

Κεφάλαιο 3ο

Βασικές αρχές της θεωρίας του Vygotsky: Η επικοινωνιακή προσέγγιση και η ‘πλαισιοθετημένη μάθηση’ (situated learning)

1. Εισαγωγή: Τα μειονεκτήματα της Γνωσιακής Θεωρίας

Μέχρι σήμερα έχουμε εστιάσει την προσοχή μας στις Κονστρουκτιβιστικές αντιλήψεις γενικά, οι οποίες δίνουν προτεραιότητα στη δράση του υποκειμένου και στην εσωτερική ανάδειξη του νοήματος ως ένα επιστημολογικό πλαίσιο ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών. Ταυτόχρονα, διατυπώσαμε τα βασικά ‘εργαλεία’ της Γνωσιακής Θεωρίας (ΓΘ), τα οποία μας επιτρέπουν να κατανοούμε τα μοντέλα των νοητικών διεργασιών των μαθητών. Όμως, ένα από τα προβληματικά σημεία της θεωρίας αυτής είναι το γεγονός ότι ο μαθητής θεωρείται ως άτομο το οποίο προσπαθεί να δώσει νόημα στις εμπειρίες του, χωρίς να εξετάζεται η σχέση του με το δάσκαλο και με τους υπόλοιπους μαθητές της τάξης. Χωρίς δηλαδή να εξετάζεται η ανάπτυξη της γνώσης σε σχέση με τα φαινόμενα επικοινωνίας στην τάξη των Μαθηματικών: ‘Ο μαθητής μιλάει, ο καθηγητής ακούει’. Πιο συγκεκριμένα, ένα μεγάλο πρόβλημα είναι η ερμηνεία των φαινομένων στην τάξη. Εστιάζοντας την προσοχή στον μεμονωμένο μαθητή και στις νοητικές του διεργασίες, αγνοούμε ότι αυτός είναι ενταγμένος σε ένα περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται φαινόμενα επικοινωνίας που τον επηρεάζουν. Στο πλαίσιο της ΓΘ, το καλύτερο που μπορούμε να επιτύχουμε είναι ότι η ερμηνεία που ο μαθητής δίνει στις λέξεις και τις προτάσεις των άλλων εξετάζονται και συγκρίνονται σε σχέση με αυτές που ο ίδιος έχει αναπτύξει, χωρίς να δίνουμε την σημασία που πρέπει στα επικοινωνιακά φαινόμενα και στις συνέπειές τους. Ακόμα και αν θεωρήσουμε τον ‘Κοινωνικό Κ.’, σύμφωνα με την τρίτη αρχή που περιγράφεται στην σελ. 14, η λειτουργία της τάξης ως ‘επιστημονικής κοινότητας’ απαιτεί ένα νέο θεωρητικό πλαίσιο. Γενικά στις Κονστρουκτιβιστικές αντιλήψεις, προηγείται ο εγωκεντρικός λόγος ο οποίος εξελίσσεται από εσωτερικό σε κοινωνικό λόγο.

Ένα βασικό μειονέκτημα της ΓΘ, το οποίο παρουσιάζεται σε πολλές έρευνες, είναι οι συνέπειες της οπτικής γωνίας των εσωτερικών αναπαραστάσεων. Έτσι, ενώ οι ερευνητές έχουν μάθει πολλά χρησιμοποιώντας την ΓΘ, παράλληλα έδωσαν μεγάλη έμφαση στις εξατομικευμένες εκδοχές των προβλημάτων μάθησης. Και ακριβώς επειδή έχουν εστιάσει στις ατομικές διαδικασίες επεξεργασίας πληροφοριών, τα νοητικά αναπαραστασιακά πλαίσια οδήγησαν σε συμπεράσματα όπως π.χ. ότι κάποια άτομα (μαθητές) έχουν *εσωτερικά προβλήματα μάθησης*, ότι έχουν *έλλειψη κατάλληλων νοητικών εργαλείων*, ή ότι δεν έχουν *τις ικανότητες λογικής σκέψης* σε συγκεκριμένες περιοχές της μαθηματικής γνώσης.

Σήμερα βρίσκονται στο προσκήνιο επικοινωνιακές και πολιτισμικές απόψεις που επιχειρούν να ερμηνεύσουν την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών στην βάση των επικοινωνιακών φαινομένων στην τάξη και στην αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου – μαθητή και μαθητών μεταξύ τους. Από την άποψη αυτή, θα εξετάσουμε την επικοινωνιακή προσέγγιση του Vygotsky και μια ειδική εκδοχής της που αναπτύχθηκε στην δεκαετία του ’90, την πλαισιοθετημένη μάθηση.

Η επικοινωνιακή προσέγγιση, όμως, μας έδειξε ένα μεγάλο πρόβλημα που υπάρχει στην αντίληψη που είχαμε για την λύση προβλήματος. Διαμέσου της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, όπου οι μαθητές συνεργάζονται για την επίλυση ενός προβλήματος, διαπιστώθηκε ότι η λύση προβλήματος είναι μια μαθηματική διαδικασία που γίνεται στον πραγματικό κόσμο δηλαδή με πραγματικούς ανθρώπους,

τους μαθητές μας, με τις αβεβαιότητες, τους δισταγμούς, τα λάθη, τις παραλείψεις, και δεν μπορεί να ακολουθεί συγκεκριμένα 'σενάρια' λύσης προβλήματος, αμετακίνητα και πλήρως προδιαγεγραμμένα, βλέπε και Sfard, σελ.43. Δηλαδή, η μέθοδος του Polya εξαρτάται από την τροπή που θα πάρει ο διάλογος και η οποία θα οδηγήσει σε επιτυχές ή όχι αποτέλεσμα. Το θέμα αυτό θα το διαπραγματευτούμε στο 2^ο τετράμηνο.

2. Η Επικοινωνιακή προσέγγιση (ή και Κοινωνικο-Ιστορική προσέγγιση)

Τον Vygotsky, ως ψυχολόγο, τον απασχόλησαν μια σειρά από προβλήματα όπως το πρόβλημα της δομής και της λειτουργίας της συνείδησης, το ζήτημα της προσωπικότητας και της διαδικασίας για τη διαμόρφωσή της καθώς και η συνάφεια μάθησης και ανάπτυξης, Δαφέρμος (2002, σελ. 41). Από αυτά θα μας απασχολήσει μόνον το τελευταίο και μάλιστα από την οπτική γωνία της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Για τη σύνδεση μάθησης και ανάπτυξης, ο V. ανέπτυξε μια σειρά από γνωστικά ή ψυχολογικά 'εργαλεία' τα οποία, συνοπτικά, είναι τα ακόλουθα:

2.1. Ο ρόλος της γλώσσας

Το πιο σημαντικό σύστημα συμβόλων είναι η ίδια η γλώσσα. Η γλώσσα έχει κεντρική θέση στις κοινωνιολογικές θεωρίες, γενικώς, επομένως και στο θεωρητικό σύστημα του V.

Πιο συγκεκριμένα, για τον V η επικοινωνία είναι ένα πολιτισμικό γεγονός: Αν υπάρχουν πολιτισμοί υπάρχουν λόγω της δυνατότητας επικοινωνίας και της δέσμευσης ή πρόνοιας για γνώση και αξίες από γενιά σε γενιά. Ταυτόχρονα, η γλώσσα είναι ένα πολιτισμικό εργαλείο, ένα ιδιαίτερο όργανο επικοινωνίας το οποίο συσχετίζεται με τη σκέψη.

Η πιο σημαντική ιδιομορφία του γραπτού λόγου είναι ο συνειδητός χαρακτήρας του, το γεγονός ότι σχεδιάζεται και βασίζεται σε ένα αυθαίρετο σύστημα συμβόλων. Η υιοθέτηση ενός αλφαβήτου είναι μια συνειδητή διαδικασία, ενώ οι αλλαγές στην προφορική γλώσσα, οι οποίες συντελούνται με την πάροδο του χρόνου μέσα στις κοινωνίες, παραμένουν ασυνείδητες. Επίσης, εσκεμμένη και συνειδητή είναι η υιοθέτηση κάποιας τεχνικής σημειογραφίας, όπως για παράδειγμα της μαθηματικής, η οποία είναι συχνά αντικείμενο διαλόγου.

Ο Piaget και ο Vygotsky θεωρούν ότι ο ανθρώπινος νους φαίνεται να εξελίσσεται από την πρώιμη σκέψη και γλώσσα του παιδιού, στις αποπλαισιωμένες λογικές και επιστημονικές έννοιες (υποθετικοπαραγωγικοί συλλογισμοί), όπου η γλώσσα έχει σημαντικό, αλλά διαφορετικό ρόλο, σύμφωνα με την κάθε θεωρία. Προκειμένου να πάρουμε απαντήσεις για τον ρόλο της γλώσσας στην καθημερινή διδακτική πρακτική στα πλαίσια της θεωρίας του V, θα χρειαστούμε στοιχεία από την θεωρία του Bruner για τον τρόπο πρόσκτησης της γλώσσας καθώς και τις ακόλουθες δύο αρχές του Wittgenstein:

1. Το νόημα μιας λέξης (ή μιας έννοιας ή μιας μαθηματικής διατύπωσης) βρίσκεται στη χρήση της.

Για παράδειγμα, όταν ρωτάμε τον συνομιλητή μας 'τι εννοείς;' ουσιαστικά τον ρωτάμε 'με ποιον τρόπο χρησιμοποιείς αυτή την έκφραση' ή 'σε ποιο πλαίσιο (context) εντάσσεις τη φράση σου;'. Η γλώσσα επομένως θεωρείται περισσότερο ως δραστηριότητα, μια κοινωνική πρακτική, όπου τα νοήματα των φράσεων σημασιοδοτούνται από τον τρόπο που τις χρησιμοποιούμε.

