

## Κεφάλαιο 2ο

### 1. Γνωστικές διαστάσεις της Λύσης Προβλήματος

#### 1.1. Η ανεπάρκεια του «παραδοσιακού» διδακτικού μοντέλου.

Ο δάσκαλος των Μαθηματικών είναι υποχρεωμένος να παίρνει συνεχώς αποφάσεις: Αποφάσεις για την παρουσία και το ρόλο του στην τάξη, για τον τρόπο που θα αντιμετωπίσει τους μαθητές του, για τον τρόπο που θα ερμηνεύσει και θα αξιολογήσει τις απαντήσεις τους.

Οι αποφάσεις αυτές στηρίζονται σε βαθιά ριζωμένες αντιλήψεις, πεποιθήσεις και «πιστεύω», οι οποίες, με τη σειρά τους, βασίζονται σε συγκεκριμένες φιλοσοφικές και επιστημολογικές αρχές για το τι είναι γνώση και για το πώς μαθαίνει ο μαθητής. Κατά συνέπεια, το «φιλοσοφικό και επιστημολογικό» υπόβαθρο του δασκάλου οδηγεί σε συγκεκριμένες διδακτικές αντιλήψεις και πρακτικές.

Ας δούμε δύο παραδείγματα:

1. Αν ένας δάσκαλος πιστεύει ότι οι μαθητές του, προκειμένου να αρχίσουν να λύνουν προβλήματα, θα πρέπει πρώτα να γνωρίζουν την «θεωρία» δηλαδή τα αξιώματα, τα θεωρήματα και τις άλλες προτάσεις μιας ενότητας, είναι πολύ πιθανόν ότι δεν θα επιχειρήσει ποτέ να εισάγει νέες μαθηματικές έννοιες διαμέσου της επίλυσης προβλημάτων.

2. Αν κάποιος δάσκαλος πιστεύει ότι η γνώση είναι προσωπική υπόθεση του κάθε μαθητή και αγνοεί την κοινωνική της διάσταση, τότε είναι προφανές ότι η εργασία με ομάδες μαθητών δε θα περιλαμβάνεται στις δραστηριότητες που θα οργανώσει στην τάξη.

Οι βασικές αρχές που χαρακτηρίζουν το «παραδοσιακό» διδακτικό μοντέλο, είναι οι ακόλουθες δύο, Moreno-Armella and Waldegg (1993):

1. Ο Μαθηματικός Ρεαλισμός.
2. Ο (διδακτικός) Φορμαλισμός.

Ο Μαθηματικός Ρεαλισμός, ο οποίος μπορεί να παρουσιαστεί είτε ως Πλατωνικός Ιδεαλισμός είτε ως Αριστοτελικός Εμπειρισμός, έχει ως αποτέλεσμα το διαχωρισμό του υποκειμένου από τη γνώση: Η γνώση είναι εξωτερική ως προς το γνώστη.

Με τον όρο διδακτικό Φορμαλισμό, εννοούμε το πλαίσιο «νομιμοποίησης» της γνώσης, σύμφωνα με τα standards που ορίζει σε κάθε εποχή η μαθηματική κοινότητα.

Οι δύο αυτές αρχές καθορίζουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο τα Μαθηματικά θεωρούνται ως αντικείμενο διδασκαλίας. Αυτό σημαίνει ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο γνώσεων το οποίο, αφού είναι εξωτερικό ως προς τον γνώστη π.χ. τον μαθητή, μπορεί να μεταφερθεί από αυτόν που το κατέχει σε αυτόν που δεν το κατέχει.

Το πλαίσιο του «παραδοσιακού» διδακτικού μοντέλου έχει τις ακόλουθες συνέπειες:

Το έργο του δασκάλου: Συνίσταται στην «μεταφορά» της γνώσης στον νου του μαθητή. Ο μαθητής δεν μπορεί να επηρεάσει την γνώση. Το κύριο «όχημα» μεταφοράς της γνώσης είναι ο λόγος, προφορικός ή γραπτός.

Το έργο της Διδακτικής: Είναι βοηθητικό και περιορίζεται στην βελτιστοποίηση της «μεταφοράς» της γνώσης. Στηρίζεται σε κάποιες αρχές γενικά αποδεκτές και οι οποίες με κανέναν τρόπο δεν μπορούν να οικοδομήσουν ένα ανεξάρτητο σύνολο γνώσεων που θα ονομάσουμε «Διδακτική των Μαθηματικών». Τέτοιες γενικές αρχές είναι π.χ. από το απλό στο σύνθετο, από το ειδικό στο γενικό, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο κ.λ.π.

Οι σκοποί και οι στόχοι: Επικεντρώνονται στο περιεχόμενο, γιατί και οι μόνες διδακτικές οδηγίες που πραγματικά «λειτουργούν» είναι όσες αναφέρονται στη διαχείριση της «διδασκείας ύλης».

Η αξιολόγηση: Στο πλαίσιο του διδακτικού Φορμαλισμού, η απάντηση πρέπει να είναι μοναδική, ακριβής, τυπική.

Στο πλαίσιο αυτό, συνήθως, αναπτύσσεται μια αντίληψη που μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Αν γνωρίζεις Μαθηματικά, τότε μπορείς να τα διδάξεις». Η αντίληψη αυτή περιέχει την ακόλουθη υπόθεση: Η καλή κατάρτιση του δασκάλου των μαθηματικών μπορεί να ξεπεράσει κάθε διδακτικό και γνωστικό εμπόδιο. Προφανώς, η καλή κατάρτιση είναι η αναγκαία συνθήκη για μια αποτελεσματική διδασκαλία, χωρίς όμως να είναι και η ικανή. Όπως θα δούμε πιο κάτω, ο μαθητής πρέπει να περάσει από ορισμένα στάδια και να υπερβεί συγκεκριμένα εμπόδια, που μπορεί να θεωρηθούν ως ανεξάρτητα από την καλή κατάρτιση του δασκάλου, με την έννοια ότι περιγράφουν διεργασίες που γίνονται στον νου του μαθητή. Αρχές δεκαετίας του '70, οι αποτυχίες των μαθητών ανάγκασαν τους ερευνητές να επανεξετάσουν την υπόθεση της «μεταφοράς» της γνώσης. Πιο συγκεκριμένα, το ερώτημα που διατυπώθηκε ήταν το εξής:

Στο «δίπολο» του παρακάτω σχήματος,

Δάσκαλος → (μεταφορά γνώσης) → Μαθητής

«κάτι» δεν πρέπει να «μεταφέρεται». Τι είναι αυτό που δεν μπορεί να μεταφέρει ο δάσκαλος στον μαθητή;

## 1.2. Η στροφή προς την Γνωσιακή Επιστήμη: Νέα Διδακτικά μοντέλα

Το ερώτημα της μεταφοράς της γνώσης εστίασε την προσοχή σε ερωτήματα όπως, τι είναι γνώση, πώς λειτουργεί ο νους του ανθρώπου. Το γεγονός αυτό σηματοδοτεί την ανάπτυξη της Γνωσιακής Επιστήμης και την προσεκτική επανεξέταση του έργου του Piaget. Με τον τρόπο αυτό πραγματοποιείται η αποφασιστική «στροφή»: Η γνώση κατασκευάζεται διαμέσου των ενεργειών του υποκειμένου πάνω στα αντικείμενα. Τα Μαθηματικά «αντικείμενα» δεν κατοικούν πλέον σε έναν κόσμο εξωτερικό ως προς τον γνώστη, αλλά κατασκευάζονται, δημιουργούνται, από το ίδιο, διαμέσου μιας συνεχούς διαδικασίας αφομοίωσης και προσαρμογής των γνωστικών του σχημάτων. Η στροφή σηματοδοτεί, επίσης, την ανάπτυξη του Κονστρουκτιβισμού.

Οι γενικές αρχές στις οποίες στηρίζονται τα νέα διδακτικά μοντέλα είναι οι ακόλουθες:

1. Η γνώση είναι πάντα συνδεδεμένη με τον γνώστη. Η γνώση κατασκευάζεται από τον ίδιο και δεν μεταφέρεται.

2. Η νέα γνώση βασίζεται στα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα του υποκειμένου.

3. Η νέα γνώση θεσμοθετείται ως «επίσημη» γνώση μέσα στο περιβάλλον της μαθητικής κοινότητας, η οποία δρα ως «επιστημονική» κοινότητα (κοινωνικός κονστρουκτιβισμός).

Στο νέο αυτό πλαίσιο τα Μαθηματικά θεωρούνται τόσο ως δραστηριότητες που επιτρέπουν την κατασκευή της γνώσης όσο και ως ένα σύνολο γνώσεων.

Το έργο του δασκάλου, είναι τώρα πιο σύνθετο. Συνίσταται στην σχεδίαση και παρουσίαση κατάλληλων Διδακτικών Καταστάσεων, οι οποίες, βασιζόμενες στα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα θα επιτρέπουν στον μαθητή να προσαρμόζει τα νοήματα ή να κατασκευάζει νέα. Επιπλέον, ο δάσκαλος θα πρέπει να έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει «μοντέλα» προκειμένου να ερμηνεύσει τις νοητικές λειτουργίες των μαθητών του.

