάνωσης.** 1. Επάρκεια της αναπαράστασης του προβλήματος. 2. Επάρκεια των αποφάσεων της οργάνωσης. 3. Συνέπεια των τοπικών σχεδίων με τα συνολικά. 4. Συνέπεια των συνολικών σχεδίων με τους στόχους. **Β. Αξιολόγηση της εκτέλεσης.** 1. Έλεγχος των αποτελεσμάτων των τοπικών ενεργειών 2. Συνέπεια των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων με τα υπάρχοντα σχέδια και τις συνθήκες του προβλήματος. 3. Συνέπεια των τελικών αποτελεσμάτων με τις συνθήκες του προβλήματος.	Δεν ήμουν προσεκτικός. Θα ήταν πιο καλά να ελέγξω τα βήματά μου. Δεν είμαι βέβαιος ότι αυτό το σχέδιο είναι κατάλληλο. Θα ήταν πιο καλά να το ελέγξω πάλι. Δεν είμαι βέβαιος ότι κατάλαβα το πρόβλημα. Θα το επεξεργαστώ από την αρχή. Αυτή η απάντηση φαίνεται πολύ μεγάλη. Σκέφτηκα πως ήταν ένα [τύπος] πρόβλημα, αλλά δεν νομίζω πως είναι έτσι.

1.5. Σχεδίαση Διδασκαλίας.

1.5.1. Γενικότερες ιδέες για την Λύση Προβλήματος και την Διδασκαλία.

Όπως έχουμε επισημάνει, μια από τις πιο σοβαρές συνέπειες του Κονστρουκτιβισμού στην διδασκαλία είναι η αναγκαιότητα της αποδοχής ενεργητικών μεθόδων μάθησης. Ο δάσκαλος των μαθηματικών πρέπει να δώσει την ευκαιρία και την δυνατότητα στον μαθητή να κατασκευάσει την γνώση διαμέσου κατάλληλα σχεδιασμένων Διδακτικών Καταστάσεων. Στην περίπτωση των μαθηματικών, ενεργητικές μέθοδοι μάθησης σημαίνει διδασκαλία των Μαθηματικών με διαδικασίες λύσης προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει «κάνω» μαθηματικά δηλαδή διαμορφώνω εικασίες ή προβλέψεις και ερευνώ αν επαληθεύονται ή όχι, γενικεύω, επισημαίνω και εκφράζω μοντέλα συμπεριφοράς (patterns), μοντελοποιώ, «οπτικοποιώ» (visualizing), τις ιδέες και έννοιες με διάφορα αναπαραστασιακά συστήματα, συνδέω ιδέες κτλ.

Από την άλλη μεριά, η έρευνα έχει δείξει ότι η επίλυση προβλημάτων βρίσκεται σε άμεση συσχέτιση με την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Για παράδειγμα, ο Owens (1992) θεωρεί ότι τα προβλήματα αλλά και η διαδικασία λύσης προβλήματος μπορούν να δημιουργήσουν ένα περιβάλλον κατασκευής της γνώσης. Δηλαδή τα προβλήματα και η λύση προβλήματος «εγκαθιστούν» τόσο την ανάγκη για μαθηματική γνώση όσο και το πλαίσιο μέσα στο οποίο οι μαθητές μαθαίνουν τα μαθηματικά. Ωστόσο, τα προβλήματα μπορούν να αναπτύξουν τη γνώση μόνο στον βαθμό που οι μαθητές τα βρίσκουν ενδιαφέροντα και θεωρήσουν ότι η γνώση που θα αναπτύξουν λύνοντας ένα σύνολο προβλημάτων έχει κάποια αξία, πρακτική ή θεωρητική.

Οι Yackel, Cobb και Wood (1991), θεωρούν ότι, από την κονστρουκτιβιστική οπτική γωνία, οι μαθητές δεν μαθαίνουν μαθηματικά εσωτερικεύοντας προσεκτικά προετοιμασμένες και πλήρως οργανωμένες και παρουσιασμένες έννοιες και αλγόριθμους. Αντίθετα, μαθαίνουν μαθηματικά με την οργάνωση και επανοργάνωση, από τους ίδιους, των δραστηριοτήτων και των εμπειριών τους. Ανάμεσα στις δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνονται τόσο οι δεξιότητες της επίλυσης ενός προβλήματος (problem solving skills) όσο και η δυνατότητα συνειδητοποίησης, εκ μέρους τους, των διαδικασιών επίλυσης που εφάρμοσαν (metacognitive skills).