2. Η καθημερινή γλώσσα είναι επαρκής.

Η δεύτερη αρχή σημαίνει ότι είναι καλύτερο κάποιος να προσπαθήσει να κατανοήσει τη γλώσσα π.χ. των μαθητών του, παρά να επισημάνει τα λογικά της σφάλματα και να απαιτήσει να διορθωθούν.

Στην θεωρία του V οι διάφοροι τύποι αλληλεπίδρασης, όπου παράγονται τα νοήματα, έγιναν αντικείμενο έρευνας. Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι τύποι αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός αναπτυσσόμενου παιδιού και ενός ενήλικα, αλληλεπιδράσεις μεταξύ ενός μαθητευόμενου ή μιας ομάδας μαθητευομένων και ενός δασκάλου, καθώς επίσης αλληλεπιδράσεις μεταξύ 'ισοδυνάμων' ατόμων.

Έτσι, η γλώσσα εξακολουθεί να έχει σημαντικό ρόλο, αλλά τώρα θεωρείται όχι ως σύστημα σημείων-συμβόλων αλλά ως *κοινωνική πρακτική*. Πρόκειται, δηλαδή, για μια γλώσσα σε δράση ή η γλώσσα ως μέσο για επίτευξη γνωσιακών, κοινωνικών, μαθησιακών και άλλων στόχων. Είναι ένα όχημα για να κάνουμε πράγματα με τους άλλους και για τους άλλους, επομένως η γλώσσα έχει έναν διαπραγματευτικό (discursive) χαρακτήρα.

Στα επόμενα θα διευκρινίσουμε τους όρους αυτούς, στηριζόμενοι στις απόψεις του Bruner και της Sierpinska, όπως περιέχονται στα Sierpinska (1997, 98).

2.1.1. Η γλώσσα ως κοινωνική πρακτική (Bruner)

Ο Bruner εισήγαγε την έννοια της αλληλεπίδρασης (interaction) και με αυτόν τον τρόπο εστίασε την προσοχή του στα αποτελέσματα των αλληλεπιδράσεων μεταξύ ενός ενήλικου, ο οποίος ανήκει σε ένα πολιτιστικό πλαίσιο, και ενός παιδιού το οποίο μεγαλώνει. Τα αποτελέσματα είναι συγκεκριμένα πρότυπα (standards) επικοινωνίας σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Η ουσία των ιδεών του Bruner, κατά την Sierpinska, είναι ως εξής:

Όταν το μικρό παιδί μαθαίνει την μητρική του γλώσσα, δε μαθαίνει να αντιστοιχεί λέξεις σε αντικείμενα, σε καταστάσεις ή σε ενέργειες. Το παιδί μαθαίνει μορφές κοινωνικής συμπεριφοράς σε διάφορες κοινωνικές καταστάσεις στις οποίες η γλώσσα έχει σημαντικό ρόλο: χαιρετισμός, πρόσκληση, παράκληση, προσφορά, αναζήτηση, διαφωνία, παίζοντας παιχνίδι, κτλ. Στην αρχή θα συμμετέχει σε μη αρθρωμένους ήχους και κυρίως σε χειρονομίες. Αλλά κάθε 'κατόρθωμα' του παιδιού προς την κατεύθυνση της άρθρωσης λόγου και σύνταξης θα συναντήσει μια σαφή επιδοκμασία από τον ενήλικα, η οποία στέλνει το μήνυμα ότι αυτό είναι που θα αναμένεται στο εξής από το παιδί: Η νέα αυτή συμπεριφορά θα γίνει ένα νέο πρότυπο. Για παράδειγμα, Ο Πέτρος έμαθε να λέει 'μπισκότα'. Όταν ζητήσει μπισκότα και πει 'μμμ', η μητέρα του αρνείται να του δώσει επιμένοντας να πει ο Πέτρος την κατάλληλη λέξη. Τα πρότυπα θα αλλάζουν καθώς ο Πέτρος θα κάνει και άλλα κατορθώματα και από κάποιο σημείο και μετά η μητέρα του δε θα δέχεται τίποτε άλλο εκτός από μια πλήρη πρόταση.

Σύμφωνα με τον Bruner, η κατάκτηση της γλώσσας αρχίζει πριν το παιδί προφέρει τις πρώτες του λέξεις. Αρχίζει όταν η μητέρα και το παιδί δημιουργούν μια προβλέψιμη μορφή αλληλεπίδρασης που χρησιμοποιείται ως ένας μικρόκοσμος για επικοινωνία και την εγκατάσταση μια πραγματικότητας αμοιβαία αποδεκτής και κατανοητής. Οι διαπραγματεύσεις που συμβαίνουν σε τέτοιες μορφές συνιστούν την ευκαιρία διαμέσου της οποίας το παιδί κατακτά τη γραμματική, το πως ομιλεί και το τι εννοεί καθώς και τον τρόπο που εκφράζει τις προθέσεις, τις ανάγκες, τις επιθυμίες του κτλ.

Προκειμένου να αποκτήσει τις πρώτες του εμπειρίες με τη γλώσσα, το παιδί πρέπει να βρεθεί σε κοινωνικές σχέσεις τέτοιες ώστε να λειτουργούν σύμφωνα με τη χρήση της γλώσσας – να συνδέει τις κοινές επιδιώξεις, να κάνει εξειδικεύσεις και να εγκαθιστά προϋποθέσεις. Μια τέτοια κοινωνική σχέση θα ονομαστεί format. Η

format είναι ένας μικρόκοσμος βασισμένος σε κανόνες στον οποίο ο ενήλικας και το παιδί κάνουν πράγματα για, και με, τον άλλο. Στην πιο γενική της μορφή η format είναι το εργαλείο για την τυποποίηση των ανθρώπινων αλληλεπιδράσεων. Μια format απαιτεί τυπικά μια πιθανή αλληλεπίδραση μεταξύ, τουλάχιστον δύο συμμετεχόντων: Πιθανή με την έννοια ότι οι αντιδράσεις κάθε συμμετέχοντα μπορεί ναδειχθεί ότι εξαρτώνται από μια προηγούμενη αντίδραση του άλλου. Κάθε μέλος του ζεύγους έχει ένα στόχο και ένα σύνολο μέσων για την επίτευξή του, έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες: *Πρώτον*, οι διαδοχικές αντιδράσεις ενός συμμετέχοντος συνεισφέρουν προς την επίτευξη του στόχου και *δεύτερον*, υπάρχει μια διακριτή στάση στη σειρά των αντιδράσεων που δείχνει ότι ο τελικός στόχος έχει πραγματοποιηθεί. Οι στόχοι των συμμετεχόντων δεν είναι αναγκαίο να είναι ίδιοι. Απαιτείται μόνον οι συνθήκες τόσο των διαπροσωπικών όσο και των προσωπικών αντιδράσεων να έχουν εκπληρωθεί. Οι formats επομένως, οριζόμενες τυπικά με αυτήν την έννοια, αντιπροσωπεύουν μια απλή στιγμή ενός ‘σεναρίου’ ή, το ίδιο, ενός ‘διαπραγματευτικού επεισοδίου’.

Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζουμε τη θεωρία αυτή στη μάθηση των Μαθηματικών είναι ο ακόλουθος:

Πριν ο μαθητής γίνει ικανός να διατυπώσει έναν ορισμό ή ένα θεώρημα, εισάγεται σε έναν μικρόκοσμο αλληλεπιδράσεων, μερικές από τις οποίες προκαλούνται από τον δάσκαλο, αν και οι περαιτέρω μορφές τους εξαρτώνται από τις πρωτοβουλίες του μαθητή. Η μορφή των αλληλεπιδράσεων καθορίζει τα όρια και τους κανόνες για το τι θα πει ο μαθητής ή ο δάσκαλος, πώς θα το πει και πότε. Ωστόσο όλοι αυτοί οι κανόνες έχουν ένα διαπραγματευτικό χαρακτήρα. Διαμορφώνονται διαμέσου κάποιων περισσότερο ή λιγότερο σαφών και άμεσων διαπραγματεύσεων ανάμεσα στον δάσκαλο και το μαθητή και μεταξύ των ίδιων των μαθητών. Το μονοπάτι προς τη μαθηματική σκέψη οδηγεί, διαμέσου νύξεων, στη μαθηματική διαπραγμάτευση, καθώς, σταδιακά, κατανοούμε ποιες είναι οι προθέσεις πίσω από συγκεκριμένες εκφράσεις, ποιες είναι οι κοινές προϋποθέσεις. Αυτά μαθαίνονται από την αλληλεπίδραση με εκείνους που νομιμοποιούνται να θέτουν τα πρότυπα (standards) της μαθηματικής διαπραγμάτευσης, οι οποίοι συνήθως είναι οι δάσκαλοι των Μαθηματικών. Ο μαθητής κάνει λάθη και τα διορθώνει σύμφωνα με τις υποδείξεις του δασκάλου, διαπραγματεύεται τον τρόπο του να λέει κάτι και τον τρόπο του να σκέφτεται ανταλλάσσοντας επιχειρήματα με το δάσκαλο και με άλλους μαθητές. Αλλά το κοινωνικό και το θεσμικό πλαίσιο αυτών των αλληλεπιδράσεων, το σχολείο, οι αρχές υπεράνω του δασκάλου κτλ., επιβάλλουν όρια τόσο στην διαπραγμάτευση όσο και στην επιχειρηματολογία.

