

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ  
ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΔΙ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι:

1. Εισαγωγή στην γνωσιακή θεωρία
2. Βασικές αρχές της θεωρίας του Vygotsky

Νίκος Κλαουδάτος

2011

Οι σημειώσεις συνοδεύουν τις αντίστοιχες παραδόσεις του μαθήματος και για τον λόγο αυτό δεν πρέπει να θεωρηθούν ως αυτοτελές κείμενο για μελέτη.

## Κεφάλαιο 1ο

### 1. Εισαγωγή

Το πεδίο αναφοράς της Διδακτικής των Μαθηματικών, ή της Μαθηματικής Εκπαίδευσης για άλλους, χαρακτηρίζεται από την πιο ακραία πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, οποιοδήποτε περιεχόμενο και αν δοθεί στον όρο «Διδακτική των Μαθηματικών», ο όρος αυτός θα περιλαμβάνει αναφορές σε γνωστικά πεδία όπως: Τα Μαθηματικά ως επιστήμη, την ιστορική ανάπτυξη των Μαθηματικών και την αλληλεπίδρασή τους με άλλες επιστήμες καθώς και με την τεχνολογία και την κουλτούρα, το σύνθετο φαινόμενο της σχολικής διδασκαλίας μέσα στις συγκεκριμένες κοινωνικές συνθήκες και απαιτήσεις, τους παράγοντες που επιδρούν στη γνωστική και κοινωνική εξέλιξη του ατόμου, τα διαφορετικά σύνολα των ανθρώπων που εμπλέκονται στις πιο πάνω διαδικασίες κ.λ.π.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τη Διδακτική των Μαθηματικών ως ένα Σύστημα μέσα στο οποίο αναδύονται και εξελίσσονται διάφορα Υποσυστήματα, όχι απαραίτητως αλληλοσυνδεόμενα ή και «καλώς συνεργαζόμενα» μεταξύ τους. Αν, τώρα, η Διδακτική των Μαθηματικών θεωρηθεί ως επιστήμη και ως ένας επαγγελματικός χώρος, τότε αποτελεί και αυτή ένα από τα πολλά υποσυστήματα του συνολικού πεδίου.

Σύμφωνα με τον Otte (1982), το κεντρικό πρόβλημα της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι «τόσο ο καθορισμός του περιεχομένου όσο και η οργάνωση του συστήματος των σχέσεων ανάμεσα στα μέρη που συμμετέχουν στην πραγμάτωση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και της ολοκλήρωσής της σε εκπαιδευτικά και κοινωνικά πλαίσια, με την επιπλέον πρόθεση της βελτιστοποίησής της».

Κατά τον Steiner (1984), η αντίδραση στην πολυπλοκότητα του θέματος οδηγεί συχνά στην αντίληψη ότι είναι αδύνατον να διαπραγματευτούν όλα αυτά τα προβλήματα με επιστημονικό τρόπο και, επομένως, η Διδακτική των Μαθηματικών ποτέ δε θα μπορέσει να γίνει επιστήμη ή να αποκτήσει μια επιστημονική θεμελίωση. Στην περίπτωση αυτή επικρατούν υποκειμενικές θέσεις και «πιστεύω» που οδηγούν σε πραγματιστικές ενέργειες με βραχυπρόθεσμο «βεληνεκές» καθώς και σε ερμηνεία της διδασκαλίας ως τέχνης (art).

Από την άλλη μεριά, η συστηματική υποβάθμιση της συνθετότητας της Διδακτικής με την προτίμηση σε μια, επιλεγμένη, άποψη όπως π.χ. σχεδίαση του Αναλυτικού Προγράμματος, η ανάπτυξη συγκεκριμένων ικανοτήτων στους μαθητές, διδακτικές μέθοδοι κ.λ.π., οδηγεί στην αντίληψη ότι το θέμα αυτό είναι το κεντρικό πρόβλημα της Διδακτικής. Συχνά η αντίληψη αυτή συνοδεύεται με αναφορές σε άλλη επιστήμη όπως π.χ. Μαθηματικά, Επιστημολογία, Ψυχολογία, Παιδαγωγική, Κοινωνιολογία κ.λ.π., όπου η επιστήμη αυτή χρησιμοποιείται ως το υπόβαθρο προκειμένου να «εγκαταταθούν» οι βασικοί προσανατολισμοί και οι ερευνητικές μέθοδοι της Διδακτικής. Κατά συνέπεια, ανάμεσα σε εκείνους που θεωρούν τη Διδακτική των Μαθηματικών ως επιστήμη, μπορεί να εντοπίσει κανείς ένα σύνολο διαφορετικών ορισμών όπως:

- Η μελέτη των σχέσεων ανάμεσα στα Μαθηματικά, το άτομο και την Κοινωνία.
- Η «επανακατασκευή» των σύγχρονων Μαθηματικών σε κατάλληλο, διδάξιμο, επίπεδο.
- Η ανάπτυξη και αξιολόγηση διδακτικών ενοτήτων.