Οι Cobb και Steffe (1993), σημειώνουν ότι η εφαρμογή του κονστρουκτιβισμού στη τάξη, μπορεί να έχει την ακόλουθη μορφή: Ο δάσκαλος των μαθηματικών δίνει στους μαθητές ένα σύνολο προβλημάτων, στην πραγματικότητα ένα σύνολο από δραστηριότητες, και οι μαθητές εργάζονται πάνω στα προβλήματα. Η εργασία ουσιαστικά περιλαμβάνει δραστηριότητες αναγνώρισης και εγκατάστασης μοντέλων μαθηματικής σκέψης όπως και προσαρμογής υπαρχόντων μοντέλων σε νέα γνωστικά σχήματα. Ο Balacheff (1990), θεωρεί ότι η μαθηματική γνώση κατασκευάζεται «κάνοντας» μαθηματικά, δηλαδή διαμέσου διαδικασιών λύσης προβλήματος.

Οι μαθηματικές ιδέες μπορούν να κατασκευαστούν από τους μαθητές, όταν είτε εργάζονται ατομικά, είτε ομαδικά σε ομάδες εργασίας, είτε συνεργάζονται με το δάσκαλο. Ποια προσέγγιση θα ακολουθήσουμε; Ήδη από πολύ νωρίς ο Piaget είχε επισημάνει την αξία της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (social interaction) στην διαδικασία της μάθησης και ιδιαίτερα την αλληλεπίδραση ανάμεσα σε μαθητές της ίδιας ηλικίας. Ακόμα, ο Vygotsky έχει διατυπώσει την θέση ότι η γνώση που αναπτύσσεται σε ένα κοινωνικό περιβάλλον, π.χ. το περιβάλλον της τάξης, παίζει ένα σημαντικό ρόλο στην αναπαράσταση των επιστημονικών εννοιών, δίνοντας έτσι μεγάλη σημασία στα φαινόμενα αλληλεπίδρασης μέσα στην τάξη. Ο Vidakovic (1993), επισημαίνει ότι οι μαθητές που εργάστηκαν σε ομάδες εργασίας παρουσίασαν μεγαλύτερη ευελιξία και αποτελεσματικότητα στην κατασκευήν εννοιών της ανάλυσης από άλλους που εργάστηκαν μόνοι τους. Η Laborde (1994) αναφέρει ότι η εργασία σε ομάδες ευνοεί την ανάπτυξη πολλών προσεγγίσεων και διαφορετικών οπτικών γωνιών. Η πιο σοβαρή, όμως, συμβολή των ομάδων εργασίας, κατά τη γνώμη μας, βρίσκεται στο γεγονός ότι ευνοεί την «αναστοχαστική» διαδικασία (reflexion). Θα ονομάσουμε «reflexion» την διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής σκέφτεται πάνω στις ενέργειές του. Σύμφωνα με τον Piaget, «ο μαθητής μαθαίνει όχι μόνο κάνοντας αλλά και στοχαζόμενος πάνω σε αυτά που έχει κάνει». Τόσο ο Schoenferld (1983) όσο και ο Silver (Kilpatrick 1985), για να αναφέρουμε μόνον δύο, έχουν επισημάνει τον ρόλο κλειδί των «Μεταγνωστικών» (metacognition) διαδικασιών στην λύση προβλήματος. Ο Silver μάλιστα τονίζει ότι πολλές από τις ευρετικές (heuristics) του Polya έχουν «μεταγνωστικό» χαρακτήρα. Όμως, οι διαδικασίες αυτές μαθαίνονται. Κατά τη γνώμη μας, ο πιο αποτελεσματικός τρόπος είναι η εργασία σε μικρές ομάδες. Πράγματι, είναι πιο εύκολο για ένα μαθητή να συζητήσει και να κρίνει τις σκέψεις και τις ενέργειες των συμμαθητών του παρά τις δικές του. Ακόμα, αν κάποιος ζητήσει βοήθεια από συμμαθητή του, τότε ο άλλος στην προσπάθειά του να του δώσει τις απαραίτητες πληροφορίες ή να «υπερασπιστεί» τις ιδέες του θα αρχίσει να σκέφτεται πάνω στις ενέργειές του μαθαίνοντας έτσι κάτι για τον ίδιο του τον εαυτό. Για τους λόγους αυτούς θα υιοθετήσουμε την προσέγγιση της εργασίας σε μικρές ομάδες. Το ζήτημα της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας θα το εξετάσουμε πιο λεπτομερειακά στην θεωρία του Vygotsky.

Ατυχώς, σε πολλές περιπτώσεις έχει επικρατήσει μια «ρομαντική» και, συνήθως, απλοϊκή αντίληψη της μορφής: «Αφήστε τους μαθητές να εργαστούν μόνοι τους και αυτοί θα κατασκευάσουν τη γνώση» ή «Βάλτε τους μαθητές να δουλεύουν σε ομάδες και παρακινήστε τους να συζητούν μεταξύ τους καθώς θα λύνουν προβλήματα». Τίποτα στην ιστορία των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν υποστηρίζει μια τέτοια άποψη. Οι μαθητές δεν πρόκειται να κατασκευάσουν την γνώση τους ούτε να αποκτήσουν μια ενεργητική και ερευνητική συμπεριφορά από τύχη ή σύμπτωση. Έτσι, παρά το γεγονός ότι είναι χρήσιμο οι μαθητές να δουλεύουν σε προβλήματα και να συζητούν τις ιδέες τους, δεν είναι αρκετό αυτό ως οδηγίες για διδασκαλία. Το ερώτημα θα πρέπει να διατυπωθεί ως εξής: *Με ποιον τρόπο ο δάσκαλος των Μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές του να κατασκευάσουν ιδέες και έννοιες που η μαθηματική κοινότητα χρειάστηκε χιλιάδες χρόνια να αναπτύξει;*