Το έργο της Διδακτικής, είναι πλέον, καθοριστικό. Συνίσταται στην ανάπτυξη μιας δευτερογενούς γνώσης μέσα από την οποία θα αναγνωρίζουμε τους παράγοντες που επεμβαίνουν σε μια επιτυχή διδακτική κατάσταση, με σκοπό να την αναπαράγουμε σε άλλες περιπτώσεις ή να κατασκευάσουμε νέες διδακτικές καταστάσεις έτσι ώστε κατευθύνουμε και να ελέγξουμε τα αποτελέσματά τους. Το νέο διδακτικό πλαίσιο οδηγεί σε ενεργητικές μεθόδους μάθησης, δηλαδή σε διαδικασίες Λύσης Προβλήματος.

Ας δούμε και πάλι το σχήμα,

Δάσκαλος → (μεταφορά γνώσης) → Μαθητής

Στην πραγματικότητα, εκείνο που «μεταφέρεται» είναι η Πληροφορία. Ο δάσκαλος διαμέσου του λόγου μεταφέρει πληροφορίες στον μαθητή. Αλλά πληροφορία στα Μαθηματικά σημαίνει αλγόριθμοι, κανόνες, τύποι. Η παρατήρηση αυτή δίνει μια καλή ερμηνεία του κεντρικού ρόλου των αλγορίθμων μέσα από το παραδοσιακό μοντέλο.

Ο Λόγος, προφορικός ή γραπτός είναι αναντικατάστατο εργαλείο επικοινωνίας. Για παράδειγμα, ο λόγος συνθέτει το πλαίσιο των προβληματισμών, υποδεικνύει το σημαντικό από το λιγότερο σημαντικό, κ.λ.π., όμως δε μεταφέρει γνώση. Η μόνη περίπτωση που επεμβαίνει αποφασιστικά στην κατασκευή της γνώσης είναι εκείνη όπου, μέσα από τον λόγο, μεταφέρονται πληροφορίες τέτοιες που συνδέουν γνώσεις οι οποίες παρέμεναν ασύνδετες στον νου του μαθητή. Απαραίτητη προϋπόθεση όμως, είναι να υπάρχουν οι γνώσεις αυτές στον νου του μαθητή.

### 1.3. Βασικά στοιχεία της Γνωσιακής Επιστήμης

Θα ονομάσουμε Γνωσιακή Επιστήμη την θεωρία που περιγράφει τον τρόπο ανάπτυξης της γνώσης και μας δίνει ένα μοντέλο λειτουργίας της ανθρώπινης σκέψης. Στην πραγματικότητα είναι το σύνολο των γνώσεων που έχει αναπτυχθεί ή αναπτύσσεται με βάση την θεωρία κατασκευής της γνώσης του Piaget.

Οι κύριες ιδέες της Γνωσιακής Επιστήμης είναι οι ακόλουθες:

#### 1.3.1. Το Γνωστικό Σχήμα (Γ. Σ.) ή Γνωστική Δομή.

Η «χωρητικότητα» της ανθρώπινης μνήμης είναι περιορισμένη. Για να συγκρατήσει μεγάλες ποσότητες πληροφοριών, πρέπει οι πληροφορίες να «αποθηκευτούν» ως οργανωμένα συστήματα που ονομάζουμε chunks. Πολλά τέτοια συστήματα συνδεόμενα μεταξύ τους σχηματίζουν ένα Γ. Σ. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου σε ένα Γ. Σ. τα chunks είναι στενά συνδεδεμένα μεταξύ τους, ώστε ολόκληρο το Γ. Σ. να αποτελεί ένα συμπαγές chunk.

Μπορούμε, επομένως, να δώσουμε την ακόλουθη περιγραφή για το Γ. Σ., όπου η περιγραφή αυτή θα χρησιμεύσει και ως ορισμός, σύμφωνα με τα πρόσφατα συμπεράσματα της Marshall (1995).

Ένα Γ. Σ. είναι ένα «όχημα» της μνήμης που επιτρέπει την οργάνωση των παρεμφερών εμπειριών ενός ατόμου, έτσι ώστε το άτομο:

1. Να μπορεί να αναγνωρίζει νέες εμπειρίες και γνώσεις ως παρόμοιες με ήδη γνωστές ή να διακρίνει διαφορές ανάμεσα σε ήδη υπάρχουσες και νέες.

2. Να έχει πρόσβαση σε ένα βασικό πλαίσιο που περιέχει τα ουσιώδη στοιχεία όλων των παραπλήσιων εμπειριών, συμπεριλαμβανομένων των γλωσσικών και μη γλωσσικών συνιστωσών.

3. Να μπορεί να διατυπώνει συμπεράσματα, να κάνει εκτιμήσεις, να δημιουργεί στόχους και να αναπτύσσει σχέδια ενεργειών στηριζόμενος στο βασικό πλαίσιο.

4. Να χρησιμοποιεί δεξιότητες, διαδικασίες και κανόνες όπως απαιτείται, όταν προσπαθεί να λύσει ένα πρόβλημα για το οποίο έκρινε ότι το βασικό αυτό πλαίσιο είναι κατάλληλο.

Ο «ορισμός» αυτός αντιστοιχίζει τέσσερες βασικές λειτουργίες στο Γ. Σ., όπου κάθε λειτουργία απαιτεί και το δικό της ιδιαίτερο τύπο γνώσης. Έχουμε λοιπόν τους ακόλουθους τύπους γνώσης:

#### 1. Αναγνώριση.

Η αναγνώριση είναι ο πιο κοινός τρόπος ενεργοποίησης ενός Γ. Σ. Ο κεντρικός ρόλος της είναι η αναγνώριση «τρόπων συμπεριφοράς», προτύπων, μοντέλων κ.λ.π., δηλαδή των ουσιαστικών χαρακτηριστικών της κατάστασης που εξετάζουμε και η οποία, αναγνώριση, στη διεθνή βιβλιογραφία καταγράφεται ως pattern recognition. Η αναγνώριση δεν είναι ο έλεγχος ενός αριθμού από βασικά χαρακτηριστικά, τα οποία υποτίθεται ότι το άτομο εξετάζει

ένα-ένα. Αντίθετα, είναι το αποτέλεσμα πολλών γνωστικών διαδικασιών που επεξεργάζονται ταυτόχρονα διάφορα δεδομένα, με αποτέλεσμα την ενεργοποίηση ενός Γ. Σ. που κρίνεται κατάλληλο για την κατάσταση που εξετάζεται.

## 2. Επεξεργασία.

Ο τύπος αυτός αντιστοιχεί στην επεξεργασία των κύριων χαρακτηριστικών της κατάστασης. Η επεξεργασία περιλαμβάνει τόσο συγκεκριμένα παραδείγματα όσο και γενικές γνώσεις οι οποίες περιγράφουν αυτές τις εμπειρίες. Η επεξεργασία επιτρέπει στο άτομο να δημιουργήσει μια εσωτερική ή νοητική αναπαράσταση. Έτσι, από την στιγμή που η κατάσταση αναγνωρίζεται και αντιστοιχίζεται σε ένα Γ. Σ., οι λεπτομέρειες θα τοποθετηθούν κατάλληλα μέσα σε ένα μοντέλο της κατάστασης. Ουσιαστικά, με τον τύπο αυτό της γνώσης γίνεται η αντιστοιχία των ειδικών και συγκεκριμένων χαρακτηριστικών της κατάστασης ή του προβλήματος, στο γενικό Γ. Σ. που έχουμε επισημάνει.

Η αναγνώριση και η επεξεργασία συνιστούν το πλαίσιο που επιτρέπει στο άτομο να αναπτύξει δοκιμαστικές υποθέσεις και να τις ελέγξει. Η διατύπωση των υποθέσεων προκύπτει από την αναγνώριση ενώ η αξιολόγηση των υποθέσεων είναι αποτέλεσμα της επεξεργασίας.

## 3. Σχεδιασμός.

Ο σχεδιασμός αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται το Γ. Σ. προκειμένου να αναπτύξουμε σχέδια και να δημιουργήσουμε σκοπούς και υποσκοπούς. Η χρήση ενός Γ. Σ. δεν είναι απαραίτητα άμεση. Η αναγνώριση ότι ένα Γ. Σ. είναι κατάλληλο σε μια κατάσταση, δε σημαίνει αυτόματα τη δυνατότητα έκφρασής του σε σχέδιο. Η δεξιότητα αυτή αποκτάται από την εμπειρία και συνεχώς βελτιώνεται.

Η εξέταση του σχεδίου μας βοηθά να διακρίνουμε αν το άτομο έχει ένα Γ. Σ. ή όχι για μια συγκεκριμένη κατάσταση προβληματισμού. Είναι πιθανόν ένα άτομο να αναγνωρίσει και να επεξεργαστεί μια κατάσταση αλλά να μην έχει ένα σχέδιο. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι το άτομο δεν έχει ένα Γ. Σ.

## 4. Εκτέλεση του σχεδίου.

Η εκτέλεση είναι η γνώση που επιτρέπει στο άτομο να πραγματοποιήσει τα βήματα του σχεδίου. Συνίσταται από τεχνικές που οδηγούν σε ενέργειες όπως η παρουσίαση μιας δεξιότητας ή η πραγματοποίηση ενός αλγόριθμου. Η εκτέλεση είναι γνώση που, γενικά, «συμμετέχει» σε διάφορα Γ. Σ.

Από τους πιο βασικούς, ψυχολογικούς, παράγοντες που συμβάλλουν στην κατασκευή ενός Γ. Σ. είναι η τόσο η «προσοχή» όσο και η «επανάληψη».