-Η μελέτη της Μαθηματικής γνώσης, οι διάφοροι τύποι της μαθηματικής γνώσης, η αναπαράσταση και ο τρόπος ανάπτυξής τους.

-Η μελέτη της μαθησιακής συμπεριφοράς των μαθητών.

-Η μελέτη και ανάπτυξη των δεξιοτήτων των δασκάλων των μαθηματικών.

-Η μελέτη των αλληλεπιδράσεων μέσα στη σχολική τάξη.

Ανάλογα με την οπτική γωνία έχουμε και την αντίστοιχη ταξινόμηση: Η Διδακτική ως ειδικό κεφάλαιο των Μαθηματικών, ως κλάδος της Επιστημολογίας, ως τομέας της Παιδαγωγικής, ως Κοινωνική επιστήμη κ.λ.π.

Είναι φανερό ότι απαιτείται μια θεωρητική βάση η οποία θα επιτρέψει την καλύτερη κατανόηση των θέσεων, των οπτικών γωνιών και των προθέσεων που βρίσκονται κάτω από τους διαφορετικούς ορισμούς της Διδακτικής. Ταυτόχρονα, η θεωρητική βάση θα επιτρέψει τη διευκρίνιση των σχέσεων ανάμεσα στις διάφορες θέσεις, με σκοπό μια διαλεκτική κατανόηση του συνολικού πεδίου το οποίο, όπως ήδη αναφέραμε, δεν χαρακτηρίζεται από ομοιογένεια και συνάφεια μεταξύ των υποσυστημάτων του.

Ακριβώς αυτή η αναζήτηση της ενιαίας και συνολικής κατανόησης είναι, κατά τη γνώμη μας, και το ισχυρό επιχείρημα για τη διδασκαλία της Διδακτικής των Μαθηματικών σε Πανεπιστημιακό επίπεδο.

Στον Πανεπιστημιακό χώρο, πάντοτε ως στόχοι υπήρχαν τόσο η εκπαίδευση όσο και η διδασκαλία, εξάλλου η Διδακτική ως Πανεπιστημιακό μάθημα έχει τις απαρχές της στην προπαρασκευή δασκάλων για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Και παρά το γεγονός ότι σήμερα οι στόχοι αυτοί υπηρετούνται τόσο από διαφοροποιημένες αντιλήψεις, ενδεχομένως δε και απομονωμένες μεταξύ τους, όσο και από εξειδικευμένη έρευνα, το Πανεπιστήμιο είναι το κατεξοχήν πεδίο ενιαιοποίησης της γνώσης με κατεύθυνση μια συνολική κατανόηση της πραγματικότητας. Αυτό σημαίνει ότι το Πανεπιστήμιο είναι ο χώρος όπου θα αναζητηθεί και, ενδεχομένως, θα διατυπωθεί η θεωρητική βάση της ενιαιοποίησης του συνολικού πεδίου που χαρακτηρίζει τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Κατά τη γνώμη μας το συμπέρασμα είναι σαφές: Η επιτυχής ανάπτυξη της Διδακτικής των Μαθηματικών εξαρτάται από την εξέλιξή της σε δύο επίπεδα. Σε ένα πρώτο επίπεδο, είναι η βασική έρευνα σε υποσυστήματα τα οποία θα μας δίνουν απαντήσεις σε συγκεκριμένα ερωτήματα και προβλήματα. Και σε ένα δεύτερο επίπεδο πολύ γενικό, θα γίνεται η σύνθεση των επιμέρους απαντήσεων σε μια προσπάθεια εντόπισης των διασυνδέσεων, των αντιθέσεων αλλά και της συμπληρωματικότητας των υποσυστημάτων. Είναι το επίπεδο στο οποίο αναπτύσσεται η μέτα-ερευνητική και η μέτα-γνωστική δραστηριότητα.