Είναι φανερό ότι ένα μεγάλο μέρος της υπευθυνότητας του δασκάλου των Μαθηματικών είναι ο σχεδιασμός των κατάλληλων Διδακτικών Καταστάσεων. Ο σχεδιασμός θα πρέπει να είναι συμβατός με τον Κονστρουκτιβισμό, δηλαδή θα προτείνει δραστηριότητες με τις οποίες ο μαθητής αναζητά την κατάλληλη απάντηση από ένα ευρύ φάσμα επιλογών και όχι μια συγκεκριμένη και τυποποιημένη. Κατά τον σχεδιασμό, ο καθηγητής των Μαθηματικών πρέπει να πάρει τις αφηρημένες Μαθηματικές ιδέες και έννοιες και να τις ενσωματώσει σε ένα πλαίσιο κατάλληλο για τους μαθητές. Επειδή όμως μάθηση σημαίνει, ανάμεσα σε άλλα, αναγνώριση και χρησιμοποίηση των ιδεών αυτών σε διάφορα πλαίσια και καταστάσεις, θα πρέπει στην συνέχεια να τις καταστήσει ανεξάρτητες από τα συγκεκριμένα πλαίσια των προβλημάτων στα οποία παρουσιάστηκαν. Θα κάνει λοιπόν τον κύκλο: Αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, συγκεκριμένα προβλήματα, αφηρημένες μαθηματικές έννοιες. Στον σχεδιασμό του μαθήματος, θα μας βοηθήσει η Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων (Θ.Δ.Κ.) η οποία συνδέει τη λύση προβλήματος με την διδασκαλία. Πιο συγκεκριμένα, η Θ.Δ.Κ. εκφράζει τις συνθήκες γένεσης και ανάπτυξης των μαθηματικών γνώσεων στα πλαίσια της διδασκαλίας, με αποτέλεσμα να βελτιώσουμε τις πιθανότητες του μαθητή να οικοδομήσει τη γνώση. Για την εφαρμογή της Θ.Δ.Κ. θα κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση την οποία συναντήσαμε και στο τέλος της παραγράφου 1.3.1 Κεφ. 2, σελ. 16: *Παρά το γεγονός των ατομικών διαφορών μεταξύ των μαθητών, η διαδικασία της μάθησης στο σχολείο παρουσιάζει συγκεκριμένες ομοιομορφίες (regularities). Οι ομοιομορφίες αυτές μας επιτρέπουν να σχεδιάσουμε μια διδακτική στρατηγική η οποία θα βελτιώσει την απόκτηση της γνώσης σε ένα αριθμό μαθητών (Douady 1991).* Η υπόθεση αυτή είναι λογική και στηρίζεται στον κοινωνικό χαρακτήρα που αποκτά η γνώση μέσα στην τάξη, όταν αυτή νοηθεί ως μια «επιστημονική» κοινότητα. Για να το διατυπώσουμε διαφορετικά, η εξατομικευμένη μάθηση εξαρτάται από τη συλλογική γνώση που αναπτύσσεται μέσα στην τάξη. Ακριβώς λόγω του γεγονότος αυτού είναι δυνατός ο σχεδιασμός σε προβλέψιμους τρόπους διδασκαλίας και μάθησης. Θα ονομάσουμε *Διδακτική Κατάσταση*, Balacheff (1984, 1989), ένα σύνολο σχέσεων που εγκαθίσταται ανάμεσα σε ένα μαθητή ή ένα σύνολο μαθητών, σε ένα περιβάλλον (που περιέχει, ενδεχομένως, διδακτικά όργανα ή άλλο διδακτικό υλικό), και στο δάσκαλο, με σκοπό τη μάθηση κάποιας γνώσης.