Με τον όρο προσοχή εννοούμε τον τρόπο πρόσληψης και επεξεργασίας των πληροφοριών. Περισσότερα θα αναφέρουμε στην παράγραφο για την Αρχιτεκτονική της Μνήμης.

Με τον όρο επανάληψη εννοούμε ότι ένα Γ. Σ. δεν οικοδομείται από μια μόνον απλή εμπειρία. Το άτομο πρέπει να βρεθεί ενώπιον πολλών, παρόμοιων, εμπειριών προκειμένου να αρχίσει να εντοπίζει τα βασικά, κοινά, χαρακτηριστικά τους.

Τέλος, θα πρέπει να τονίσουμε το γεγονός ότι επειδή ένα Γ. Σ. κατασκευάζεται στη βάση των προηγούμενων, προσωπικών, εμπειριών και γνώσεων, δεν υπάρχουν δύο άτομα με το ίδιο Γ. Σ. επειδή δεν μπορεί να έχουν ακριβώς τις ίδιες εμπειρίες. Από την άλλη μεριά τα Γ. Σ. δύο διαφορετικών ατόμων, που αναφέρονται στο ίδιο θέμα, δεν μπορούν να διαφέρουν ριζικά αλλά θα πρέπει να έχουν την ίδια γενική μορφή. Την πρόταση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε ως βασική υπόθεση στην παράγραφο για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας.

### **1.3.2. Η έννοια της Αναπαράστασης (Representation).**

Τα πρόσφατα συμπεράσματα των ερευνών πάνω στην έννοια της Αναπαράστασης οδήγησαν στην διάκριση ανάμεσα στο υλικό σημείο - σύμβολο της αναπαράστασης (το σημαίνον-signifier) και στην έννοια η οποία αναπαρίσταται με το σύμβολο (σημαινόμενο-signified).

Το γεγονός ότι ένα σύμβολο αντιστοιχεί σε μια έννοια στο νου, οδηγεί, με την σειρά του, στην διάκριση ανάμεσα στην Εξωτερική Αναπαράσταση (E.A.-external representation) και στην Εσωτερική Αναπαράσταση (Εσ.Α.-internal representation). Οι Ε.Α. δρουν ως «ερεθισμοί» στις αισθήσεις και συνίστανται από διαγράμματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις, διάφορα μοντέλα, γραφικά υπολογιστών καθώς και τα τυπικά σύμβολα και άλλες παραστάσεις της γλώσσας των Μαθηματικών.

Η φύση των Εσ. Α. είναι πιο ασαφής, επειδή δεν μπορούν να παρατηρηθούν απευθείας αλλά γίνονται αντιληπτές μόνο από παρατηρήσεις επί των μαθητών όταν αυτοί εργάζονται.

Μια Εσ. Α. (ή και νοητική αναπαράσταση), είναι ο προσωπικός τρόπος με τον οποίο ένα άτομο κινητοποιεί τις γνώσεις του όταν βρίσκεται απέναντι σε ένα πρόβλημα. Η Εσ. Α. είναι προϊόν νοητικής δραστηριότητας μέσω της οποίας ανασυντάσσεται η πραγματικότητα που αντιμετωπίζουμε και στην οποία προσδίδουμε μια συγκεκριμένη σημασία.

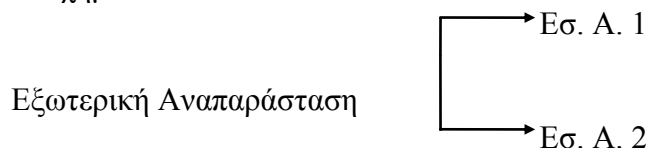
Σε κάθε Ε. Α. διακρίνουμε τους κανόνες με βάση τους οποίους την κατασκευάζουμε και που αποτελούν «το συντακτικό» (syntax) επίπεδο της Ε. Α., και το «σημασιολογικό ή εννοιολογικό επίπεδο» (semantics) που αντιστοιχεί στην σύνδεση της Ε. Α. με την αντίστοιχη Εσ. Α. Για παράδειγμα, η κατασκευή μιας γραφικής παράστασης αλλά και η ανάγνωση των συντεταγμένων ενός σημείου της αντιστοιχεί στο συντακτικό επίπεδο, ενώ οι έννοιες που αντιστοιχούν στην γραφική παράσταση και η συσχέτισή τους μέσω του συγκεκριμένου σχήματος αντιστοιχούν στο σημασιολογικό επίπεδο. Επίσης, στην περίπτωση π.χ. της επίλυσης της εξίσωσης  $x+5=8$ , αν πούμε ότι «μετακινούμε το 5 στο δεξιό μέρος της εξίσωσης με αλλαγμένο το πρόσημο» τότε εργαζόμαστε στο συντακτικό επίπεδο, δηλαδή εργαζόμαστε με τους κανόνες της Ε. Α. Αν όμως πούμε ότι «αφαιρούμε από τα δύο μέλη της εξίσωσης το 5 προκειμένου να διατηρηθεί η ισότητα» τότε βρισκόμαστε στο σημασιολογικό επίπεδο, δεδομένου ότι συνδέουμε την Ε. Α. με την αντίστοιχη Εσ. Α.

### 1.3.3. Συσχέτιση Ε. Α και Εσ. Α.

Οι αναπαραστάσεις μπορούν να είναι εικονικές και συμβολικές (μη εικονικές). Για παράδειγμα, εικονική αναπαράσταση είναι π.χ. τα αρχιτεκτονικά σχέδια, οι γεωγραφικοί χάρτες, μια γραφική παράσταση, το II και III αντί των 2 και 3, τα διάφορα σήματα κ.λ.π. Αντίθετα, στις συμβολικές αναπαραστάσεις τα σύμβολα επιλέγονται συνήθως με αυθαίρετο τρόπο, επομένως η διαδικασία της ερμηνείας των συμβόλων δεν υποβοηθείται από κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό.

Οι Ε. Α. και οι Εσ. Α. συνδέονται με τους ακόλουθους δύο τρόπους:

1.Ομωνυμία (Homonymy): Όπου η ίδια Ε. Α. αντιστοιχεί σε δύο (ή περισσότερες) Εσ. Α., σύμφωνα με το σχήμα:

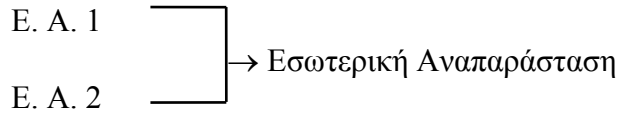


Παράδειγμα 1ο. Στην εξίσωση  $2x+3=4$  το  $x$  θεωρείται ότι έχει μια σταθερή αλλά άγνωστη τιμή που πρέπει να υπολογιστεί. Αντίθετα, στην  $\psi=2x+3$  το  $x$  είναι μια μεταβλητή όπου για μια τιμή του  $x$  η παράσταση παίρνει την τιμή  $\psi=4$ .

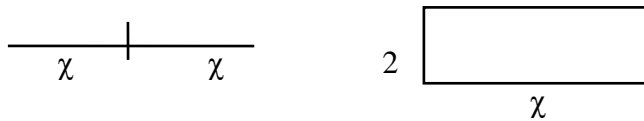
Παράδειγμα 2ο. Η παράσταση  $x^2 + y^2 = r^2$  μπορεί να αναφέρεται τόσο σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές  $x$ ,  $y$  και υποτείνουσα  $r$ , όσο και σε κύκλο κέντρου  $(0,0)$  και ακτίνας  $r$ .

Ερώτηση: Ποια καμπύλη παριστάνει ο τύπος  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ , όπου  $v$  είναι η ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  ενός κινητού σε βολή με αρχική ταχύτητα  $v_0$  και με γωνία βολής  $\omega_0$ , ενώ  $v_x, v_y$  είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας στον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα;

2.Συνωνυμία (Synonymy): Όπου η ίδια Εσ. Α. (η ίδια έννοια), αντιστοιχεί σε δύο διαφορετικές Ε. Α., σύμφωνα με το σχήμα:



Παράδειγμα 1ο. Το μονώνυμο  $2\chi$  μπορεί να παρασταθεί με τους ακόλουθους τρόπους:



Δηλαδή το  $2\chi$  μπορεί να σημαίνει το διπλάσιο του ευθυγράμμου τμήματος  $\chi$ , είτε το εμβαδόν ενός ορθογώνιου με διαστάσεις  $\chi$  και 2.

Παράδειγμα 2ο. Οι λύσεις της ανίσωσης  $|\chi-3| \leq 5$ , μπορεί να παρασταθούν γραφικά (Ε. Α.) με διάφορους τρόπους. Ποιοι είναι;

Προσοχή: Στην βιβλιογραφία, π.χ. Brousseau et all (1986), χρησιμοποιείται και ο όρος «Αναπαράσταση του προβλήματος» ή και «Εσωτερική Αναπαράσταση του προβλήματος». Με τον όρο αυτόν θα εννοούμε το νοητικό μοντέλο που εκφράζει την μαθηματική δομή του προβλήματος. Τονίζουμε ότι η δομή του προβλήματος μπορεί να γίνει αντιληπτή με λανθασμένο τρόπο, έστω και αν η ανάκληση των Γ.Σ. και οι σχετικές Εσ. Α. είναι σωστές.