## **2. Η Διδακτική των Μαθηματικών ως Επιστήμη: Μάθηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών.**

### **2.1. Εσωτερικές και εξωτερικές πιέσεις**

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η επιστημονική αντιμετώπιση της Διδακτικής των Μαθηματικών απαιτεί το συνειδητό περιορισμό της σε ένα υποσύστημα του πεδίου. Κατά την άποψή μας, περιορισμός στις θεωρίες μάθησης και στις αντίστοιχες διδακτικές θεωρίες και πρακτικές δηλαδή η διδακτική της διάστασης, τουλάχιστον ιστορικά, προσδιορίζει τον πυρήνα μέσα από τον οποίο αναπτύχθηκαν

οι διαφορετικές εκδοχές και προσδιορισμοί του συνολικού πεδίου. Για τον λόγο αυτόν στα επόμενα θα περιορίσουμε τον όρο Διδακτική των Μαθηματικών στις θεωρίες μάθησης και διδασκαλίας. Και παρά το γεγονός του περιορισμού, ήδη από πολύ νωρίς θα ιαπιστωθεί η πολυπλοκότητα του θέματος.

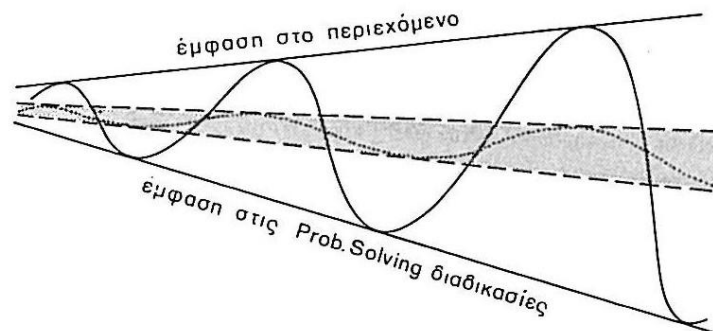
Η Μαθηματική Εκπαίδευση ως θεσμός, επηρεάζεται τόσο από εσωτερικούς όσο και από εξωτερικούς παράγοντες. Σύμφωνα με τους Howson et al (1982), οι αλλαγές προκαλούνται από τους ακόλουθους παράγοντες:

1. Μαθηματικούς (εσωτερικοί).
2. Κοινωνικούς (εξωτερικοί).
3. Εκπαιδευτικούς, π.χ. νέες θεωρίες μάθησης, εισαγωγή νέων τεχνολογιών (εσωτερικοί-εξωτερικοί).
4. Ατομικές πρωτοβουλίες εκπαιδευτικών-ερευνητών (εσωτερικοί).

Στην πρόσφατη ιστορία, το «κύμα» των «Νέων Μαθηματικών» της δεκαετίας του '60 ήταν αποτέλεσμα της πίεσης εσωτερικών κυρίως λόγων. Πράγματι, το χάσμα ανάμεσα στα σχολικά και τα Πανεπιστημιακά Μαθηματικά στο τέλος της δεκαετίας του '50 είχε διευρυνθεί υπέρμετρα, με αποτέλεσμα η όλη κίνηση να χαρακτηριστεί από την προσπάθεια σύγκλισης των γνώσεων στις δυο βαθμίδες «με τη μεταφορά σκοπών, μεθόδων και δομών από τα ανώτερα (θεωρητικά) Μαθηματικά στα σχολικά», ICMPI (1988,σελ.21). Από την άλλη μεριά, κανείς δε μπορεί να αρνηθεί τη μεγάλη ευαισθησία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης στις κοινωνικές απαιτήσεις και «πιέσεις», κάτι που θα διαπιστώσουμε με πιο τυπικό τρόπο στα επόμενα.

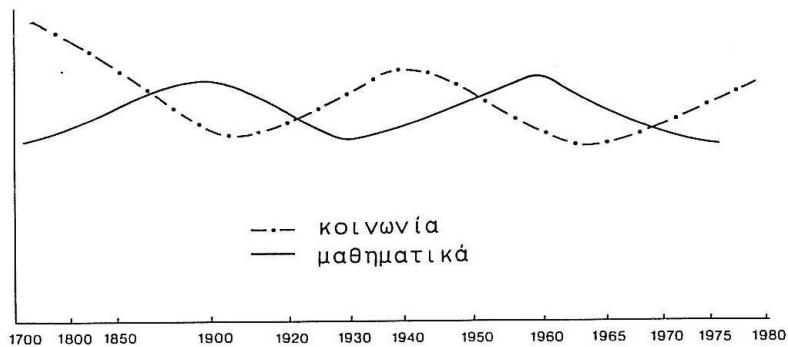
Γενικότερα, το φαινόμενο των αλλαγών είναι σύνθητες στην Μαθηματική Εκπαίδευση και εκδηλώνεται τόσο με τις μεταβολές στα Αναλυτικά Προγράμματα και βιβλία όσο και με αλλαγές στην οπτική γωνία με την οποία γίνεται αντιληπτή η θέση και ο ρόλος του δασκάλου των μαθηματικών στην τάξη.