Διακρίνουμε τους ακόλουθους τύπους Διδακτικών Καταστάσεων (Δ.Κ.) :

<u>Καταστάσεις δράσης</u> (situations for action), οι οποίες ευνοούν την ανάπτυξη διαισθητικών αντιλήψεων ως προς κάποιο θέμα, με τη βοήθεια συγκεκριμένων ενεργειών. Ο στόχος των

καταστάσεων δράσης είναι η εμπειρική - πρώτη - προσέγγιση των ιδεών και εννοιών και χρησιμεύουν ως μοντέλα ενεργειών απαραίτητα για την εισαγωγή διδακτικών διαδικασιών.
Καταστάσεις διατύπωσης (situations for formulation), οι οποίες ευνοούν την προσπάθεια για ρητή περιγραφή ή ανακοίνωση προς άλλους των αντιλήψεων ή των αποφάσεων του υποκειμένου.
Καταστάσεις επικοινωνίας (situations for communication), καταστάσεις διατύπωσης με σαφείς κοινωνικές διαστάσεις: Συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων.
Καταστάσεις επικύρωσης (situations for validation), οι οποίες απαιτούν από το μαθητή να θεμελιώσει, να αποδείξει τους ισχυρισμούς του και να εκφράσει σαφώς τις διαδικασίες που χρησιμοποιεί για την επίλυση του προβλήματος.
Καταστάσεις απόφασης (situations for decision), είναι καταστάσεις επικύρωσης στις οποίες υπάρχει μια εσωτερική ανάγκη για ακρίβεια και σαφήνεια, χωρίς όμως να απαιτείται ρητά μια απόδειξη.
Καταστάσεις θεσμοποίησης (situations for institutionalization), οι οποίες αποσκοπούν στο να δώσουν το χαρακτήρα «καθιερωμένης» γνώσης -γνώσης αποδεκτής από τη Μαθηματική Κοινότητα - σε προσωπικές γνώσεις που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων της τάξης.
Όπως έχουμε επισημάνει, οι Δ.Κ. είναι εργαλεία σχεδιασμού. Ας δούμε τώρα ζητήματα που αφορούν στον ίδιο το σχεδιασμό.

Συνέπειες της θεωρίας των Δ. Κ.

1. Μας βοηθάει να προβλέψουμε τις δυσκολίες των μαθητών.
2. Ερμηνεύει κάποιες ανυπέρβλητες δυσκολίες της διδασκαλίας ή κάποια αποκλίνοντα φαινόμενα (π.χ. η παρουσία εμποδίων).
3. Διασαφηνίζει τα γνωστικά και επιστημολογικά προαπαιτούμενα του μαθητή.
4. Παράγει καταστάσεις ανακοινώσιμες και εφαρμόσιμες.

4.5.2. Η Υποθετική Μαθησιακή Τροχιά (Martin Simon, 1995).

Με τον όρο Υ.Μ.Τ. εννοούμε την πρόβλεψη του δασκάλου για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να αναπτυχθεί η μάθηση. Είναι υποθετική, επειδή η πραγματική τροχιά (πορεία) που θα πάρει η μάθηση στην τάξη δεν είναι βέβαιη εκ των προτέρων. Η Υ.Μ.Τ. αποτελείται από τις ακόλουθες συνιστώσες:

1. Μαθησιακός στόχος: Ορίζει μια κατεύθυνση για την πορεία της μάθησης.
2. Μαθησιακές δραστηριότητες.
3. Υποθέσεις για τη διαδικασία μάθησης: Πρόβλεψη για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η σκέψη και η κατανόηση των μαθητών.

Η δημιουργία και η συνεχής τροποποίηση της Υ.Μ.Τ. είναι το κεντρικό θέμα του σχεδιασμού μια διδασκαλίας. Η έννοια της υποθετικής τροχιάς δε σημαίνει ότι ο δάσκαλος προωθεί πάντα έναν στόχο κάθε φορά ή ότι θεωρεί μόνον μια τροχιά. Αντίθετα, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας στόχος και μια λογική στην προσέγγισή του. Οι προϋποθέσεις για το σχεδιασμό μιας συγκροτημένης Υ.Μ.Τ. είναι:

1. Οι μαθηματικές γνώσεις του δασκάλου.
2. Οι γνώσεις του για τις για τα είδη των δραστηριοτήτων που έχει στη διάθεσή του.
3. Οι υποθέσεις που κάνει για τις γνώσεις των μαθητών του γενικά αλλά και για τις ειδικές γνώσεις τους ως προς ένα συγκεκριμένο θέμα.
4. Οι θεωρίες για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών που έχει υιοθετήσει συνειδητά ή όχι.

Προσοχή. Επιστρέφοντας και πάλι στο βασικό ζήτημα των Δ. Κ., τονίζουμε ότι οι διδακτικές καταστάσεις πρέπει να σχεδιάζονται προσεκτικά, προκειμένου να αποφεύγονται οι ακόλουθες ανεπιθύμητες συνέπειες:

1. *Να αποφεύγονται καταστάσεις που οδηγούν σε γνώση «φυσιολογική» και «αναμενόμενη». Γιατί έτσι χάνονται τα κίνητρα της μάθησης.*

2. *Να αποφεύγονται καταστάσεις μέσα από τις οποίες η γνώση φαίνεται να παράγεται με διάφορα «τεχνάσματα», γιατί έτσι χάνεται το νόημα της γνώσης.*