Για παράδειγμα, σε μια τάξη των Μαθηματικών, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ο δάσκαλος διαμορφώνει, ή κατευθύνει, την ερμηνεία των μαθητών σε μια εικόνα που δείχνει τρία πουλιά να κάθονται σε ένα δένδρο ενώ δύο άλλα μόλις έχουν σηκωθεί και πετούν μακριά από το δένδρο, ερμηνεύοντας την εικόνα ως την πρόταση $5-2=3$. Η ερμηνεία αυτή, προφανώς, δεν είναι η πιο λογική γιαυτό και οι μαθητές διατυπώνουν διάφορες προτάσεις. Αλλά είναι αρκετό ένας ή δύο μαθητές να πουν κάτι ‘κοντά’ στην ερμηνεία αυτή και ο δάσκαλος θα την επαναλάβει δυνατά, θα την θέσει με κάποιο τρόπο μπροστά σε όλους ως ένα μοντέλο ερμηνείας, ένα πρότυπο για να το εφαρμόζουν και να το ακολουθούν. Ανάμεσα στο δάσκαλο και τους μαθητές δημιουργείται μια δραστηριότητα διαμόρφωσης, η οποία εγκαθιστά τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει η εικόνα να γίνει κατανοητή καθώς και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές θα πρέπει, στο εξής, να συμπεριφέρονται σε παρόμοιες καταστάσεις.

2.2. Οι κατώτερες και οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες

Οι κατώτερες, ή στοιχειώδεις, νοητικές λειτουργίες όπως η άμεση αντίληψη, η ακούσια προσοχή, η φυσική μνήμη κτλ., έχουν ακούσιο και αυθόρμητο χαρακτήρα, ακολουθούν τον νόμο 'ερέθισμα-αντίδραση' και αναπτύσσονται με την ωρίμανση του ατόμου.

Οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες, όπως λεκτικοποιημένη αντίληψη, εκούσια ενεργητική προσοχή, διαμεσολαβημένη μνήμη, ομιλία, νόηση κλπ., έχουν εκούσιο, συνειδητό χαρακτήρα και αναπτύσσονται μέσω της χρήσης τεχνητών μέσων (artifacts) για την εξασφάλιση του ελέγχου του ανθρώπου πάνω στην ίδια τη συμπεριφορά του. Οι ανώτερες λειτουργίες αναπτύσσονται μέσα στις κοινωνικές σχέσεις διαμέσου της 'εσωτερίκευσης' (internalization) αυτοδιορθωτικών (selfregulatory) προτύπων (patterns), τα οποία προϋπάρχουν στην κοινωνία. Επομένως στις κοινωνικο-ιστορικές αντιλήψεις προηγείται ο κοινωνικός λόγος ο οποίος εξελίσσεται σε εσωτερικό λόγο. Η επικοινωνιακή προσέγγιση, τέλος, θεωρεί ότι η δομή των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων διαμορφώνει τη βάση της δομής της σκέψης.

Ο Vygotsky διέκρινε δύο τύπους εννοιών, τις *αυθόρμητες ή καθημερινές* και τις *επιστημονικές ή θεωρητικές*. Οι πρώτες αναπτύσσονται με μη συστηματικό τρόπο διαμέσου της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Οι δεύτερες όμως εισάγονται κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης και λειτουργούν μέσα σε ένα ιεραρχικό σύστημα διασυνδέσεων με άλλες επιστημονικές έννοιες και σχέσεις. Ο Davydov επισήμανε την ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στα δύο αυτά είδη των εννοιών: Οι καθημερινές έννοιες αναπτύσσονται διαμέσου της *εμπειρικής αφαίρεσης*, με τη σύγκριση των χαρακτηριστικών διαφορετικών καταστάσεων και την επισήμανση ομοιοτήτων και διαφορών. Αντίθετα, οι επιστημονικές έννοιες απαιτούν τη *θεωρητική αφαίρεση*, είναι ποιοτικά διαφορετικές από τις καθημερινές, δεν μπορούν να προκύψουν από την εμπειρική αφαίρεση αλλά *χρειάζονται ένα ποιοτικό, νοητικό άλμα*. Για παράδειγμα, η έννοια του 'κυκλικού αντικειμένου' μπορεί να προκύψει με εμπειρική αφαίρεση από ένα δίσκο, έναν τροχό ή από ένα ουράνιο σώμα. Όμως, η μαθηματική έννοια του κύκλου απαιτεί την θεωρητική γενίκευση προκειμένου να οριστεί ως γεωμετρικός τόπος. Επίσης, από την παρατήρηση π.χ. $2+3=3+2$ και άλλες παρόμοιες, συνάγουμε την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης παραβλέποντας πολλά και σοβαρά ενδιάμεσα στάδια. Οι παρατηρήσεις αυτές, και άλλες παρόμοιες, δείχνουν την ειδική φύση των μαθηματικών εννοιών καθώς και την σημασία της θεωρητικής γενίκευσης.

Όμως δεν υπάρχει απόλυτος διαχωρισμός των αυθόρμητων και των επιστημονικών εννοιών, όπως πίστευε ο Piaget. Κατά τον Vygotsky, υπάρχει μια 'αλληλοϋποστήριξη' μεταξύ των δύο αυτών τύπων εννοιών. Για παράδειγμα, η ανάπτυξη των επιστημονικών εννοιών κατά την πρώτη σχολική ηλικία γίνεται με υψηλότερους ρυθμούς και στη συνέχεια η ανάπτυξη αυτή ωθεί την ανάπτυξη των καθημερινών εννοιών. Από την άλλη μεριά, η ανάπτυξη των επιστημονικών εννοιών δε γίνεται αυθαίρετα, αλλά προϋποθέτει ένα συγκεκριμένο επίπεδο ανάπτυξης των καθημερινών εννοιών. Σύμφωνα με τον Δαφέρμο, οι επιστημονικές και οι καθημερινές έννοιες σχηματίζονται μέσω διαφορετικών δρόμων και ο καθένας από τους παραπάνω τύπους εννοιών είναι ισχυρός στη σφαίρα εκείνη, στην οποία ο άλλος τύπος εκδηλώνει την αδυναμία του και την περιορισμένη ερμηνευτική του ικανότητα. Η επιστημονικές έννοιες είναι ισχυρές στη σφαίρα των ανώτερων νοητικών λειτουργιών, ενώ οι καθημερινές είναι ισχυρές στη σφαίρα των κατώτερων και προετοιμάζουν το δρόμο για την έλευση των επιστημονικών εννοιών.

Τέλος, ο V. δεν πίστευε, όπως και ο Piaget, στη δυνατότητα της λεκτικής μετάδοσης της γνώσης. Κατ' αρχήν, νοητικές λειτουργίες όπως η εκούσια μνήμη, η λογική

μνήμη, η αφαίρεση (αφαιρετική διαδικασία), η σύγκριση και η διάκριση, δεν μαθαίνονται με συνταγές. Δεν μαθαίνονται τυποποιημένες. Επιπλέον, οι σημασίες των λέξεων δεν μπορούν να μεταδοθούν από τον ένα νου στον άλλο με τη βοήθεια άλλων λέξεων, επειδή *κάθε λέξη είναι μια γενίκευση* και διαφορετικοί άνθρωποι μπορούν να ενεργούν με διαφορετικούς συνειρμούς και σε διαφορετικά επίπεδα γενίκευσης. Όμως ο V. απορρίπτει τον ισχυρισμό ότι είναι αδύνατο να παρέμβεις μέσα σ' αυτήν τη μυστήρια διαδικασία (του σχηματισμού των εννοιών) και ότι η εξέλιξη των εννοιών θα πρέπει να αφήνεται στους δικούς της εσωτερικούς νόμους. Μόνο που η παρεμβολή πρέπει να είναι πάρα πολύ διακριτική και πιο έμμεση από ότι στις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας, οι οποίες, ανάμεσα σε άλλα, απαιτούν και απομνημόνευση κανόνων και τύπων. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι δάσκαλοι θα πρέπει να παραιτηθούν από το να δίνουν στους μαθητές ορισμούς ή προφορικές εξηγήσεις των όρων. Δεν πρέπει να περιμένουμε πως, όταν, για παράδειγμα, λέγεται σ' ένα παιδί η ερμηνεία μιας λέξης, αφομοιώνει τον ορισμό ή την εξήγηση και έκτοτε κατέχει την έννοια. Αυτό θα πρέπει να θεωρηθεί ως η αρχή μιας διαδικασίας εξέλιξης της έννοιας και απαιτεί σοβαρή δουλειά και αναστοχασμό από το παιδί.

Ποιες είναι εκείνες οι αυθόρμητες νοητικές λειτουργίες που μπορούν να μετασχηματιστούν σε επιστημονικές έννοιες και με ποια διαδικασία; Σε κάθε διδασκαλία, μέσα από μια ολιστική θεώρηση, παρατηρούμε όχι μόνον αυτά που λέγονται και γράφονται αλλά και άλλες μορφές έκφρασης που πολλές από αυτές είναι διαισθητικές, ενδεχομένως να έχουν και έναν αυθόρμητο χαρακτήρα, κατά την προσέγγιση ενός μαθηματικού θέματος όπως: χειρονομίες, ματιές, η στάση του σώματος, ο τόνος της φωνής, η χρήση διαφόρων τεχνουργημάτων (artifacts), π.χ. το μολύβι ή ο Η/Υ, αν χρησιμοποιείται από την τάξη, πρόχειρα σχήματα, σκίτσα, γραφήματα κτλ. Όλα τα παραπάνω, μαζί με την ομιλία, συνιστούν μια δέσμη σημειωτικών πηγών (a bundle of semiotic resources), βλέπε Arzarello et al, (2009), οι οποίες μπορούν να μετασχηματιστούν σε μαθηματικές έννοιες διαμέσου μιας ειδικής διαδικασίας η οποία ονομάζεται *σημειωτική διαμεσολάβηση* και την οποία θα δούμε αμέσως πιο κάτω.