Κατά τον Verstappen (1988), η Μαθηματική Εκπαίδευση, από την καθιέρωσή της ως θεσμού, ταλαντεύεται ανάμεσα σε δύο ακραίες αντιλήψεις: Την τυπική-παραγωγική, με έμφαση στο περιεχόμενο από την μια μεριά και την ευρετική-διαισθητική, με έμφαση στις διαδικασίες λύσης προβλήματος (problem solving) από την άλλη. Η ταλάντωση αποδίδεται από τον ίδιο με το ακόλουθο σχήμα, όπου η συνεχής διεύρυνση του «χώρου» ανάμεσα στις δύο ευθείες αντιστοιχεί στην συνεχή διεύρυνση των μαθηματικών γνώσεων.



Παρόμοιες αντιλήψεις φαίνεται να υποστηρίζουν οι Davis and Hersh (1981,σελ.183), ο Ernest (1989), ενώ ο Schoenfeld (1987) παρομοιάζει τις μεταβολές του Μαθηματικού Προγράμματος (Curriculum) ως την ταλάντωση ενός εκκρεμούς. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εκτίμηση του Verstappen ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι περίπου 50 χρόνια. Αυτό σημαίνει ότι οι αντιλήψεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση, περίπου κάθε 50 χρόνια υφίστανται μια ριζική αλλαγή.

Η εκτίμηση για έναν κύκλο 50 χρόνων διασταυρώνεται και από τον Galbraith (1988) ο οποίος παραθέτει το επόμενο διάγραμμα, το οποίο έχουμε απλοποιήσει για τις ανάγκες μας.



Το διάγραμμα είναι ποιοτικό και δείχνει μια παράλληλη πορεία ανάμεσα στις μεταβολές των οικονομικών συνθηκών των βιομηχανικά ανεπτυγμένων χωρών και στις αλλαγές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης των χωρών αυτών, οι οποίες συμβαίνουν με μια «διαφορά φάσεως» περίπου 20 χρόνια.

Η άνοδος της καμπύλης της κοινωνίας, που απεικονίζει τις οικονομικές μεταβολές, αντιστοιχεί σε περίοδο οικονομικής άνθισης, π.χ. νέες τεχνολογίες, μεγάλη ικανότητα παραγωγής αγαθών κ.λ.π. Με τον ίδιο τρόπο, η άνοδος της καμπύλης των Μαθηματικών αντιστοιχεί σε έρευνες, αναζητήσεις, συζητήσεις κ.λ.π. για τα προβλήματα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, που καταλήγουν σε νέα προγράμματα και βιβλία. Καθώς, λοιπόν, το διάγραμμα «προτείνει» μια περιοδική μεταβολή των οικονομικών συνθηκών με περίοδο 50 χρόνια περίπου, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια ανάλογη περίοδο έχουμε και στην εκπαίδευση, συμπέρασμα που υποστηρίζει το προηγούμενο διάγραμμα του Verstappen.

Στα μέσα της δεκαετίας του '70 προσδιορίζεται και τυπικά το τέλος του «κύματος» των Νέων Μαθηματικών, αλλά η αντίστροφη μέτρηση ήδη είχε αρχίσει από τις αρχές της ίδιας δεκαετίας. Πράγματι, αρχές της δεκαετίας του '70 παρατηρούμε μια σταδιακή μετακίνηση του κέντρου βάρους από την αντίληψη ότι τα Μαθηματικά είναι ένα σύνολο έτοιμων-ήδη δημιουργημένων-γνώσεων το οποίο παρουσιάζουμε στους μαθητές με την έννοια της αναδρομικότητας, δηλαδή αποστερημένο από τις διαδικασίες της δημιουργίας του, προς πιο ανοικτές διδακτικές μεθόδους οι οποίες αφήνουν χώρο για συλλογισμούς, διερεύνηση, εικασίες, έλεγχο των εικασιών, προσεγγίσεις, μοντέλα κ.λ.π. Με άλλα λόγια, αρχίζει να συνειδητοποιείται η ανάγκη για την ενεργό συμμετοχή του μαθητή στη διαδικασία ανάπτυξης της γνώσης του, δηλαδή ένα είδος βιοματικής οργάνωσης των εμπειριών του. Η κίνηση αυτή, που ήδη έχει πάρει την μορφή ενός «κύματος» με σαφή και διακριτά χαρακτηριστικά και με συνεχώς διευρυνόμενη επιρροή στη Μαθηματική Εκπαίδευση πολλών χωρών, αναγνωρίζεται σήμερα με τον τίτλο «Λύση Προβλήματος» (Problem Solving).