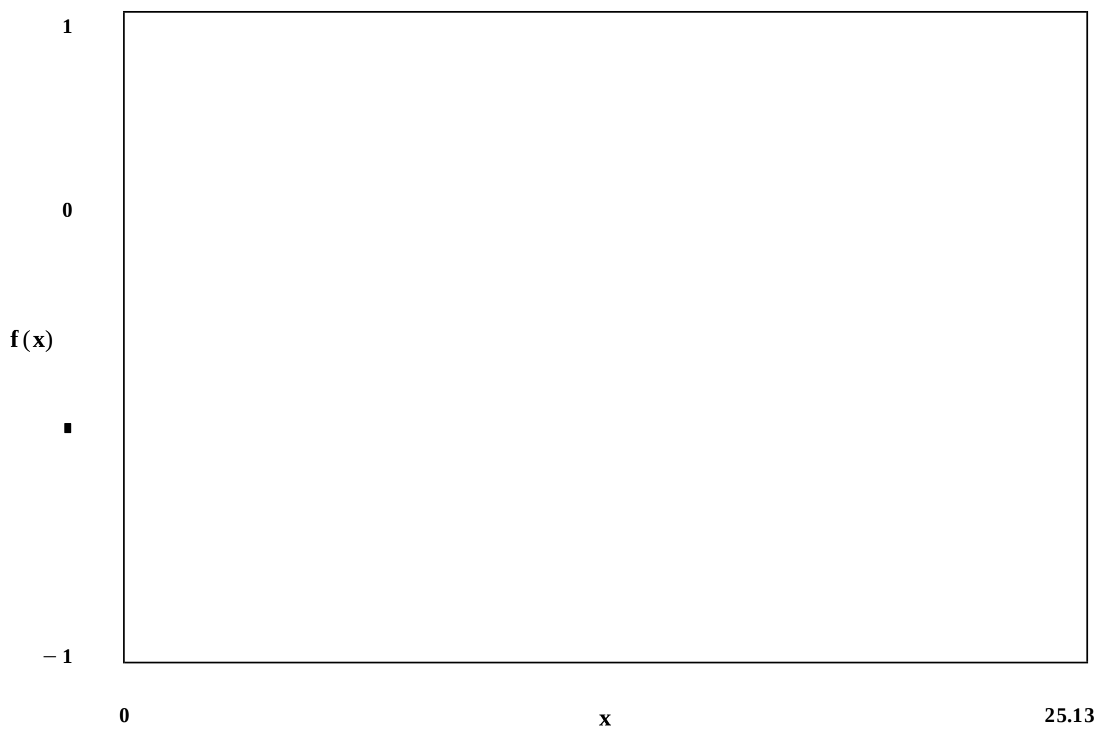
ΠΡΟΣΟΧΗ: ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όπως παρατηρήσαμε στις σημειώσεις του πρώτου τετραμήνου, Κεφ. 3^{o} στο τέλος της εισαγωγής, η επικοινωνιακή προσέγγιση μας δίνει μια νέα οπτική για την λύση προβλήματος. Την βλέπουμε διαμέσου της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, άρα επηρεάζεται πολύ από τον διάλογο. Επομένως, πρέπει να τροποποιήσουμε την αντίληψη ότι η λύση προβλήματος αποτελείται από μια σταθερή σειρά τρόπων σκέψης και ενεργειών. Για παράδειγμα, βλέπε την μέθοδο του Polya ή την ανάλυση της μεθόδου στην παράγραφο 1.3. οι οποίες δημιουργούν αυτή την αντίληψη. *Όμως, η μέθοδος του Polya μας δίνει έναν τρόπο με τον οποίο μπορούμε να συνδέσουμε την υπάρχουσα γνώση με την νέα προκειμένου να λύσουμε ένα πρόβλημα που το συναντάμε για πρώτη φορά. Από την άποψη αυτή η μέθοδος εξακολουθεί να είναι πολύ χρήσιμη και μπορεί να συνδεθεί με το πλαίσιο στήριξης (scaffolding-βλέπε σελ. 79).*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