2.3. Η σημειωτική διαμεσολάβηση (semiotic mediation)

Η δομή των ανώτερων νοητικών λειτουργιών είναι σύνθετη και περιλαμβάνει την κατασκευή και χρήση συμβόλων, τα οποία διαμεσολαβούν και ελέγχουν τη συμπεριφορά. Με άλλα λόγια, η δημιουργία συμβολικών συστημάτων έδωσε τη δυνατότητα στον άνθρωπο να κυριαρχήσει πάνω στην ίδια τη συμπεριφορά του. Σύμφωνα με τον Bauersfeld (1992), ήταν το 1932 όπου ο V. διαπίστωσε ότι η ανάλυση του νοήματος των συμβόλων είναι η μόνη πρόσβαση που έχουμε για να ερευνήσουμε τις συνειδητές ανθρώπινες δραστηριότητες.

Ο V. συνέκρινε τη συμβολή των σημείων (signs) στην ανάπτυξη των ανώτερων νοητικών λειτουργιών με τη χρήση των εργαλείων κατά την εργασιακή δραστηριότητα. Η εργασιακή δραστηριότητα όπως και η σημειωτική διαδικασία, αποτελούν μορφές *διαμεσολαβητικής δραστηριότητας*. Όμως, εκτός από ομοιότητες υπάρχουν και διαφορές μεταξύ τους, που σχετίζονται κυρίως με τον προσανατολισμό τους. Το εργαλείο αποτελεί μέσο επίδρασης σε μια εξωτερική κατάσταση, σε ένα εξωτερικό αντικείμενο, ενώ το σημείο προσανατολίζεται στο μετασχηματισμό της ίδιας της νοητικής δραστηριότητας και της συμπεριφοράς του ατόμου. Η διαφορά μεταξύ σημείου και εργαλείου συνίσταται στη διαφορετική κατεύθυνση του καθενός από αυτά. Το εργαλείο αποτελεί μέσο επενέργειας του ανθρώπου σε ένα εξωτερικό αντικείμενο της εργασιακής δραστηριότητας. Από την άλλη μεριά, το σημείο συμβάλλει στην επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων καθώς επίσης και στην ανάπτυξη

της ικανότητας του ανθρώπου να ελέγχει τις ψυχικές-νοητικές λειτουργίες και συμπεριφορά του. Γενικότερα, τα σημεία είναι θεμελιωμένα στα συστήματα επικοινωνίας τα οποία, συστήματα, είναι μορφές του πολιτισμού μας. Ιδιαίτερα τα μαθηματικά σημεία θεωρούνται ως όργανα για την κωδικοποίηση και περιγραφή της μαθηματικής γνώσης, για την επικοινωνία της μαθηματικής γνώσης αλλά και για την γενίκευσή της.

Με ποιον τρόπο τα σημεία συμβάλλουν στον έλεγχο της συμπεριφοράς μας; Όπως είδαμε, η βασική αναλογία σημείων και εργαλείων βασίζεται στην διαμεσολαβητική λειτουργία αλλά έχουν διαφορετική κατεύθυνση, δηλαδή έχουν διαφορετικό προσανατολισμό. Σύμφωνα με τον V. εξωτερικά προσανατολισμένα εργαλεία μπορούν να μετασχηματιστούν σε εσωτερικά προσανατολισμένα σημεία δια μέσου σημειωτικών διαδικασιών. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το σφυρί. Είναι ένα εργαλείο με το οποίο μετασχηματίζουμε το περιβάλλον μας. Μαθαίνοντας, όμως, την χρήση του εργαλείου αυτού το άτομο μαθαίνει πιο πολλά από τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να το χρησιμοποιεί. *Αυτό συμβαίνει γιατί το σφυρί παρουσιάζεται με δύο τρόπους*: Ο ένας είναι η παρουσία του ως υλικό αντικείμενο με το οποίο επηρεάζουμε το περιβάλλον και ο άλλος ως αντικείμενο της σκέψης μας, δηλαδή ως ένα σημειωτικό αντικείμενο. Αναγνωρίζω τώρα νέες δυνατότητες που πριν δεν υπήρχαν: Τώρα μπορώ να επιτελέσω και άλλες εργασίες και όχι μόνο π.χ. να κρεμάσω στον τοίχο έναν πίνακα ή μια φωτογραφία. Δηλαδή, η διαδικασία χρήσης του είναι διπλής κατεύθυνσης, τόσο εξωτερικά όσο και εσωτερικά προσανατολισμένη, με άλλα λόγια έχει μετασχηματιστεί και σε ένα ψυχολογικό εργαλείο, σημείο, που καθοδηγεί την συμπεριφορά μου. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται εσωτερίκευση (internalisation). Στην τάξη, μπορούμε να επισημάνουμε *ενδείξεις εσωτερίκευσης* όταν, για παράδειγμα, παρατηρούμε τους μαθητές να αντικαθιστούν αριθμούς σε αλγεβρικές παραστάσεις ως μια νόμιμη ενέργεια σε ένα κατάλληλο ερώτημα, ή να κάνουν προσπάθειες να χρησιμοποιήσουν την γλώσσα του καθηγητή τους, άσχετα αν την χρησιμοποιούν σωστά ή όχι, βλέπε π.χ. Lerman (2001a). Σύμφωνα με τον V., κατά την διαδικασία της εσωτερίκευσης οι εμπειρίες που προκύπτουν από την κοινωνική αλληλεπίδραση επεξεργάζονται με προσωπικό τρόπο από κάθε άτομο, δηλαδή οι διαπροσωπικές (interpersonal) εμπειρίες μετασχηματίζονται σε ενδοπροσωπικές (intrapersonal). Επομένως, *η εσωτερίκευση εκφράζει την συνεχώς εξελισσόμενη σχέση μεταξύ των εξωτερικών διαπροσωπικών διαδικασιών και των αντίστοιχων εσωτερικών - ενδοπροσωπικών*. Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, οι δύο κύριες συνιστώσες μιας κοινωνικής δραστηριότητας, δηλαδή τα συστήματα των σημείων και οι σημειωτικές διαδικασίες, γίνονται επίσης οι βασικές συνιστώσες της συμμετοχής του ατόμου στην δραστηριότητα αυτή καθώς και στην διαδικασία της εσωτερίκευσης, διαμέσου της οποίας αναπτύσσονται οι έννοιες.

Ανάλογη διαδικασία ισχύει και για τα, εσωτερικά προσανατολισμένα, μαθηματικά σημεία. Δηλαδή ένα σημείο που μας δίνεται π.χ. μια γραφική παράσταση, παρουσιάζεται με δύο τρόπους: Ως ένα εξωτερικό μαθηματικό αντικείμενο με τα δικά του ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και ως αντικείμενο της σκέψης μας, βλέπε π.χ. Roth and Lee (2004). Έτσι, τα νέα σημεία που δημιουργήθηκαν από την χρήση ενός σημείου, διαμέσου της σύνθετης διαδικασίας της εσωτερίκευσης που ήταν αποτέλεσμα μιας κοινωνικής αλληλεπίδρασης, μπορεί να διαμορφώσουν μια νέα έννοια. Με αυτό τον τρόπο ένα συγκεκριμένο σημείο μπορεί να λειτουργήσει ως ένας *σημειωτικός διαμεσολαβητής* (semiotic mediator). Πιο συγκεκριμένα, στην αρχή, ένα σημείο χρησιμοποιείται σε κάποιες ενέργειες προκειμένου να εκτελεστεί κάποιο έργο. Τότε, διαμέσου μιας σειράς σημειωτικών δραστηριοτήτων και με την καθοδήγηση ενός ειδικού, του δασκάλου για παράδειγμα, *μπορεί να αναπτυχθούν νέα σημεία τα*

οποία δημιουργήθηκαν από τις ενέργειες με το αρχικά δοσμένο σημείο, και τα οποία μπορεί να αναπτύξουν μια διαδικασία εσωτερίκευσης παράγοντας ένα νέο *ψυχολογικό εργαλείο*. Έτσι, το νέο εργαλείο είναι εσωτερικά προσανατολισμένο, πλήρως μετασχηματισμένο, αλλά εξακολουθεί να υποστηρίζει κάποιες όψεις του αρχικού, βλέπε Falcade et al (2007), Botzer and Yerusalmy (2008).

Με τη θεωρία του, ο V. είχε φθάσει σε αυτό που εστίαζε κυρίως στο πρόγραμμά του: Τη γεφύρωση των κατώτερων και ανώτερων νοητικών λειτουργιών όπως και τη διασύνδεση ανάμεσα στον ψυχολογικό-ατομικό και κοινωνικό τομέα.

2.4. Η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης (The zone of proximal development-zpd)

Ένα σημαντικό μέρος της υπευθυνότητας του δασκάλου των Μαθηματικών είναι όχι μόνον η αξιολόγηση των μαθητών του αλλά και η *πρόβλεψη* για την μελλοντική τους πορεία. Ιδιαίτερα η πρόβλεψη των ικανοτήτων των μαθητών στον χειρισμό προβλημάτων είναι συνυφασμένη με την διδασκαλία και τον σχεδιασμό της. Για παράδειγμα όταν επιλέγουμε κάποιες δραστηριότητες για το επόμενο μάθημα, πάντα προσέχουμε να βρίσκονται μέσα στις δυνατότητες των μαθητών μας, έτσι όπως τις έχουμε εκτιμήσει από την εμπειρία μας κατά την διάρκεια της διδασκαλίας. Η εκτίμηση αυτή αποτελεί μια πρόβλεψη για το αν θα υπάρξουν μαθητές που θα έχουν δυσκολίες ή όχι, για το αν θα δώσουμε επιπλέον πληροφορίες, ποιες και πότε κτλ. Η εκτίμηση που κάνουμε όμως είναι εμπειρική με αποτέλεσμα σε πολλές περιπτώσεις να απέχει από την πραγματικότητα. Με την εισαγωγή της zpd, ο V μας έδωσε ένα αξιολογικό εργαλείο για την δυνατότητα επιστημονικής πρόβλεψης των δυνατοτήτων και των προοπτικών την εξέλιξης του μαθητή.