#### 1.3.4. "Μεταφράσεις" (Translations)

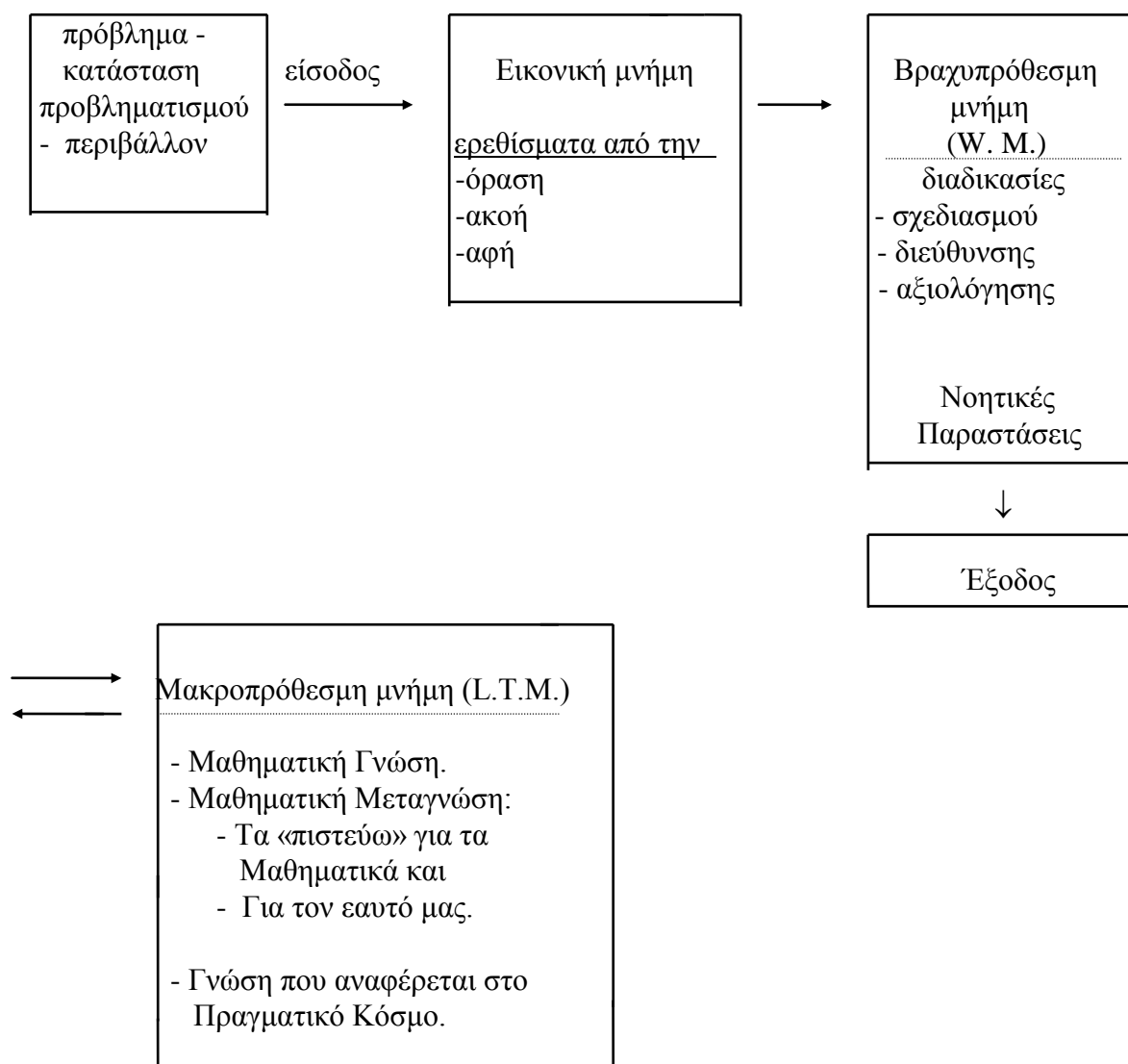
Χαρακτηριστικό αποτέλεσμα Συνωνυμίας είναι η περίπτωση όπου μια έννοια, μια διαδικασία ή ένα μαθηματικό «αντικείμενο» μπορεί να παρασταθεί με διάφορους τρόπους. Ο παρακάτω πίνακας του Janvier (1987), αναφέρεται σε διαδικασίες μετάφρασης περιοριζόμενος στην έννοια της συνάρτησης. Τον πίνακα αυτόν θα μελετήσουμε διεξοδικά όταν θα αναφερθούμε στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

προς από	Περιγραφή	Πίνακες αριθμών	Γραφικές παραστάσεις	Αλγεβρικούς τύπους
Περιγραφή		μετρήσεις (measuring)	σχεδίαση (sketching)	μοντελοποίηση (modelling)
Πίνακες αριθμών	ανάγνωση (reading)		Γραφική αποτύπωση (plotting)	Προσαρμογή (fitting)
Γραφικές παραστά- σεις	ερμηνεία (interpretation)	ανάγνωση τμημάτων (reading-off)		προσαρμογή καμπύλης (curve fitting)
Αλγεβρικούς τύπους	αναγνώριση των μεταβλητών (parameter recognition)	υπολογισμός (computing)	σχεδίαση (sketching)	

### 1.3.5. Η Αρχιτεκτονική της Μνήμης.

Το επόμενο διάγραμμα είναι ένα μοντέλο της μνήμης γενικά αποδεκτό, βλέπε π.χ. Silver (1987).

Σύμφωνα με το μοντέλο, οι πληροφορίες από το περιβάλλον ή το κείμενο του προβλήματος αρχικά εισέρχονται στην εικονική μνήμη, όπου άλλες προωθούνται στην Βραχυπρόθεσμη (W. M.) μνήμη ενώ άλλες αγνοούνται. Στην Βραχυπρόθεσμη μνήμη γίνονται όλες οι νοητικές δραστηριότητες και αναπτύσσονται οι νοητικές ή Εσ. Α. με την ανάκληση από την Μακροπρόθεσμη μνήμη των κατάλληλων Γ. Σ. Ότι λέμε και ότι κάνουμε εκπορεύεται από την Βραχυπρόθεσμη μνήμη. Ένα βασικό χαρακτηριστικό της μνήμης αυτής είναι η περιορισμένη της χωρητικότητα. Δεν μπορεί να συγκρατήσει περισσότερες από 6 ή 7 διαφορετικές πληροφορίες ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να κάνουμε «απέξω» τον πολλαπλασιασμό π.χ. 375x143 γιατί δεν μπορούμε να συγκρατήσουμε τα μερικά αθροίσματα. Το γεγονός αυτό περιορίζει αποφασιστικά το μέγεθος των προβλημάτων που μπορεί κάποιος να διαπραγματευθεί επιτυχώς.



Η Μακροπρόθεσμη μνήμη (L. T. M.) είναι το μέρος που «αποθηκεύονται» τα Γ. Σ. Η δομή της μοιάζει με δίκτυα (networks) όπου οι κόμβοι (nodes) αντιπροσωπεύουν τις έννοιες και οι ευθείες τις συνδέσεις μεταξύ των κόμβων (σχέσεις μεταξύ των εννοιών).

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, η διαδικασία Λύσης Προβλήματος γίνεται ως εξής:

Αμέσως μετά την εισαγωγή των πληροφοριών στην εικονική μνήμη, γίνεται μια Εσ. Α. της κατάστασης που παρουσιάζει το πρόβλημα και στην συνέχεια η ανάκληση των κατάλληλων Γ. Σ., αναπτύσσεται η Εσ. Α. της γνώσης, εισάγονται τα δεδομένα του προβλήματος και συγκροτούνται οι κατάλληλες στρατηγικές που, ενδεχομένως, θα οδηγήσουν στην επίλυση του προβλήματος. Συνήθως, ο μαθητής σχηματίζει μια αρχική Εσ. Α. του προβλήματος αμέσως ή λίγο μετά το διάβασμα του προβλήματος. Η Εσ. Α. βελτιώνεται αργότερα με επιπλέον πληροφορίες από το πρόβλημα, που αρχικά είχαν αγνοηθεί, και με την ανάκληση συμπληρωματικών Γ. Σ. από τη L. T. M.

Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι η επιλογή των πληροφοριών που κάνει ο μαθητής σχετίζεται με την «προσοχή», πράγμα που σημαίνει ότι ο όρος αυτός περιγράφει μία διαδικασία επεξεργασίας πληροφοριών επιλεκτικού χαρακτήρα.

Σχετικά με την προσοχή, η θεωρία των Shiffin & Schneider (αναφέρεται από την Marshall) υποστηρίζει ότι όλα τα δεδομένα υφίστανται μια αρχική επεξεργασία αλλά το ενδιαφέρον κατανέμεται με διαφορετικό τρόπο στις πληροφορίες, ανάλογα με την κατάσταση. Σύμφωνα με την Marshall, δεν πρόκειται για αντιθετικές θεωρίες αλλά μάλλον για συμπληρωματικές,



όπου η πρώτη ερμηνεύει τον τρόπο με τον οποίο «αποτυπώνεται» μια εμπειρία στην μνήμη, ενώ η δεύτερη περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ενσωματώνεται σε ένα Γ. Σ.

#### **1.4. Η διαδικασία της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών.**

Σύμφωνα με τον Constructivism, ο μαθητής συμμετέχει ενεργά στην κατασκευή των Γ. Σ., γεγονός που σημαίνει ότι η μάθηση είναι ενεργητική και όχι παθητική διαδικασία. Από την άλλη μεριά, ότι πούμε και όποιες δραστηριότητες προτείνουμε στον μαθητή, αυτός θα τις ερμηνεύσει βασιζόμενος στις ιδέες και γνώσεις που ήδη έχει.