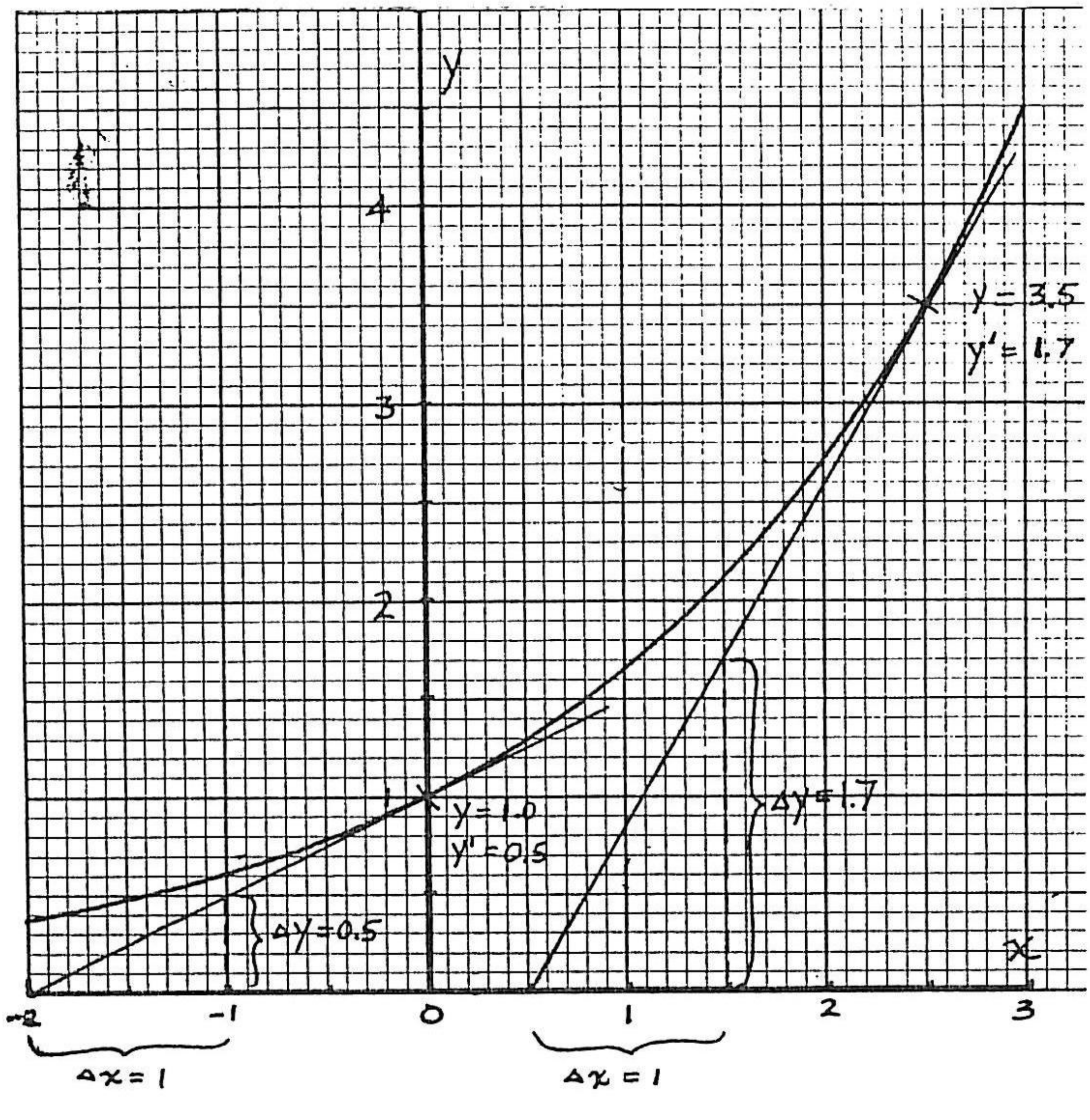
1. (α). Να επισημάνετε ένα φαινόμενο το οποίο να περιγράφεται μαθηματικά από την ακόλουθη καμπύλη.

(β). Να βρείτε την συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση την καμπύλη αυτή.



2. (α). Στο ακόλουθο σχήμα, να εξετάσετε αν η καμπύλη είναι γραφική παράσταση εκθετικής συνάρτησης και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(β). Αν είναι, να βρείτε την εξίσωσή της.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Balacheff, N., 1984 « French Research Activities in Didactics of Mathematics - Some key words and related references», in Steiner et al (eds).

Balacheff, N., 1989, «Construction and observation of a didactical situation: the sum of the angles of a triangle», in A. Bell et al (eds).

Balacheff, N. 1990, «Towards a problematique for research on mathematics teaching», Journal for Research in Mathematics Education, 21 (4), 258-272.

Bell, A, et all, 1989, «The design of Teaching», Shell Centre for mathematical education, Univ. of Nottingham.

Biehler,R., Scholz,R., Strasser,R. and Winkelman, B., (eds), 1994, «Didactics of Mathematics as a scientific discipline», Kluwer.

Bishop, A., J., Mellin-Olsen, S., and Dormolen, J., Van, 1991, «Mathematical knowledge: Its growth through teaching», Kluwer.

Blum, W., Niss, M., and Huntley, I., (eds.), 1989, «Modelling, Applications and Applied Problem Solving-Teaching Mathematics in a Real Context», Horwood, Chichester.

Blum, W., and Niss, M., 1989, «Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects-State,Trends and Issues in Mathematics Instruction», in Blum, W., Niss, M., and Huntley, I., (eds.), pp.1-21.

Blum, W., and Niss, M., 1991, «Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and links to Other Subjects - State, trends and issues in Mathematics Instruction», Educational Studies in Mathematics 22, pp.37-68.

Brousseau, G., Davis, R., B., and Werner,T., 1986, «Observing students at work», in Christiansen, B., et al, (eds), 1986.