Ο Vygotsky αμφισβήτησε τις προϋποθέσεις των αξιολογικών, ψυχομετρικών τεστ, π.χ. προσδιορισμός του IQ, και επεδίωξε να θεμελιώσει την αναγκαιότητα εισαγωγής ενός νέου τρόπου προσέγγισης της ανάπτυξης της νόησης των μαθητών, σε συνάρτηση με τη σχολική μάθηση. Η αμφισβήτηση στηρίχθηκε κυρίως στους ακόλουθους δύο λόγους:

1. Η ικανότητα του μαθητή να λύνει ασκήσεις του ίδιου επιπέδου στην παρούσα φάση, αποτελεί ανεπαρκές κριτήριο για την πρόβλεψη της μελλοντικής του πορείας.
2. Η επίλυση των ασκήσεων του τεστ γίνεται από τον μαθητή χωρίς την βοήθεια ενός ενήλικα π.χ. τον καθηγητή του, ή χωρίς την βοήθεια συμμαθητών του. Αυτό σημαίνει ότι 'βλέπουμε' την μάθηση ως υπόθεση ενός μεμονωμένου μαθητή, χωρίς να υπολογίζουμε τόσο τις αλληλεπιδράσεις με άλλα άτομα όσο και τις συλλογικές πρακτικές που προκύπτουν από τις αλληλεπιδράσεις.

Έτσι εισήγαγε τη 'Ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης'. Η ζώνη αυτή αντιστοιχεί στην απόσταση ανάμεσα στο πραγματικό αναπτυξιακό επίπεδο, όπως αυτό καθορίζεται από την ανεξάρτητη επίλυση προβλημάτων, και στο επίπεδο *δυνάμει ανάπτυξης*, όπως αυτό καθορίζεται από την επίλυση προβλημάτων κάτω από την καθοδήγηση των ενηλίκων ή σε συνεργασία με πιο ικανούς συνομηλίκους. Τα προβλήματα που επιλύει μόνος του ο μαθητής καθορίζονται από τις νοητικές λειτουργίες, οι οποίες ήδη θεωρούνται ως ώριμες, και από το θεσμό και τους στόχους του σχολείου. Εντούτοις, η μελέτη των νοητικών λειτουργιών δεν είναι επαρκής για την κατανόησή τους. Και αυτό συμβαίνει επειδή το συγκεκριμένο επίπεδό τους, σε μια συγκεκριμένη στιγμή, *δεν αντικατοπτρίζει τη δυναμική τους, την επικείμενη και την απώτερη προοπτική της ανάπτυξης της προσωπικότητας και των δυνατοτήτων του μαθητή.*

Η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης παρέχει τη δυνατότητα *επιστημονικής πρόβλεψης* των δυνατοτήτων και των προοπτικών του μαθητή, ο οποίος συμμετέχει στην εκπαιδευτική διαδικασία και δρα ως ενεργό υποκείμενο. Μεγάλη σημασία έχει, σύμφωνα με τον V., να προσδιορίσουμε όχι μόνο τι κάνει μόνος του στην παρούσα φάση, αλλά τι μπορεί να κάνει ο μαθητής στα πλαίσια κάποιων οργανωμένων συλλογικών διαδικασιών. Και αυτό γιατί, όλες εκείνες τις δραστηριότητες που μπορεί να πραγματοποιήσει σήμερα σε συνεργασία με άλλους, αύριο θα μπορεί να τις υλοποιήσει μόνος του. Με άλλα λόγια, η συνεργασία του μαθητή με τους ενήλικους, π.χ. το δάσκαλο, αλλά και τους συμμαθητές του, είναι η βάση της ανάπτυξης των ανώτερων νοητικών λειτουργιών και γενικότερα της προσωπικότητάς του.

Μια από τις σημαντικότερες παιδαγωγικές συνέπειες της θεωρίας του V., είναι η *ομαδοσυνεργατική διδασκαλία*, όπου ο εκπαιδευτικός έχει αποφασιστικό ρόλο στη διαμόρφωση της κατεύθυνσης και του χαρακτήρα της επικοινωνίας στην τάξη. Όμως η παρέμβαση του εκπαιδευτικού δεν είναι αυθαίρετη, αλλά στηρίζεται στον υπολογισμό των αναπτυσσόμενων ενδιαφερόντων των μαθητών του. Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία διαφέρει τόσο από τα παραδοσιακά δασκαλοκεντρικά διδακτικά μοντέλα όσο και από τα μαθητοκεντρικά. Στα πρώτα δεν λαμβάνονται υπόψη οι ανάγκες που προκύπτουν από τις αλληλεπιδράσεις και την επικοινωνία που πάντα αναπτύσσεται στην τάξη, είτε μεταξύ των μαθητών είτε μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών. Στα δεύτερα αγνοείται ο ρόλος του εκπαιδευτικού και ο σημαντικός ρόλος του στην διαμόρφωση των μαθησιακών πρακτικών.

Σύμφωνα με τον Lerman (2001b), η *zpd δεν είναι κάτι που τα άτομα φέρνουν μαζί τους πριν την αλληλεπίδραση με τους άλλους*. Το μόνο 'εφόδιο' που φέρουν τα άτομα κατά την έναρξη του διαλόγου είναι ένα δίκτυο προηγούμενων εμπειριών. Έτσι, σε μια επιτυχή μαθησιακή δραστηριότητα κάποιος από τους μαθητές, στηριζόμενος στις εμπειρίες του, θα κάνει μια ερώτηση η οποία μπορεί να προκαλέσει την ανάδυση της *zpd* ενός άλλου μαθητή, ο οποίος απαντώντας στον πρώτο θα προκαλέσει την ανάδυση της *zpd* του πρώτου. Περιγράφοντας τις *zpd*s των δύο μαθητών ως *επικαλυπτόμενες ζώνες, δημιουργείται μια κοινή ζώνη μέσα στην οποία αναπτύσσονται κοινές πρακτικές* οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν σε νέα νοήματα που δεν υπήρχαν στον νου τους πριν την έναρξη του διαλόγου, ενώ η διαδικασία της εσωτερίκευσης *συμβαίνει μέσα στην zpd του κάθε μαθητή*.

Η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης είναι, ίσως, η πιο σημαντική έννοια στη θεωρία του V. και αυτό επειδή μόνον όταν αυτή αναπτύσσεται αρχίζει η μάθηση και παρουσιάζονται όλα τα στοιχεία της θεωρίας, δηλαδή η διαμεσολάβηση των συμβόλων, η εσωτερίκευση, η βοήθεια (scaffolding) κλπ.

Πιο συγκεκριμένα, η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης θεωρείται ως ένας συμβολικός χώρος που περιλαμβάνει τα άτομα, τις πρακτικές τους καθώς και τις συνθήκες υπό τις οποίες ενεργοποιούνται οι δραστηριότητες. Είναι ένα συνεχώς αναπτυσσόμενο φαινόμενο το οποίο ξεκινά, όταν ξεκινά, από τη στιγμή που οι συμμετέχοντες κατανοούν τις ενέργειες ο ένας του άλλου, δηλαδή από τη στιγμή που κατανοεί ο ένας τη σκέψη του άλλου. Είναι ένα φαινόμενο εύθραυστο, ευαίσθητο, γιατί αρκεί σε έναν διάλογο κάποιος να πει κάτι και να αλλάξει την εστίαση των μελών της ομάδας με πιθανό αποτέλεσμα την αποτυχία του διαλόγου.

Διαπιστώνουμε ότι η *zpd* είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια της βοήθειας (scaffolding) προς τον μαθητή από τον καθηγητή ή τους συμμαθητές του, προκειμένου να αναπτυχθούν οι δυνατότητές του οι οποίες στο άμεσο μέλλον θα του επιτρέψουν να κατακτήσει ένα επίπεδο προσωπικής ανεξαρτησίας τόσο στην κατανόηση όσο και στις ενέργειες πάνω σε κάποιο μαθηματικό θέμα.

Το ζήτημα αυτό θα το εξετάσουμε στο δεύτερο τετράμηνο, όπου θα μελετήσουμε την έννοια του scaffolding διεξοδικά. Εδώ, συνοπτικά, μπορούμε να αναφέρουμε τα ακόλουθα: Οι θεωρίες του Piaget και του Vygotsky θεωρούν ότι ο μαθητής πρέπει να συμμετέχει ενεργά στην ανάπτυξη της γνώσης του. Ωστόσο, ο V δίνει έμφαση στις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις και ιδιαίτερα στην αλληλεπίδραση μαθητή-καθηγητή, τους οποίους βλέπει ως 'συν-κατασκευαστές' της γνώσης του μαθητή, και την οποία αλληλεπίδραση θεωρεί ως βασική. Επομένως, η έννοια της βοήθειας κατά την διδασκαλία θα πρέπει να έχει χαρακτηριστικά όπως, διαλογική μορφή, να επιτρέπει στον μαθητή να ολοκληρώσει την εργασία (π.χ. να ολοκληρώσει την λύση ενός προβλήματος) μόνος του όταν στην αρχή της εργασίας δεν μπορούσε να το κάνει αυτό, να στοχεύει στο να φέρει τον μαθητή σε μια κατάσταση της γνώσης τέτοια ώστε να μπορεί εξαρχής να λύσει όχι μόνον το πρόβλημα αυτό αλλά και άλλα παρόμοια μόνος του, να ακολουθείται (η βοήθεια) από ενδείξεις ότι ο μαθητής έχει κατακτήσει ένα ανώτερο επίπεδο γνώσεων και ικανοτήτων ως αποτέλεσμα των εμπειριών του από το scaffolding. Γενικότερα το scaffolding, *το οποίο έχει αναπτυχθεί ανεξάρτητα από την θεωρία του V*, σημαίνει μια μορφή υποστήριξης για την ανάπτυξη και την μάθηση του μαθητή και για τον λόγο αυτό ερμηνεύεται με πολλούς τρόπους. Σε κάποιες περιπτώσεις έχει οδηγήσει σε παραδοσιακά μοντέλα διδασκαλίας γιαυτό και απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή στην διδακτική πράξη.