Ας δούμε τώρα ένα γενικό σχήμα της γνωστικής ανάπτυξης:

Αρχίζουμε από την ήδη υπάρχουσα γνώση την οποία ας ονομάσουμε «σταθερή κατάσταση». Μέσα από νέα ερεθίσματα ή νέες πληροφορίες που δίνονται από τον δάσκαλο, οι μαθητές βρίσκονται μπροστά σε μια νέα κατάσταση. Αν η ήδη υπάρχουσα γνώση δεν επαρκεί για τη διαπραγμάτευση της νέας κατάστασης, τότε προκύπτει μια «αντιπαράθεση» και «παλινδρόμηση» ανάμεσα στην υπάρχουσα γνώση και την νέα κατάσταση όπου ο μαθητής αισθάνεται «αποδιοργανωμένος». Σταδιακά, μέσα από κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις, γίνεται η «αναδιοργάνωση» των γνωστικών του σχημάτων που οδηγεί είτε στην Αφομοίωση (Assimilation), είτε στην Προσαρμογή (Accommodation).

Αφομοίωση είναι η ικανότητα της νόησης να αντιμετωπίζει νέες καταστάσεις και να λύνει προβλήματα με βάση τα Γ. Σ. που έχει στην διάθεσή της. Αυτό γίνεται με την ένταξη των νέων ερεθισμών στα ήδη υπάρχοντα Γ. Σ., έτσι ώστε αυτά να διευρύνονται χωρίς να αλλάζουν διάρθρωση.

Προσαρμογή είναι η λειτουργία της νόησης με την οποία το άτομο αντιμετωπίζει αποτελεσματικά καταστάσεις και προβλήματα, τα οποία δεν είναι σε θέση με την αφομοίωση να τα κατατάξει σε υπάρχοντα Γ. Σ. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο εκδοχές. Το άτομο να τροποποιήσει ένα υπάρχον Γ. Σ. μέσα στο οποίο εντάσσεται η νέα πληροφορία ή να δημιουργήσει ένα νέο Γ. Σ. Η δημιουργία ενός νέου Γ. Σ. δεν έχει παρατηρηθεί και αποτελεί υπόθεση του θεωρητικού πλαισίου.

Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι η αφομοίωση έχει ως συνέπεια την ποσοτική μεταβολή των Γ. Σ., ενώ η προσαρμογή την ποιοτική μεταβολή.

Η αντιπαράθεση προκαλείται από τα εμπόδια (obstacles). Ένα εμπόδιο είναι μια αντίληψη, πιθανώς μια γνώση, η οποία, ενώ ήταν αποτελεσματική στην επίλυση ενός τύπου προβλημάτων, αποτυγχάνει στην επίλυση ενός άλλου τύπου προβλημάτων. Λόγω της προηγούμενης επιτυχίας «αντιστέκεται» σε προσπάθειες τροποποίησης ή απόρριψης με αποτέλεσμα να γίνεται εμπόδιο στην ανάπτυξη νέας γνώσης.

Η παρουσία των εμποδίων γίνεται αντιληπτή από τα λάθη των μαθητών. Τα λάθη, συνήθως, προκαλούνται από τη χρήση της προηγούμενης γνώσης σε νέες καταστάσεις στις οποίες δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Διακρίνουμε τους ακόλουθους τύπους εμποδίων: Επιστημολογικά, Γνωστικά και Διδακτικά εμπόδια. Την φύση των εμποδίων θα εξετάσουμε πιο κάτω.

Τέλος, η αναδιοργάνωση ή εξισορρόπηση είναι η διαδικασία που περιλαμβάνει την Κατανόηση ως μια μακρόχρονη και συνεχή πορεία αναδιοργάνωσης των Γ. Σ., η οποία περιέχει τις ακόλουθες «κατηγορίες ενεργειών»: Αναγνώριση, Διάκριση, Γενίκευση και Σύνθεση, Sierpinska 1992.

Με τον όρο:

Αναγνώριση θα εννοούμε ότι αναγνωρίζω πως μια φράση, μια κατάσταση ένα πρόβλημα, ένας όρος κ.λ.π. έχει ενδιαφέρον, ότι έχει ένα επιστημονικό status και γίνεται το κέντρο του ενδιαφέροντός μου.

Διάκριση θα εννοούμε ότι διακρίνω την ύπαρξη δύο διαφορετικών αντικειμένων που μέχρι την στιγμή αυτή ήταν συγκεχυμένα και επισημαίνω τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.

Γενίκευση θα εννοούμε ότι κατανοώ την πιθανότητα επέκτασης του πεδίου εφαρμογής μιας έννοιας σε νέες καταστάσεις.

Σύνθεση θα εννοούμε την δυνατότητα σύνδεσης μεταξύ εννοιών που μέχρις εκείνη την στιγμή τις θεωρούσα τελείως διαφορετικές.

Ας εξετάσουμε τώρα τη φύση των εμποδίων.

Τα Επιστημολογικά εμπόδια, (E.E.), έχουν σχέση με την ιστορία και την εξέλιξη των επιστημών. Σύμφωνα με τον Bachelard, είναι εμπόδια που έχουν σχέση με την διαδικασία ανάπτυξης της γνώσης όπως, π.χ. η τάση να βασιζόμαστε στις προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις μας προκειμένου να αντιμετωπίσουμε μια νέα κατάσταση. Η τάση να γενικεύουμε καταστάσεις με αποτέλεσμα να συσκοτίζεται μια ειδική περίπτωση κ.λ.π.

Σύμφωνα με την Sierpinska, διακρίνουμε τα ακόλουθα τρία επίπεδα E.E.:

1. Στάσεις, «πιστεύω», πεποιθήσεις, αντιλήψεις.

2. (Ασυνείδητα) σχήματα σκέψης, τρόποι προσέγγισης προβλημάτων, γνώσεις που κατακτήθηκαν από τη μίμηση και την πρακτική κατά τη διάρκεια της κοινωνικοποίησης και της εκπαίδευσης.

3. Η «τεχνική» γνώση, δηλαδή η γνώση που θεωρείται ως επιστημονική.

Τα επίπεδα δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Μεγάλο μέρος της «τεχνικής» γνώσης, τα προβλήματα και οι έννοιες που μας απασχολούν, οι τρόποι που λύνουμε τα προβλήματα, μπορούν να ερμηνευτούν από το πρώτο και το δεύτερο επίπεδο.

Από την άλλη μεριά, κατακτήσεις στην επιστημονική γνώση αλλάζουν τα "πιστεύω" μας και μετασχηματίζουν τα σχήματα της σκέψης.

Τα δύο πρώτα επίπεδα μπορούν να δράσουν ως εμπόδια στο τρίτο (επιστημονική γνώση).

Ένα εμπόδιο αναιρείται, αν είμαστε ικανοί να αποστασιοποιηθούμε από τα «πιστεύω» και τις σκέψεις μας και να ερευνήσουμε προς διαφορετικές κατευθύνσεις.

Τα Γνωστικά εμπόδια, (Γ. E.), είναι το αντίστοιχο των E.E. στο ατομικό επίπεδο. Όπως ήδη έχουμε επισημάνει, σύμφωνα με την Γενετική Επιστημολογία, υπάρχει μια παράλληλη πορεία ανάμεσα στην εξέλιξη των επιστημών και την ανάπτυξη της σκέψης στο επίπεδο του κάθε ανθρώπου. Κατά συνέπεια, ότι έχουμε πει για τα E.E. μεταφέρονται στα Γ. E. Άρα, όταν αναφερόμαστε στους μαθητές θα χρησιμοποιούμε τον όρο Γ. E. Είναι πιθανόν πως όταν μια γνώση έχει αναγνωρισθεί ως E.E. τότε θα υπάρχει και το αντίστοιχο Γ. E. στο επίπεδο του μαθητή.

Τα Διδακτικά Εμπόδια, (Δ. E.), τέλος, προκύπτουν από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

1. Από την φορμαλιστική διδασκαλία. Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής δεν μπορεί να συνδέσει τις έννοιες με την υπάρχουσα γνώση και αυτή η ασυνέχεια αποτελεί πηγή πολλών εμποδίων. Ατυχώς, η ύπαρξη αυτής της ασυνέχειας δεν είναι πάντα φανερή, δεδομένου ότι οι μαθητές μαθαίνουν να επαναλαμβάνουν ορισμούς και να χειρίζονται σύμβολα έστω και αν δεν κατανοούν το νόημά τους.

2. Από την διδακτική μεταφορά. Αυτό σημαίνει ότι προκειμένου να παρουσιαστεί ένα σύνθετο θέμα, συνήθως εκλογικεύεται με βάση αρχές όπως, από το απλό στο σύνθετο, από το μερικό στο γενικό κ.λ.π., με αποτέλεσμα να προκαλούνται πρόσθετα εμπόδια διδακτικού τύπου.

3. Από την αντίληψη ότι «ο καλός δάσκαλος βοηθά τους μαθητές του να υπερβούν τα Γ. E.». Για παράδειγμα, μετά από την διδασκαλία των γραμμικών εξισώσεων γίνεται η διδασκαλία των γραμμικών συναρτήσεων, μετά την διδασκαλία των δευτεροβάθμιων εξισώσεων ακολουθεί η διδασκαλία των τετραγωνικών συναρτήσεων. Το γεγονός αυτό προκαλεί νέα εμπόδια στο μαθητή.