Brown, M., 1979, «Cognitive Development and the Learning of Mathematics», in Floyd (ed).

Christiansen, B., Howson, A., G., and Otte, M., (eds), 1986, «Perspectives on Mathematics Education», Reidel.

Cobb,P., and Steffe,L.,P.,1993, «The constructivist researcher as a teacher and model builder», Journal for Research in Mathematics Education, vol.14, pp. 83 - 94.

Davis,P. and Hersh,R.,1981, «The Mathematical Experience», Penguin Books

De Lange, J., 1987, «Mathematics, Insight and Meaning», OW & OC, Utrecht.

Douady, R., 1991, «Tool, Object, Setting, Window», in Bishop et al.

Dunham, P., and Osborne, A., 1991, «Learning how to see: Students' graphing difficulties», Focus on Learning Problems in Mathematics, vol. 13, No 4, pp. 35-49.

Dubinsky, Ed, and Harel, G., (eds), «The concept of Function, aspects of epistemology and pedagogy», MAA Notes, vol. 25.

Ernest, P., 1989, «Philosophy,Mathematics and Education», in Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol.20, No 4.

Floyd, A., (ed), 1979, «Cognitive Development in the School Years», The Open Univ. Press.

Galbraith, P., 1988, «Mathematics Education and the Future: A long wave of Change», For the Learning of Mathematics, vol. 8, No 3.

Galovich, S., 1993, «Doing Mathematics», Saunders.

Grouws,D., (ed), 1992, «Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning», NCTM.

Harre, R. and Lamb, R., (eds), 1986, «The Dictionary of Developmental and Educational Psychology», Blackwell Reference.

Herder, V., 1982, Λεξικό Σχολικής Παιδαγωγικής, εκδόσεις Αφοι Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη.

Hiebert, J., and Behr,M., (eds), 1989, «Number Concepts and Operations in the

Middle Grades», LEA-NCTM.
Hobbs,D., 1988, «Enterprising Mathematics Course», Teaching Mathematics and its Applic., vol. 7, No 2.
Howson, G., Keitel, C., Kilpatrick, J.,1982, «Curriculum development in mathematics" Cambridge Univ. Press.
ICMI Study series, 1988, «Shool Mathematics in the 1990's», Cambridge Univ.Press.
Janvier, C., (ed), 1987, «Problems Of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics», Lawrence Erlbaum Associates.
Kaiser-Messmer,G., 1991, «Application - orientated Mathematics Teaching: A survey of the Theoretical Debate», in Niss, M., Blum, W., and Huntley, I., (eds.), pp.83-92.
Καλαβάσης, Φ. και Μεϊμάρης, Μ., (eds), 1992, «Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών», Αθήνα, εκδόσεις Προτάσεις.
Kilpatrick, J., 1985, «A retrospective account of the past 25 years of research on teaching Math. Problem Solving», in Silver, E. (ed).
Κλαουδάτος, Ν., 1989, «Οι πρόσφατες εξελίξεις στη Λύση Προβλημάτων, στη Μοντελοποίηση και στις εφαρμογές των Μαθηματικών», Ευκλείδης Γ, Νο 23, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
Κλαουδάτος, Ν., 1990, «Μοντελοποίηση: Ενα ισχυρό διδακτικό εργαλείο», Ευκλείδης Γ, τόμος 7, Νο 25, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
Κλαουδάτος, Ν., 1992, «Η Μοντελοποίηση στη Διδακτική Πράξη», στο Καλαβάσης και Μεϊμάρης (eds).
Κλαουδάτος, Ν., και Παπασταυρίδης Στ., 1996, «Τα Μαθηματικά του σχολείου και ο πραγματικός Κόσμος: Πως θα συνδυάσουμε Θεωρία και Πράξη», στο «Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών ΙΙΙ», GUTENBERG-Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 1996.
Klaoudatos N., 1994, «Modelling - orientated teaching(a theoretical development for teaching mathematics through the modelling process)», Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol. 25, No 1, pp. 69-79.
Κομίλη Α., χωρίς χρονολογία, «Σύγχρονη Ψυχολογία», εκδόσεις Λιβάνη.
Laborde, C. 1994, «Working in small groups: A learning situation?», in Biehler, R., Scholz, R., Strasser, R., and Winkelman, B., (eds), pp. 147-158.
Lerman,S.,1989, «Constructivism,Mathematics and Mathematics Education», Educ Stud. in Math., vol.20, pp.211-223.
Lesh, R., and Landau, M., 1983, «Conceptual Models and applied mathematical problem solving research», in Lesh and Landau (eds).
Lesh, R., and Landau, M., (eds), 1983, «Acquisition of mathematics concepts and processes», New York: Academic Press.
Lester, F., K., Jr., 1985, «Methodological Considerations in research on Mathematical Problem-Solving Instruction», in Silver (ed), 1985.
Lorenz, J., H., 1988, «Pathologies in children's learning and its theoretical implications», in Steiner and Vermandel, (eds).
Marshall, S., P., 1995, «Schemas in problem solving», Cambridge Univ. Press.
Martin A. Simon, 1995, «Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective», Journal for Research in Mathematics Education, vol.26, pp. 114-145.
Metraux, A., 1986, «Genetic epistemology», in Harre and Lamb, (eds).
Moreno-Armella, L., and Waldegg, G., 1993, «Constructivism and mathematics education», Int. J. Math. Educ. Sci. Tchnol., vol. 24, No 5, pp. 653-661.
NCTM, 1989, «Curriculum and Evaluation Standards».
Niss, M., Blum, W., and Huntley, I., (eds.), 1991, «Teaching of Mathematical Modelling and Applications», Horwood, Chichester.