Συνοψίζοντας το ζήτημα της σχέσης του scaffolding και της *zpd από την πλευρά του δασκάλου των μαθηματικών*, έχουμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα: Όταν αναφερόμαστε στην ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης εξετάζουμε τον τρόπο με τον οποίο η συμπεριφορά του μαθητή, σε κάποιο συγκεκριμένο έργο, έχει διαμεσολαβηθεί κοινωνικά, δηλαδή με ποιον τρόπο έχει επιτευχθεί η κοινή κατανόηση μαθητή και καθηγητή. Αυτό περιλαμβάνει τόσο την (νοητική) τροχιά με την οποία ο καθηγητής, *αφού έχει επισημάνει το επίπεδο κατανόησης του μαθητή*, επιχειρεί να τον οδηγήσει από εκεί σε ένα υψηλότερο επίπεδο ανάπτυξης όσο και την συμπεριφορά του σε ιδέες του ίδιου του μαθητή, αν υπάρχουν. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός πρέπει να εξετάσουμε την διαδικασία της σημειωτικής διαμεσολάβησης, δηλαδή να εξετάσουμε ποια σημειωτικά 'εργαλεία' έχει ο μαθητής στην διάθεσή του και το πως τα χρησιμοποιεί προκειμένου να αναπτυχθεί η εσωτερίκευση των νέων νοημάτων. Με άλλα λόγια, ποιες τεχνικές χρησιμοποιεί προκειμένου να εξασφαλίσει τον μετασχηματισμό της παρεχόμενης βοήθειας σε μια ανεξάρτητη συμπεριφορά.

3. Εισαγωγή στις θεωρίες πλαισιοθετημένης μάθησης (situated learning)

Σύμφωνα με τον Σακονίδη (2007), οι ιδέες του V, οι εξελίξεις σε διάφορα άλλα γνωστικά πεδία όπως η ανθρωπολογία και η κοινωνιολογία, καθώς και η παράλληλη διαπίστωση ότι το σχολείο αναπαράγει κοινωνικές ανισότητες και μέσω της αποτυχίας στα σχολικά μαθηματικά, πυροδότησαν μια σειρά από προσπάθειες για την μελέτη του ακριβούς ρόλου των κοινωνικο-πολιτισμικών παραμέτρων στην μάθηση των μαθηματικών. Έτσι, η θεώρηση όλων αυτών των παραγόντων οδήγησε στις λεγόμενες θεωρίες 'πλαισιοθετημένης' μάθησης.

Πιο συγκεκριμένα, η Lave (1988) και Lave & Wenger (1991) έθεσαν βασικά ερωτήματα σχετικά με τις πρακτικές μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών μέσα και έξω από το σχολείο. Τα ερωτήματα αυτά οδήγησαν στις θεωρίες 'πλαισιοθετημένης' μάθησης, σύμφωνα με τις οποίες *η γνώση είναι εγκατεστημένη σε ιδιαίτερες μορφές εμπειρίας που προκύπτουν σε συγκεκριμένες περιστάσεις και γίνεται κατανοητή με σχεσιακό τρόπο, ως κάτι που κατανέμεται μεταξύ ανθρώπων, δραστηριοτήτων και περιβαλλόντων, και όχι ως σταθερό, ατομικό χαρακτηριστικό. Σε*

σχετικά πρόσφατη εργασία του ο Wenger (1998), αντιμετωπίζει την μάθηση ως κοινωνικό φαινόμενο που συγκροτείται στον πραγματικό κόσμο μέσα από μια διαδικασία 'νόμιμης περιφερειακής συμμετοχής' σε κοινότητες πρακτικής (communities of practice). Με τον τρόπο αυτόν η συμμετοχή στην πρακτική μιας κοινότητας, π.χ. της κοινότητας των ανθρώπων που παράγουν μαθηματικά, αποτελεί την *επιστημολογική αρχή της μάθησης* π.χ. των Μαθηματικών. Ο Wenger διατυπώνει δύο έννοιες κλειδιά: Την *συμμετοχή* (participation) και την *συμπύκνωση ή εκπραγμάτωση* (reification), στο εξής στο κείμενο αυτό θα χρησιμοποιούμε τον όρο συμπύκνωση. Η συμμετοχή αναφέρεται στην διαδικασία 'του λαμβάνω μέρος', ενώ η συμπύκνωση στην διαδικασία 'του μετασχηματίζω τις εμπειρίες μου σε αντικείμενο'. Η συμμετοχή είναι μια σύνθετη διαδικασία προσωπική και κοινωνική η οποία συνδυάζει το πράττω, ομιλώ, σκέφτομαι, αισθάνομαι, ανήκω, συζητώ, επιλύω κλπ. Συμπεριλαμβάνει ολόκληρη την προσωπικότητα μαζί με το σώμα, τον νου, τα αισθήματα και τις κοινωνικές σχέσεις και έτσι αποτελεί μια *πηγή ταυτότητας*. Από την άλλη μεριά, η συμπύκνωση σχετίζεται με τις αφαιρετικές διαδικασίες, τα εργαλεία, τα σύμβολα τους όρους και έννοιες που παράγει μια κοινότητα πρακτικής. Έτσι, ένας μαθηματικός τύπος, ένα συμπέρασμα διατυπωμένο σε κατάλληλη γλώσσα ή όχι, ακόμα και ένα σχέδιο μαθήματος είτε το έχουμε στον νου μας είτε το διατυπώνουμε γραπτά π.χ. σε φύλλο εργασίας, αποτελεί μια συμπύκνωση. Κατά τον Wenger, οι δύο αυτές έννοιες είναι συμπληρωματικές, δηλαδή παρουσιάζονται ως ζεύγη: Η συμμετοχή συχνά οδηγεί σε συμπύκνωση η οποία, με την σειρά της οδηγεί σε περαιτέρω συμμετοχή. *Και οι δύο χρησιμεύουν στην διαδικασία διαπραγμάτευσης του νοήματος*, δηλαδή στο να αποκτούμε εμπειρίες του κόσμου ή, διαφορετικά, στο να ζούμε σε έναν κόσμο στον οποίο η συμμετοχή μας είναι πλήρης νοήματος.

Η μάθηση στην πλαισιοθετημένη οπτική λοιπόν γίνεται κατανοητή ως μια διαδικασία αλλαγής της συμμετοχής σε μεταβαλλόμενες κοινότητες πρακτικής, και η προσωπική ικανότητα για μάθηση θεωρείται ως μια λειτουργία των περιβαλλόντων μέσα στα οποία το άτομο ενεργεί. Η οπτική αυτή δέχεται ότι η γνώση μεταβάλλεται ανάμεσα σε πλαίσια και καταστάσεις, κάτι που μπορεί να θεωρηθεί ως χαρακτηριστικό της ανθρώπινης συμπεριφοράς, βλέπε π.χ. Cobb and Bowers (1999), Boaler (2000).

Η ερμηνεία που δίνουμε στην πιο πάνω παράγραφο είναι η ακόλουθη:

Όπως είδαμε, στην οπτική αυτή η μάθηση των Μαθηματικών *ταυτίζεται* με την συμμετοχή στις πρακτικές της μαθηματικής σχολικής κοινότητας. Αυτό σημαίνει ότι οι εξατομικευμένες ενέργειες θεωρούνται ως στοιχεία ή εκδοχές ενός ενσωματωμένου συστήματος πρακτικών ή ενός συνόλου ενεργειών οι οποίες έχουν εσωτερικευθεί και καθοδηγούν την συμπεριφορά μας. Με άλλα λόγια, η συμμετοχή στις πρακτικές της σχολικής μαθηματικής κοινότητας αναπτύσσει μια σειρά εμπειριών, ή, διαφορετικά, μια σειρά εσωτερικευμένων ενεργειών, οι οποίες αναφέρονται σε διάφορες μαθηματικές καταστάσεις. Έτσι, *το να γνωρίζω ή να θυμάμαι κάτι σημαίνει να κάνω επιλογές από το σύνολο των εμπειριών μου ανάλογα με την κατάσταση που ερευνώ*. Οι εμπειρίες, όμως, συγκροτούνται κατά την διάρκεια της συμμετοχής μας σε εξελισσόμενα πλαίσια συμμετοχής ή, το ίδιο πράγμα, με αλλαγές στους τρόπους συμμετοχής στις πρακτικές της σχολικής μαθηματικής κοινότητας. Για παράδειγμα από το ακούω ή παρακολουθώ στο συνεισφέρω με τις δικές μου ιδέες στο έργο που συμμετέχω. Άλλος τρόπος συμμετοχής είναι το «παρακολουθώ» και άλλος το «λέω την γνώμη μου». Γενικότερα, η μάθηση αλλά και *το νόημα του έργου* αλλάζουν, εξελίσσονται, καθώς αλλάζει η μαθηματική πρακτική, κατά συνέπεια και οι τρόποι συμμετοχής κατά την διάρκεια της διδασκαλίας ή μιας δραστηριότητας.

Όπως είδαμε *τρόποι συμμετοχής* είναι π.χ. το πράττω, ομιλώ, διαισθάνομαι, ανήκω, συζητώ, επιλύω, αποδεικνύω, σχεδιάζω, υπολογίζω, ακούω, λέω την γνώμη μου,

μετρώ, αναπτύσσω εικασίες, ερμηνεύω ένα διάγραμμα κτλ. Σε κάθε τρόπο συμμετοχής επανα-οργανώνεται η γνώση, αλλά και η ίδια η δραστηριότητα, και καταλήγει σε μια συμπύκνωση η οποία μπορεί να είναι προσωρινή, εφήμερη, δοκιμαστική δηλαδή εικασία-υπόθεση, με την οποία επανα-οργανώνω την συμμετοχή μου στο έργο.