Τα E.E. δεν είναι απαραίτητο να αποτελούν και Γ. E. για τη διδασκαλία. Τα E.E. αναγνωρίστηκαν ως τέτοια στην ιστορία των Μαθηματικών, αλλά το μαθησιακό περιβάλλον σήμερα είναι τελείως διαφορετικό από αυτό στο οποίο δημιουργήθηκαν στο παρελθόν. Για

παράδειγμα, η έννοια του διατεταγμένου ζεύγους ως σημείου στο επίπεδο σήμερα δεν παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες για τους μαθητές, δεδομένου ότι το περιβάλλον δίνει αρκετά ερεθίσματα για την οικοδόμηση αυτής της έννοιας. Επίσης, τα Ε.Ε. που συνδέθηκαν με την εισαγωγή του κατάλληλου συμβολισμού στο Καρτεσιανό Επίπεδο, είναι τελείως διαφορετικά από τα Γ. Ε. που συναντούν οι μαθητές σήμερα: Αυτοί θα πρέπει να κατασκευάσουν τη γνώση και όχι να την ανακαλύψουν. Εξάλλου, είναι γνωστό πως ότι στο παρελθόν αποτέλεσε ερευνητική περιοχή στα Μαθηματικά, σήμερα μπορεί να αποτελεί μέρος του μαθησιακού υλικού στην τάξη.

Τέλος, κατά τον Tall (1989), η παρουσία των υπολογιστών μπορεί να μεταβάλλει την φύση μερικών Γ. Ε. και να παρουσιάσουν άλλα.

Η κατασκευή επιστημονικής γνώσης απαιτεί ρήξη με προηγούμενες γνώσεις. Αυτό σημαίνει ότι, τελικά, ο ρόλος του Γ. Ε. είναι ταυτόχρονα θετικός και αρνητικός. Είναι θετικός γιατί δεν μπορούμε να κάνουμε χωρίς σχήματα σκέψης, «πιστεύω» και αντιλήψεις. Είναι το έδαφος πάνω στο οποίο ενεργούμε. Όμως, αν θέλουμε να διευρύνουμε τις γνώσεις μας προς άλλες κατευθύνσεις ή να τις «βαθύνουμε», πρέπει να ενεργήσουμε αντίθετα με τα «πιστεύω» και τις αντιλήψεις μας. *Πρέπει να αναιρέσουμε τα Γ. Ε. Αυτό μπορεί να γίνει με την γνωστική σύγκρουση ή επιστημολογική ρήξη.*

Προς την κατεύθυνση αυτή, ο ρόλος του δασκάλου είναι καθοριστικός. Θα πρέπει να εφευρίσκει ή να ανακαλύπτει καταστάσεις που να ευνοούν την ρήξη με προηγούμενες γνώσεις, δηλαδή να φέρνουν στην επιφάνεια τις παρανοήσεις των μαθητών και να κατανοούν τις συνέπειές τους. Για να γίνει, όμως, αυτό, θα πρέπει να γνωρίζει τους τρόπους με τους οποίους σκέπτονται οι μαθητές του. Αν δεν τους γνωρίζουμε είναι σαν να βαδίζουμε στα τυφλά.

Η ακόλουθη εργασία θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε το ρόλο των Γ. Ε.

### ΕΡΓΑΣΙΑ

Σας λένε να εξετάσετε αν αληθεύει η πρόταση «Η θερμοκρασία σε έναν τόπο, π.χ. στην Αθήνα, είναι φαινόμενο περιοδικό». Για τον λόγο αυτόν σας δίνουν τον ακόλουθο πίνακα τιμών μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας Αθηνών (Ιανουάριος 1983-Δεκέμβριος 1984).

Μήνας	Θερμοκρασία	Μήνας	Θερμοκρασία	Μήνας	Θερμοκρασία
1	8.8	9	23.2	17	20.7
2	7.5	10	17.7	18	23.9
3	11.3	11	13.3	19	26.2
4	16.7	12	11.2	20	24.9
5	21.4	13	10.9	21	24.0
6	22.9	14	10.3	22	20.7
7	26.8	15	10.8	23	14.4
8	26.0	16	13.4	24	10.4

1. Να καταγράψετε τα γνωστικά εμπόδια που, κατά τη γνώμη σας, θα συναντήσουν οι μαθητές κατά τη διαπραγμάτευση του προβλήματος.

2. Να βρείτε μια συνάρτηση που να μοντελοποιεί τη θερμοκρασία στην περίοδο 1983 - 1984.

Την λύση του δεύτερου ερωτήματος την αφήνουμε στον αναγνώστη.

Ας δούμε τα Γ. Ε. που είναι πιθανόν να αντιμετωπίσει ο μαθητής στο πρόβλημα αυτό.

1ο Γ. Ε.: Τα Μαθηματικά δεν αναφέρονται σε πρακτικά προβλήματα.

1η αναίρεση (Συνθήκη ή ενέργεια κατανόησης):

Ο μαθητής αναγνωρίζει ότι οι παρατηρούμενες μεταβολές στον περιβάλλοντα χώρο, είναι ένα πρακτικό πρόβλημα που μπορεί να το διαπραγματευθεί με τα μαθηματικά, προκειμένου να εξετάσει την αλήθεια ή το ψεύδος της πρότασης. Με άλλα λόγια, ο μαθητής αναγνωρίζει ότι η φράση αυτή έχει ένα επιστημονικό status και επομένως υπόκειται σε μαθηματική διαπραγμάτευση.

Στην περίπτωση αυτή έστω ότι συλλέγουμε δεδομένα και κατασκευάζουμε τον πίνακα που μας δόθηκε.

2ο Γ. Ε.: Οι νόμοι της φυσικής ή τα διάφορα μοντέλα σχέσεων ανάμεσα σε φυσικές ποσότητες και οι συναρτήσεις στα Μαθηματικά, δεν έχουν τίποτα το κοινό. Ανήκουν σε διαφορετικά πεδία σκέψης.

2η αναίρεση:

Σύνθεση των εννοιών του νόμου και της συνάρτησης, ιδιαίτερα, η συνειδητοποίηση της πιθανής χρήσης των συναρτήσεων στη μοντελοποίηση σχέσεων ανάμεσα σε φυσικές ή άλλες ποσότητες. Η αναίρεση αυτή προϋποθέτει:

Διάκριση ανάμεσα σε δύο τρόπους σκέψης: Τον Αλγεβρικό (με όρους γνωστοί - άγνωστοι) και τον «Συναρτησιακό» (με όρους μεταβλητές- σταθερές).

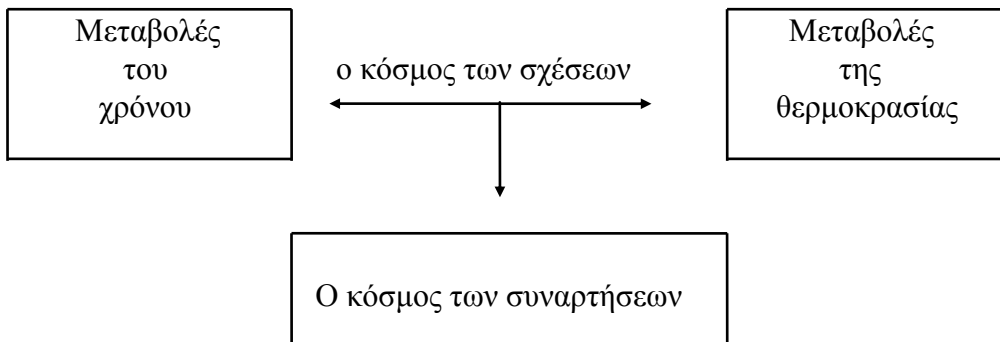
Διάκριση ανάμεσα στην εξαρτημένη και την ανεξάρτητη μεταβλητή.

3η αναίρεση:

Αναγνώριση «κανονικότητας» (μοντέλων συμπεριφοράς) στις σχέσεις ανάμεσα στις μεταβολές, ως τρόπος διαπραγμάτευσης του προβλήματος.

Ας δούμε, τώρα, τον τυπικό ορισμό της συνάρτησης: Μια διατεταγμένη τριάδα  $(X, Y, F)$ , όπου  $X, Y$ , σύνολα και  $F \subset X \times Y$ , τέτοιο ώστε αν  $(x, \psi) \in F$  και  $(x, \psi') \in F$ , τότε  $\psi = \psi'$ .