O'Donnell, J., M., 1985, «The origins of Behaviorism», NY University Press.
Ohlsson,S., 1989, «Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts», in Hiebert, J., and Behr, M., (eds), pp.53-92.
Otte, M., 1982, «Fachdidaktik als Wissenschaft», IDM-Occasional Paper 20, Bielefeld.
Owens, J. E. 1992. «Cooperative learning in secondary education: Research and theory», Manuscript submitted for publication.
Polya, G., 1965, «Mathematical Discovery», Wiley, 2 vols.
Polya, G., 1973 a, «How to solve it», Princeton Univ. Press.
Polya, G., 1973 b, «Induction and analogy in Mathematics», Princeton Univ. Press.
Rogerson, A., 1986, «The Mathematics in Society Project: a new conception of mathematics», Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol. 17, No 5, pp. 611-616.
Schoenfeld, A. H., 1983, «Episodes and executive decisions in mathematical problem solving», in Lesh, R., and Landau, M., (eds).
Schoenfeld, A., H., 1985, «Mathematical Problem Solving», Academic Press.
Schoenfeld, A., H., (ed), 1987, «Cognitive Science and Mathematics Education», Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum.
Schoenfeld, A., H., 1987, «Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview», in Schoenfeld (ed), 1987.
Schoenfeld,A.,H.,1992, «Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics», in Grouws, (ed), 1992.
Schoenfeld, A., H., 1994, «A Discourse on methods», Journal for Research in Mathematics Education, vol.25, No6, pp.697-710.
Sherman, H., 1972, «Common Elements in New Mathematics Programs: Origins & Evolution», Teachers College Press, C.U.
Sierpinska, A., 1992, «On understanding the notion of Function», in Dubinsky et al (eds), 1992.
Silver, A., (ed), 1985, «Teaching and Learning Mathematical Problem-Solving: Multiple Research Perspectives», L.E.A.
Silver, E., A., 1987,«Foundations of Cognitive Theory and Research for Mathematics Problem-Solving instruction», in Schoenfeld (ed) 1987.
Skinner, B., F., «Teaching machines», in «Science», No 128, pp. 969-977.
Steiner, H. G., 1984, «Theory of Mathematics Education (TME)», IDM- Occasional Paper 54, Bielefeld.
Steiner, H.G. and Vermandel, A.,(eds),1988, «Foundations and methodology of the discipline mathematics education (Didactics of Mathematics), Proceedings of the 2nd TME Conference»,Bielefeld,July 15-19,1985.
Steffe, L., P., and Kieren, T., 1994, «Radical constructivism and mathematics education», Journal for Research in Mathematics Education, vol.25, pp.711-733.
The School Mathematics Project, 1991, «16-19 Mathematics», Cambridge Univ. Press.
Τουμάσης, Μ.,1994, «Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών», Gutenberg.
Treilibs, V., Burkhard, H., Brian, L., 1980, «Formulation Processes in Mathematics Education», Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.
Vermandel, A. and Steiner, H. G., 1988, «Theory of mathematics education, Proceedings of the third international conference", Antwerp, July 11-15, 1988.
Varela, F., Thompson, E., and Rosch, E., 1991, «The embodied mind», Cambridge, MA: M.I.T. Press.
Verstappen, P. F. L., 1988, «The Pupil as a Problemsolver-After an image of man in Mathematics Education», in Steiner and Vermandel, (eds), 1988.

Vidakovic, D. 1993, «Cooperative learning: Differences between group and individual processes of construction of the concept of inverse function», unpublished doctoral dissertation, Purdue University, Indiana, USA.

Von Glaserfeld, E., 1987, «Learning as a Constructive Activity», in Janvier, (ed).

Wilson, J., Fernandez, M., L., and Hadaway, N., 1994, «Problem Solving: Managing it all», The Mathematics Teacher, vol. 87, No 3, pp.195-199.

Yackel, E., Cobb, P., and Wood, T., 1991, «Small- group interactions as a source of learning opportunities in second- grade mathematics», Journal for Research in Mathematics Education, 22 (5), pp. 390- 480.