Ανάλογα μπορούμε να προσδιορίσουμε *τρόπους περιορισμένης ή υποβαθμισμένης συμμετοχής οι οποίοι, μερικές φορές, καταλήγουν να είναι τρόποι μη συμμετοχής στις πρακτικές*: Περιθωριακή στάση, ή και αδιαφορία, διαμέσου της αγνόησης των ιδεών κάποιου άλλου ή υιοθέτηση των ιδεών άλλου άκριτα χωρίς να τις κατανοούμε, εκτέλεση διαδικασιών, π.χ. αλγορίθμων, χωρίς να τους συνδέουμε με κάποιο έργο δηλαδή χωρίς να τους αποδίδουμε νόημα, να αναζητούμε, ή να μαντεύουμε, την σωστή απάντηση αδιαφορώντας για το ίδιο το έργο μέσα στο οποίο η απάντηση αποκτά νόημα κτλ. Ένας σημαντικός παράγοντας που οδηγεί σε μη συμμετοχή είναι η *παιδαγωγική αυθεντία η οποία αποτρέπει την διαπραγμάτευση*.

Ένας βασικός όρος είναι το *συνοριακό αντικείμενο* (boundary object). Σύμφωνα με τον Wenger (σελ 106), ο κοινωνιολόγος Leigh Star επινόησε τον όρο αυτόν προκειμένου να περιγράψει αντικείμενα τα οποία μπορούν να συντονίσουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους τα βλέπουμε, προκειμένου να πραγματοποιηθεί κάποιος σκοπός. Για παράδειγμα, ένα δάσος μπορεί να θεωρηθεί συνοριακό αντικείμενο *μόνον όταν προκύψει μία ανάγκη* εξαιτίας της οποίας διάφορες κοινότητες πρακτικής, π.χ. δασολόγοι, γεωπόνοι, οικολόγοι, βιολόγοι κλπ, αναζητούν τρόπους συνεργασίας και συντονισμού των διαφορετικών οπτικών με τις οποίες 'βλέπουν' το δάσος. Γενικότερα, δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε όλα τα αντικείμενα ως συνοριακά. Όμως, στον βαθμό που αυτά ανήκουν σε πολλαπλές πρακτικές μπορούν να θεωρηθούν ως *σύνδεσμοι διαφορετικών οπτικών* και έτσι έχουν την δυνατότητα να αντιμετωπιστούν ως συνοριακά αντικείμενα, *όταν αυτές οι οπτικές χρειάζεται να συντονιστούν, να συνδεθούν*. Ο Wenger, σελ. 114, αναγνωρίζει τους ακόλουθους τρεις τύπους πρακτικών σύνδεσης οπτικών από διαφορετικές κοινότητες: Τις συνοριακές (boundary practices), τις επικαλυπτόμενες (overlap practices) και τις περιφερειακές (peripheries practices) πρακτικές. Από αυτές θα επικεντρωθούμε στην πρώτη. Στην περίπτωση αυτή, αν υπάρξει κάποιο γεγονός το οποίο θα δώσει την αφορμή για αμοιβαία εμπλοκή ανθρώπων που ανήκουν σε διαφορετικές κοινότητες, τότε είναι πιθανόν να ξεκινήσει μια πρακτική. Ο στόχος αυτής της πρακτικής είναι *να διαπραγματευτεί τα σύνορα των διαφορετικών κοινοτήτων και να υποστηρίξει μια σύνδεση ανάμεσα σε έναν αριθμό άλλων πρακτικών, διευθετώντας αντιπαραθέσεις, συμβιβάζοντας οπτικές και βρίσκοντας απαντήσεις*. Το αποτέλεσμα της συνοριακής πρακτικής είναι μια μορφή συλλογικής διαμεσολάβησης μεταξύ των εμπλεκόμενων κοινοτήτων.

Τα σύνορα όμως των κοινοτήτων δεν είναι θεσμικά οριοθετημένα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν 'περιφερειακά' θέματα που οριοθετούνται ασαφώς. Έτσι, οι πρακτικές, π.χ. δύο κοινοτήτων, μπορεί να προσδιορίζουν το τι είναι διαθέσιμο χωρίς να μπορούν να επιβάλλουν συγκεκριμένες πρακτικές. Το ζήτημα επιλογής της προσέγγισης εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αντιληπτή η όλη κατάσταση από τους εργαζόμενους σε συνοριακές πρακτικές, δηλαδή από το αν έχουν ή όχι συνείδηση της 'συνοριακότητας' του θέματος.

Σύμφωνα με τους Roth & McGinn (1998), οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν το πλεονέκτημα της συνοριακής λειτουργίας επειδή συντονίζουν δραστηριότητες και 'μεταφράζουν' συζητήσεις από διαφορετικές κοινότητες. Πράγματι, μία συζήτηση πάνω σε γραφική παράσταση π.χ. ταχύτητας – χρόνου στο μάθημα των Μ, εύκολα μετατοπίζεται σε συζήτηση της ερμηνείας του γραφήματος δηλαδή στον χώρο της Φ.

Αντίστροφα, κάθε κατασκευή γραφικής παράστασης στην Φ αναπόφευκτα αναφέρεται στις αντίστοιχες μαθηματικές διαδικασίες.

Ο Wenger, σελ. 274, θεωρεί ότι ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός πρέπει να εμπλέκει τις κοινότητες μάθησης *σε δραστηριότητες πέρα από τα σύνορά τους* έτσι ώστε οι μαθητές να μάθουν το τι απαιτείται προκειμένου να γίνουν αποτελεσματικοί στον κόσμο στον οποίο η εκπαίδευση υποτίθεται ότι οδηγεί. Έτσι, η ικανότητα των μαθητών να εργάζονται με συνοριακές πρακτικές δεν είναι απλά ένα ζήτημα δεξιοτήτων, εξάσκησης, *αλλά ζήτημα ταυτότητας*: Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να 'βαδίζουν' κατά μήκος των συνόρων και να βρίσκουν τρόπους να μετέχουν σε ένα κόσμο πολύπλοκο και ο οποίος ενσωματώνει πολλαπλές, αντιθετικές οπτικές.

Βιβλιογραφία

- Arzarello F, Domingo P, Robutti O, Sabena C, 2009, 'Gestures as semiotic resources in mathematics classroom', in *Educ. Studies in Math.*, vol 70, 97-109.
- Bauersfeld, H., 1979, '*Research related to the Mathematical learning process*', in 'New Trends in Mathematics Teaching IV', UNESCO, Paris.
- Bauersfeld, H., Krummheuer, G., and Voigt, J., 1988, 'Interactional theory of learning and teaching Mathematics and related microethnographical studies', in Steiner, H-G., and Vermadel, A., 'Proceedings of the 2nd TME-Conference, p. 174-188.
- Bauersfeld, H., 1992, 'Classroom cultures from a social constructivist's perspective', in *Educ. Studies in Math.*, vol. 23, p. 467-481.
- Bauersfeld, H., 1994, '*Theoretical perspectives on interactionism in mathematics classroom*' in Biehler, R., Scholz, R.W., Straber, R., Winkelmann, B., 'Didactics of Mathematics as a scientific discipline', Dordrecht, p. 133-146.
- Boaler, J, 2000, 'Mathematics from another World: Traditional communities and the alienation of learners' in *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (4), 379-397.
- Botzer, G, and Yerushalmy, M, 2008, Embodied semiotic activities and their role in the construction of mathematical meaning of motion graphs, in *In. J. Comput. Math Learning*, vol.13, 111-134.
- Christiansen, B., and Walther, G., 1986, '*Task and activity*', in Christiansen et al (eds), 'Perspectives on Mathematics Education', Reidel, p.243-307.
- Clarke, D, (ed), 2001, '*Perspectives on practice and meaning in mathematics and science classrooms*', Kluwer Academic Publishers.
- Cobb, P, and Bowers, J, 1999, 'Cognitive and Situated learning perspectives in theory and practice' in *Educational Researcher*, March, 4-14.
- Davis, P.,J., and Hersh, R., 1980, '*The Mathematical Experience*', Penguin books.
- Δαφέρμος, Μ., 2002, 'Η Πολιτισμική-Ιστορική θεωρία του Vygotsky', Αθήνα, Ατραπός.
- Falcade R, Laborde C, Mariotti M, A, 2007, 'Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation', in *Educational Studies in mathematics*, vol.66, 317-333.
- Lave, J. και Wenger, E. 1991. *Situated learning: legitimate peripheral participation*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Lerman, S, 2001a, 'Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics' in *Educational Studies in mathematics*, vol.46,87-113.