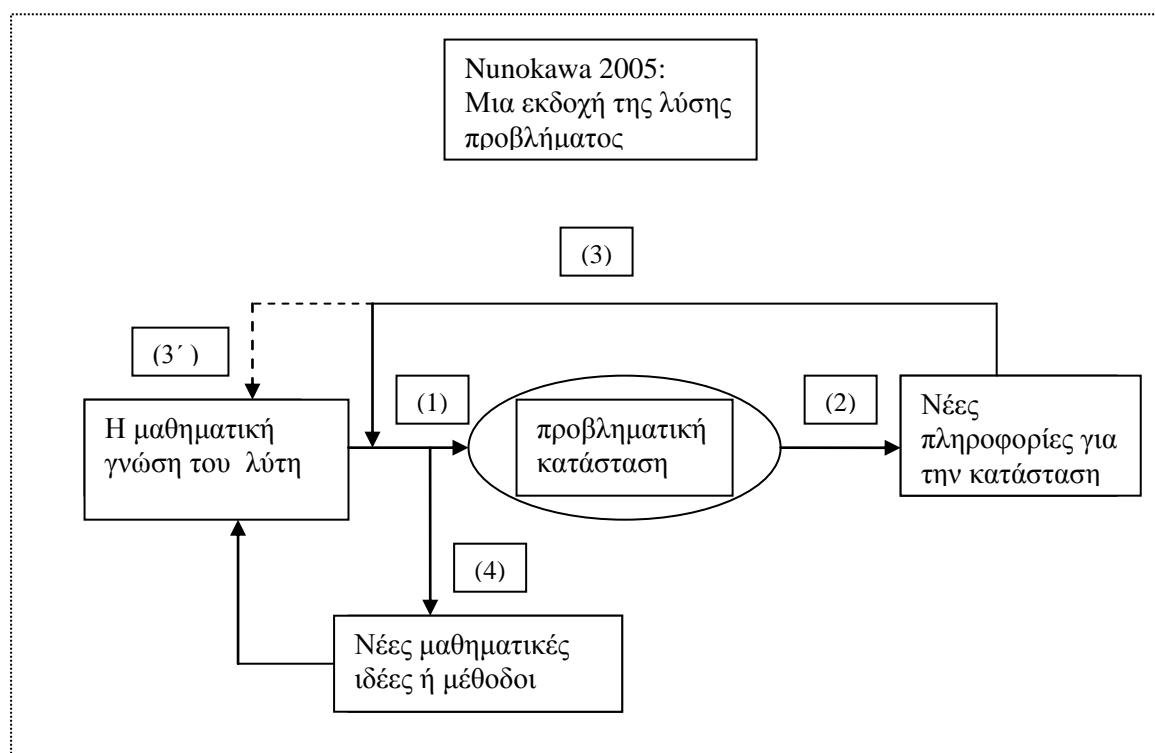
Τα  $X$  και  $Y$  αναφέρονται στον κόσμο των μεταβολών:  $X$  (χρόνος σε μήνες),  $Y$  (θερμοκρασία), ενώ το  $F$  αναφέρεται στον κόσμο των σχέσεων μεταξύ χρόνου και θερμοκρασίας σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:



Αναζητούμε λοιπόν μια συνάρτηση που να «μοντελοποιεί» τη σχέση ανάμεσα στο  $X$  και  $Y$ .

### 1.5. Ερωτήματα για την διδασκαλία των Μαθηματικών με διαδικασίες Λ.Π. και τύποι διδακτικών προσεγγίσεων

Στην παράγραφο αυτή θα συνδέσουμε την λύση προβλήματος με τις διάφορες διδακτικές προσεγγίσεις που προκύπτουν από αυτήν την οπτική γωνία, βλέπε και Nunokawa (2005).



#### A. Τρία γενικά ερωτήματα που αφορούν στην σχέση διδασκαλίας και Λ.Π.

1. Ποιο είδος μάθησης αναμένουμε από τους μαθητές μας να αναπτύξουν διαμέσου των εμπειριών τους από τη Λ.Π.;
2. Προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε αυτή την μάθηση, ποιο είδος εμπειριών θα παρουσιάσουμε στους μαθητές μας και με ποιον τρόπο θα το υποστηρίξουμε;
3. Η μάθηση αυτή θα πρέπει να στοχεύει στην βελτίωση των ικανοτήτων των μαθητών στην διαδικασία της Λ.Π. ή θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την οπτική της Λ.Π. ως έναν τρόπο για να διαπραγματευτούμε νέα μαθηματικά θέματα;

Η ανάπτυξη συγκεκριμένων ειδών μάθησης οδηγεί στους ακόλουθους τύπους διδακτικών προσεγγίσεων:

#### B. Τύποι διδακτικών προσεγγίσεων:

1. Τύπος A: Έμφαση στην εφαρμογή των γνώσεων των μαθητών (διαδικασία 1)  
Ο στόχος είναι να παγιώσουμε και να εμπλουτίσουμε τις υπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών σε ένα μαθηματικό θέμα που έχουν διδαχθεί πρόσφατα. Αυτό μπορεί να γίνει, κυρίως, με ασκήσεις αλλά και προβλήματα.
2. Τύπος B: Έμφαση στην κατανόηση της προβληματικής κατάστασης (διαδικασία 2)

Ο στόχος είναι να παρουσιάσουμε προβληματικές καταστάσεις για τις οποίες οι μαθητές θα αναζητήσουν νέες πληροφορίες ή οι οποίες θα τους οδηγήσουν σε νέες ενδιαφέρουσες πληροφορίες ή απροσδόκητα αποτελέσματα με την χρησιμοποίηση των μαθηματικών τους γνώσεων, ενδεχομένως και με την χρήση artefacts π.χ. υπολογιστή.

3. Τύπος Γ: Έμφαση σε νέες μαθηματικές μεθόδους ή ιδέες. Ο τύπος αυτός ονομάζεται και 'διερευνητική προσέγγιση' (investigative approach). (διαδικασία 4).

Ο στόχος είναι να επιλέξουμε κατάλληλες προβληματικές καταστάσεις οι οποίες έχουν ενσωματώσει τα σημαντικά σημεία ενός μαθηματικού θέματος το οποίο θέλουμε να διδάξουμε. Κατά την διδασκαλία αυτή αναμένουμε από τους μαθητές μας να αναπτύξουν την βασική ή τις βασικές ιδέες του νέου θέματος ως μια λογική απάντηση στα ερωτήματα του προβλήματος.

*Την προσέγγιση αυτή την χρησιμοποιούμε όταν εισάγουμε νέες μαθηματικές ιδέες, στην αρχή μιας διδακτικής ενότητας, και συνοδεύεται από προσεγγίσεις τύπου Α, όπου η νέα γνώση, διαμέσου των ασκήσεων, θα αναγνωρισθεί σε διάφορες καταστάσεις, και τύπου Β, όπου οι μαθητές θα κατανοήσουν καταστάσεις με την χρησιμοποίηση της νέας γνώσης.*

4. Τύπος Δ: Έμφαση στην διδασκαλία της Α.Π  
(διαδικασία 1→2→3 ή 1→4)

Ο στόχος είναι οι μαθητές να αναπτύξουν συγκεκριμένους τρόπους σκέψης και ενεργειών όταν επιχειρούν να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα διαμέσου συγκεκριμένων διαδικασιών, π.χ. όταν ακολουθούν τα τέσσερα βήματα της μεθόδου του Polya. Η διδασκαλία αυτή θεωρεί ότι τα Μαθηματικά είναι ένας τρόπος σκέψης, μια διαδικασία αναζήτησης ή έρευνας για επισήμανση κανόνων συμπεριφοράς ή προτύπων (patterns) προκειμένου να λυθούν προβλήματα. Στον τύπο αυτόν ανήκει και η διαδικασία λύσης 'πραγματικού' προβλήματος (Applied problem solving ή mathematical modeling), την οποία θα συζητήσουμε ξεχωριστά. Τέλος, στον τύπο Δ, όσο και στον Γ, έχουν μεγάλη σημασία για την αποτελεσματική επίλυση προβλημάτων (α) οι στρατηγικές, (β) οι μεταγνωστικές συμπεριφορές (metacognitive behaviors), (γ) οι διαδικασίες ελέγχου της πορείας επίλυσης και (δ) τα κατάλληλα 'πιστεύω' (beliefs).

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν έχουμε αναφερθεί σε συγκεκριμένα διδακτικά μοντέλα. Αυτό σημαίνει ότι καθεμιά από τις πιο πάνω διδακτικές προσεγγίσεις μπορεί να υλοποιηθεί με διάφορους τρόπους. Στο δεύτερο τετράμηνο θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην επικοινωνιακή θεωρία η οποία υποστηρίζει την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία.

#### BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Balacheff, N., 1984 « French Research Activities in Didactics of Mathematics - Some key words and related references», in Steiner et al (eds).
- Balacheff, N., 1989, «Construction and observation of a didactical situation: the sum of the angles of a triangle», in A. Bell et al (eds).
- Balacheff, N. 1990, «Towards a problematique for research on mathematics teaching», Journal for Research in Mathematics Education, 21 (4), 258-272.
- Bell, A, et all, 1989, «The design of Teaching», Shell Centre for mathematical education, Univ. of Nottingham.
- Biehler, R., Scholz, R., Strasser, R. and Winkelmann, B., (eds), 1994, «Didactics of Mathematics as a scientific discipline», Kluwer.