- Lerman, S, 2001b, *Accounting for accounts of learning mathematics: Reading the ZPD in videos and transcripts*, in Clarke, D (ed), 53-74.
- Mellin-Olsen, S., 1987, 'The Politics of Mathematics Education', Reidel.
- Σακονίδης, Χ, 2007, *Κοινότητες πρακτικής στη μάθηση: Μια αλλαγή προοπτικής για τη μαθηματική εκπαίδευση*, στο Δραγώνα Θ και Φραγκουδάκη Α, 'Πρόσθεση όχι αφαίρεση, πολλαπλασιασμός όχι διαίρεση', Μεταίχιμο. 289-325.
- Schmittau, J., 1993, 'Vygotskian scientific concepts: Implications for Mathematics Education', in *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 15, no 2&3, p. 29-39.
- Sierpinska, A., 1993, 'The development of concepts according to Vygotsky', in *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 15, no2&3, p. 87- 107.
- Sierpinska, A., 1997, 'Formats of interaction and model readers', in *For the Learning of Mathematics*, vol.17, no 2, p. 3-12.
- Sierpinska, A., 1998, *Three Epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, Sociocultural Approaches, Interactionism*, in Steinbring, H, Bartolini Bussi, M., Sierpinska, A., 'Language and Communication in the mathematics classroom', NCTM, p.30-62.
Το άρθρο αυτό έχει μεταφραστεί στα Ελληνικά από τους Π. Βερίκιο και Θ. Πάσχο στα πλαίσια του μαθήματος Μεταπτυχιακή Θεωρία της Διδακτικής των Μαθηματικών
- Sfard, A., 2001, There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning, in *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.
- Roth, W-M. and McGinn, M, 1998, Inscriptions: Toward a theory of representations as social practice, in *Review of Educational Research, spring 1998*, vol. 68, no1, 35-59.
- Roth, W-M and Lee, Y-J, 2004, Interpreting unfamiliar Graphs: A generative, activity theoretic model, in *Educational Studies in mathematics*, vol. 57, 265-290.
- Wenger, E. 1998. *Communities of practice: learning, meaning and identity*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Η ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Στην μαθηματική εκπαίδευση, η γενίκευση έχει προσελκύσει την προσοχή τόσο των ερευνητών όσο και των εκπαιδευτικών. Για παράδειγμα, οι Steele and Johanning (2004) την συνδέουν με την ανάπτυξη των γνωστικών σχημάτων και τις δεξιότητες λύσης προβλήματος. Ο Tall (1991) διακρίνει δύο είδη γενίκευσης, την *επεκτατική γενίκευση* και την *επανακατασκευαστική γενίκευση* και τις συνδέει με τους δύο τρόπους ανάπτυξης ενός γνωστικού σχήματος (ΓΣ), δηλαδή την *αφομοίωση* και την *προσαρμογή* αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον Mason (1996), ένας τρόπος για να αναπτύξουμε την τάση για γενίκευση είναι 'να επισημαίνουμε το γενικό από το συγκεκριμένο και το συγκεκριμένο από το γενικό'. Παρά το ότι η γενίκευση και η αφαίρεση (αφαιρετική διαδικασία) είναι στενά συνδεδεμένες, σύμφωνα με τον Mac Lane (1986, σελ. 435) οι διαδικασίες αυτές δεν ταυτίζονται: 'Η γενίκευση σκοπεύει στο να συμπεριλάβει όλες τις περιπτώσεις σε μια κοινή οπτική η οποία να

περιλαμβάνει τις κύριες ιδιότητες όλων αυτών των περιπτώσεων. Η αφαίρεση σκοπεύει στην επιλογή συγκεκριμένων κεντρικών ιδιοτήτων των προηγούμενων περιπτώσεων και την απελευθέρωσή τους από συγκεκριμένα πλαίσια και στόχους. Με τον τρόπο αυτόν η αφαίρεση μπορεί να οδηγήσει στην περιγραφή και ανάλυση νέων και πιο λιτών ή πιο ‘αφηρημένων’ μαθηματικών εννοιών’.

Στα επόμενα θα παρουσιάσουμε σύντομα την περιγραφή μιας επιστημολογικής προσέγγισης της Θεωρητικής Γενίκευσης (ΘΓ) η οποία βασίζεται στις ιδέες του Dörfler (1991).

Το σημείο αφετηρίας για την ΘΓ είναι μια ενέργεια (action) ή ένα σύστημα ενεργειών (system of actions) οι οποίες είναι υλικές, νοητικές ή συμβολικές, αλλά πάντα συγκεκριμένες. Ο στόχος, η διαδρομή και τα αποτελέσματα αυτών των ενεργειών κατευθύνουν την προσοχή μας σε κάποιες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων επί των οποίων εκτελούνται οι ενέργειες. Αν οι σχέσεις αυτές παραμένουν σταθερές όταν οι ενέργειες επαναλαμβάνονται όσο συχνά θέλουμε, τότε θα τις ονομάσουμε *αναλλοίωτες των ενεργειών ή σχήμα των ενεργειών* (invariants of actions or schema of actions).

Η εισαγωγή συμβόλων για τα στοιχεία των ενεργειών, για τις ιδιότητές τους, για τους μετασχηματισμούς ή τους συνδυασμούς τους, κάνει δυνατή την συμβολική περιγραφή των αναλλοίωτων. Τα σύμβολα μπορεί να είναι γλωσσικά, εικονικά, γεωμετρικά ή αλγεβρικά. Σε κάθε περίπτωση οι αναλλοίωτες περιγράφονται διαμέσου των συμβόλων και επομένως είναι καθορισμένες. Κατ’ αρχήν αυτά τα σύμβολα, είναι σύμβολα για τα στοιχεία των ενεργειών ή για τα αριθμητικά ή γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους και για τους μετασχηματισμούς τους. Επομένως, στην αρχή τα σύμβολα έχουν την ιδιότητα των αντιπροσώπων και διαδραματίζουν έναν περιγραφικό ρόλο. Αλλά σύντομα, καθώς αρχίζουμε να τα αντικαθιστούμε με άλλα, αρχίζουμε επίσης να απομακρυνόμαστε από την αρχική κατάσταση και να εστιάζουμε την προσοχή μας σε συγκεκριμένες ιδιότητες και σχέσεις. Με αυτό εννοούμε ότι οι ιδιότητες και σχέσεις αποκτούν ανεξαρτησία από τα στοιχεία με τα οποία αρχικά είχαν συνδεθεί. Η διαδικασία αυτή είναι η *κατασκευαστική αφαίρεση* (constructive abstraction) και αυτό που έχει αφαιρετικοποιηθεί συνίσταται από ενέργειες και αποκτά νόημα και ύπαρξη από αυτές.

Από την αρχή τα σύμβολα έχουν ένα συγκεκριμένο πεδίο αναφοράς και αυτό το πεδίο μπορεί τώρα να επεκταθεί σταδιακά, έχοντας ως οδηγό τις αναλλοίωτες. Επομένως, οι αναλλοίωτες στην συμβολική τους περιγραφή είναι ένα εργαλείο για την ανάπτυξη *ταυτοτικών ενεργειών* (identical actions). Η ανάπτυξη ταυτοτικών ενεργειών προκύπτει από ερωτήματα όπως: Με ποιους τρόπους και με ποια μέσα μπορώ να ενεργώ έτσι ώστε να υποστηρίζονται οι ήδη εκφρασμένες αναλλοίωτες; Τα ερωτήματα αυτά μας οδηγούν στην *επεκτατική γενίκευση* (extensional generalization). Στην αρχή αυτή η γενίκευση αναπτύχθηκε διαμέσου ομοιοτήτων των στοιχείων των ενεργειών, δηλαδή είχαμε μια εμπειρική γενίκευση (empirical generalization). Αργότερα όμως, οι αναλλοίωτες γίνονται τα κριτήρια για την επιλογή μαθηματικών αντικειμένων ως στοιχεία των ενεργειών. Επομένως τα σύμβολα που χρησιμοποιήσαμε στην αρχή έγιναν μεταβλητές. Παρατηρούμε ότι στην συμβολική περιγραφή των αναλλοίωτων, τα σύμβολα αρχίζουν σταδιακά να αντικαθιστούν τα στοιχεία των ενεργειών και τους μετασχηματισμούς με αυτά. Τα σύμβολα αποκτούν τον χαρακτήρα αντικειμένων, γίνονται δηλαδή τα ίδια στοιχεία των ενεργειών και ως τέτοια είναι πλέον οι *φορείς* (carriers) των αναλλοίωτων σχέσεων και αυτό είναι ένα αποφασιστικό βήμα. *Αλλάζοντας την οπτική με την οποία τα βλέπουμε, μπορούμε τώρα να τα θεωρούμε ως ανεξάρτητα μαθηματικά αντικείμενα*. Τα σύμβολα είναι αποσπασμένα από το πεδίο αναφοράς τους και αποκτούν το νόημά τους από τις

αναλλοιώτες καθώς και από τις σχέσεις τις οποίες εφαρμόζουμε. Αυτή η *εκπραγμάτωση* (reification) ή *αντικειμενοποίηση* (objectification) των μεταβλητών συμπληρώνει την αφαιρετική διαδικασία η οποία άρχισε με την επισήμανση των αναλλοιώτων. Εδώ πλέον έχουμε την *προθετική γενίκευση* (intentional generalization). Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε σε νέες κατασκευαστικές γενικεύσεις έχοντας ως σημείο εκκίνησης μια ήδη υπάρχουσα γενίκευση κλπ.

Προσοχή: Ο Dörfler εδώ ταυτίζει τους όρους reification και objectification. Η ταύτιση μπορεί να προκαλέσει σύγχυση επειδή δεν υπάρχει μια γενική συμφωνία για το ότι οι δύο αυτοί όροι έχουν το ίδιο νόημα.

Βιβλιογραφία

- Dörfler, W, 1991, 'Forms and means of generalization in mathematics', in Bishop, A. J., Mellin-Olsen, S. and van Dormolen, J., (eds) *Mathematical knowledge: Its growth through teaching, Mathematics education library*, Springer-Verlag, Dordrecht: The Netherlands.
- Mac Lane, S, 1986, '*Mathematics: Form and function*', Springer-Verlag, New York.
- Mason, J., 1996, 'Expressing generality and roots of algebra', in Bednarz N, Kieran K, and Lee L, (eds), *Approaches to algebra*, Kluwer Academic Publishers, p. 65-86.
- Steele, D. F. and Johanning, D. I, 2004, 'A schematic-theoretical view of problem solving and development of algebraic thinking', *Educational Studies in Mathematics*, 57, p. 65-90.
- Tall, D., 1991, 'The psychology of advanced mathematical thinking', in Tall, D., (ed.), *Advanced mathematical thinking*, Kluwer Academic Publishers, p. 3-21