- Bishop, A., J., Mellin-Olsen, S., and Dormolen, J., Van, 1991, «Mathematical knowledge: Its growth through teaching», Kluwer.
- Blum, W., Niss, M., and Huntley, I., (eds.), 1989, «Modelling, Applications and Applied Problem Solving-Teaching Mathematics in a Real Context», Horwood, Chichester.
- Blum, W., and Niss, M., 1989, «Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects-State,Trends and Issues in Mathematics Instruction», in Blum, W., Niss, M., and Huntley, I., (eds.), pp.1-21.
- Blum, W., and Niss, M., 1991, «Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and links to Other Subjects - State, trends and issues in Mathematics Instruction», Educational Studies in Mathematics 22, pp.37-68.
- Brousseau, G., Davis, R., B., and Werner,T., 1986, «Observing students at work», in Christiansen, B., et al, (eds), 1986.
- Brown, M., 1979, «Cognitive Development and the Learning of Mathematics», in Floyd (ed). Christiansen, B., Howson, A., G., and Otte, M., (eds), 1986, «Perspectives on Mathematics Education», Reidel.
- Cobb,P., and Steffe,L.,P.,1993, «The constructivist researcher as a teacher and model builder», Journal for Research in Mathematics Education, vol.14, pp. 83 - 94.
- Davis,P. and Hersh,R.,1981, «The Mathematical Experience», Penguin Books
- De Lange, J., 1987, «Mathematics, Insight and Meaning», OW & OC, Utrecht.
- Douady, R., 1991, «Tool, Object, Setting, Window», in Bishop et al.
- Dunham, P., and Osborne, A., 1991, «Learning how to see: Students' graphing difficulties», Focus on Learning Problems in Mathematics, vol. 13, No 4, pp. 35-49.
- Dubinsky, Ed, and Harel, G., (eds), «The concept of Function, aspects of epistemology and pedagogy», MAA Notes, vol. 25.
- Ernest, P., 1989, «Philosophy,Mathematics and Education», in Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol.20, No 4.
- Floyd, A., (ed), 1979, «Cognitive Development in the School Years», The Open Univ. Press.
- Galbraith, P., 1988, «Mathematics Education and the Future: A long wave of Change», For the Learning of Mathematics, vol. 8, No 3.
- Galovich, S., 1993, «Doing Mathematics», Saunders.
- Grouws,D., (ed), 1992, «Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning», NCTM.
- Harre, R. and Lamb, R., (eds), 1986, «The Dictionary of Developmental and Educational Psychology», Blackwell Reference.
- Herder, V., 1982, Λεξικό Σχολικής Παιδαγωγικής, εκδόσεις Αφοι Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη.
- Hiebert, J., and Behr,M., (eds), 1989, «Number Concepts and Operations in the Middle Grades», LEA-NCTM.
- Hobbs,D., 1988, «Enterprising Mathematics Course», Teaching Mathematics and its Applic., vol. 7, No 2.
- Howson, G., Keitel, C., Kilpatrick, J.,1982, «Curriculum development in mathematics» Cambridge Univ. Press.
- ICMI Study series, 1988, «Shool Mathematics in the 1990's», Cambridge Univ.Press.
- Janvier, C., (ed), 1987, «Problems Of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics», Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaiser-Messmer,G., 1991, «Application - orientated Mathematics Teaching: A survey of the Theoretical Debate», in Niss, M., Blum, W., and Huntley, I., (eds.), pp.83-92.
- Καλαβάσης, Φ. και Μειμάρης, Μ., (eds), 1992, «Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών», Αθήνα, εκδόσεις Προτάσεις.

- Kilpatrick, J., 1985, «A retrospective account of the past 25 years of research on teaching Math. Problem Solving», in Silver, E. (ed).
- Κλαουδάτος, Ν., 1989, «Οι πρόσφατες εξελίξεις στη Λύση Προβλημάτων, στη Μοντελοποίηση και στις εφαρμογές των Μαθηματικών», Ευκλείδης Γ, No 23, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Κλαουδάτος, Ν., 1990, «Μοντελοποίηση: Ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο», Ευκλείδης Γ, τόμος 7, No 25, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Κλαουδάτος, Ν., 1992, «Η Μοντελοποίηση στη Διδακτική Πράξη», στο Καλαβάσης και Μειμάρης (eds).
- Κλαουδάτος, Ν., και Παπασταυρίδης Στ., 1996, «Τα Μαθηματικά του σχολείου και ο πραγματικός Κόσμος: Πως θα συνδυάσουμε Θεωρία και Πράξη», στο «Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών III», GUTENBERG-Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 1996.
- Klaoudatos N., 1994, «Modelling - orientated teaching(a theoretical development for teaching mathematics through the modelling process)», Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol. 25, No 1, pp. 69-79.
- Κομίλη Α., χωρίς χρονολογία, «Σύγχρονη Ψυχολογία», εκδόσεις Λιβάνη.
- Laborde, C. 1994, «Working in small groups: A learning situation?», in Biehler, R., Scholz, R., Strasser, R., and Winkelman, B., (eds), pp. 147-158.
- Lerman, S., 1989, «Constructivism, Mathematics and Mathematics Education», Educ Stud. in Math., vol. 20, pp. 211-223.
- Lesh, R., and Landau, M., 1983, «Conceptual Models and applied mathematical problem solving research», in Lesh and Landau (eds).
- Lesh, R., and Landau, M., (eds), 1983, «Acquisition of mathematics concepts and processes», New York: Academic Press.
- Lester, F., K., Jr., 1985, «Methodological Considerations in research on Mathematical Problem-Solving Instruction», in Silver (ed), 1985.
- Lorenz, J., H., 1988, «Pathologies in children's learning and its theoretical implications», in Steiner and Vermandel, (eds).
- Marshall, S., P., 1995, «Schemas in problem solving», Cambridge Univ. Press.
- Martin A. Simon, 1995, «Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective», Journal for Research in Mathematics Education, vol. 26, pp. 114-145.
- Metraux, A., 1986, «Genetic epistemology», in Harre and Lamb, (eds).
- Moreno-Armella, L., and Waldegg, G., 1993, «Constructivism and mathematics education», Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol. 24, No 5, pp. 653-661.
- NCTM, 1989, «Curriculum and Evaluation Standards».
- Niss, M., Blum, W., and Huntley, I., (eds.), 1991, «Teaching of Mathematical Modelling and Applications», Horwood, Chichester.
- Nunokawa, K., 2005, Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain, in Journal of Mathematical Behaviour, 24, 325-340.
- O'Donnell, J., M., 1985, «The origins of Behaviorism», NY University Press.
- Ohlsson, S., 1989, «Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts», in Hiebert, J., and Behr, M., (eds), pp. 53-92.
- Otte, M., 1982, «Fachdidaktik als Wissenschaft», IDM-Occasional Paper 20, Bielefeld.
- Owens, J. E. 1992. «Cooperative learning in secondary education: Research and theory», Manuscript submitted for publication.
- Polya, G., 1965, «Mathematical Discovery», Wiley, 2 vols.
- Polya, G., 1973 a, «How to solve it», Princeton Univ. Press.
- Polya, G., 1973 b, «Induction and analogy in Mathematics», Princeton Univ. Press.



- Rogerson, A., 1986, «The Mathematics in Society Project: a new conception of mathematics», *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, vol. 17, No 5, pp. 611-616.
- Schoenfeld, A. H., 1983, «Episodes and executive decisions in mathematical problem solving», in Lesh, R., and Landau, M., (eds).
- Schoenfeld, A., H., 1985, «Mathematical Problem Solving», Academic Press.
- Schoenfeld, A., H., (ed), 1987, «Cognitive Science and Mathematics Education», Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum.
- Schoenfeld, A., H., 1987, «Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview», in Schoenfeld (ed), 1987.
- Schoenfeld, A., H., 1992, «Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics», in Grouws, (ed), 1992.
- Schoenfeld, A., H., 1994, «A Discourse on methods», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.25, No6, pp.697-710.
- Sherman, H., 1972, «Common Elements in New Mathematics Programs: Origins & Evolution», Teachers College Press, C.U.
- Sierpinska, A., 1992, «On understanding the notion of Function», in Dubinsky et al (eds), 1992.
- Silver, A., (ed), 1985, «Teaching and Learning Mathematical Problem-Solving: Multiple Research Perspectives», L.E.A.
- Silver, E., A., 1987, «Foundations of Cognitive Theory and Research for Mathematics Problem-Solving instruction», in Schoenfeld (ed) 1987.
- Skinner, B., F., «Teaching machines», in «Science», No 128, pp. 969-977.
- Steiner, H. G., 1984, «Theory of Mathematics Education (TME)», IDM- Occasional Paper 54, Bielefeld.
- Steiner, H.G. and Vermandel, A.,(eds),1988, «Foundations and methodology of the discipline mathematics education (Didactics of Mathematics), Proceedings of the 2nd TME Conference»,Bielefeld,July 15-19,1985.
- Steffe, L., P., and Kieren, T., 1994, «Radical constructivism and mathematics education», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.25, pp.711-733.
- The School Mathematics Project, 1991, «16-19 Mathematics», Cambridge Univ. Press.
- Τουμάσης, Μ.,1994, «Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών», Gutenberg.
- Treilibs, V., Burkhard, H., Brian, L., 1980, «Formulation Processes in Mathematics Education», Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.
- Vermandel, A. and Steiner, H. G., 1988, «Theory of mathematics education, Proceedings of the third international conference", Antwerp, July 11-15, 1988.
- Varela, F., Thompson, E., and Rosch, E., 1991, «The embodied mind», Cambridge, MA: M.I.T. Press.
- Verstappen, P. F. L., 1988, «The Pupil as a Problemsolver-After an image of man in Mathematics Education», in Steiner and Vermandel, (eds), 1988.
- Vidakovic, D. 1993, «Cooperative learning: Differences between group and individual processes of construction of the concept of inverse function», unpublished doctoral dissertation, Purdue University, Indiana, USA.
- Von Glaserfeld, E., 1987, «Learning as a Constructive Activity», in Janvier, (ed).
- Wilson, J., Fernandez, M., L., and Hadaway, N., 1994, «Problem Solving: Managing it all», *The Mathematics Teacher*, vol. 87, No 3, pp.195-199.
- Yackel, E., Cobb, P., and Wood, T., 1991, «Small- group interactions as a source of learning opportunities in second- grade mathematics», *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (5), pp. 390- 480.