Για την ακρίβεια η Λύση Προβλήματος (στο εξής Λ.Π.), είναι το κύριο από τα παράγωγα αποτελέσματα της σύνθεσης εξωτερικών και εσωτερικών παραγόντων που από τις αρχές της δεκαετίας του '70 επηρεάζουν τη μαθηματική εκπαίδευση.

Πιο συγκεκριμένα, ως εξωτερικούς παράγοντες προσδιορίζουμε την διαφαινόμενη μετάβαση των σύγχρονων κοινωνιών από τη βιομηχανική προς τη μέτα-βιομηχανική μορφή κοινωνικής οργάνωσης, όπου η πληροφορική, και γενικότερα οι νέες τεχνολογίες, δε θα αποτελούν απλώς κάποια καινούργια χαρακτηριστικά αλλά φαίνεται πως θα συνθέτουν μια νέα κοινωνική και οικονομική πραγματικότητα. Οι πιέσεις προς τη μαθηματική εκπαίδευση μεταφράζονται σε σκοπούς όπως, απαίτηση για:

1. Εργαζόμενους με επαρκές μαθηματικό υπόβαθρο.
2. Εργαζόμενους με δεξιότητες Λ.Π., προκειμένου να αντιμετωπίσουν τις συνεχώς μεταβαλλόμενες συνθήκες στο χώρο εργασίας τους.

3. Πολίτες με δυνατότητα κατανόησης και συμμετοχής στα, συνήθως, σύνθετα πολιτικά ζητήματα, δηλαδή πολίτες με γνώση και εμπειρία στη Λύση Προβλημάτων.

Για περισσότερες πληροφορίες ως προς τους κοινωνικούς σκοπούς και τη μαθηματική εκπαίδευση, βλέπε π.χ. NCTM (1989, σελ.1-12).

Από τη δική μας, όμως, σκοπιά, πολύ πιο ενδιαφέροντες είναι οι εσωτερικοί παράγοντες, οι οποίοι και διαδραμάτισαν τον πρωτεύοντα ρόλο στην επιστημονική θεμελίωση του νέου κύματος.

Ως εσωτερικούς παράγοντες προσδιορίζουμε τα συμπεράσματα των ερευνών σε νέες θεωρίες μάθησης, τα οποία οδήγησαν στην ανάπτυξη της Γνωσιακής Επιστήμης.

Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992), μέχρι τις αρχές του αιώνα επικρατούσε η αντίληψη της «νοητικής πειθαρχίας» (mental discipline), η οποία έχει τις ρίζες της στις Πλατωνικές ιδέες, και η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Όσοι είναι ικανοί στα Μαθηματικά είναι, επίσης, ικανοί στους συλλογισμούς». Από την άλλη μεριά και μέσα στο ίδιο Πλατωνικό επιστημολογικό πλαίσιο, τα Μαθηματικά ήταν το κατεξοχήν εργαλείο για την κατανόηση του κόσμου, ο οποίος κατανοείται με συλλογισμούς και με αφηρημένα σύμβολα. Τα σύμβολα είναι το μέσο με το οποίο εργάζεται ο νους και επομένως είναι τα κλειδιά για την αλήθεια. Έχει μεγάλη σημασία λοιπόν για τον άνθρωπο να είναι ικανός στους συλλογισμούς, και όπως το σώμα ασκείται μέσα από την γυμναστική έτσι και ο νους ασκείται μέσα από τα Μαθηματικά.

Στις αρχές του αιώνα ο Thorndike έδειξε ότι στην πραγματικότητα ισχύει ακριβώς το αντίθετο: Όσοι έχουν ανεπτυγμένη ικανότητα αφηρημένων συλλογισμών έχουν την τάση να ακολουθούν μαθηματικές σπουδές. Τα αποτελέσματα των ερευνών του κατέληξαν στη διατύπωση των ακόλουθων νόμων για την μάθηση, και οι οποίοι νόμοι σηματοδοτούν την ανάπτυξη του «Συνειρισμού» (Associationism) ως κυρίαρχης θεωρίας μάθησης:

1. Ο νόμος της ετοιμότητας: Όταν ένας οργανισμός είναι προετοιμασμένος να αντιδράσει σε ένα ερέθισμα, η πραγματοποίηση του ερεθίσματος είναι αιτία ικανοποίησης ενώ η παρεμπόδιση είναι αιτία ενόχλησης.

Σχόλιο: Ο όρος ετοιμότητα κατά τον Thorndike σημαίνει την ανάπτυξη της τάσης για ενέργειες και δράση, ως αποτέλεσμα προηγούμενων προϋποθέσεων π.χ. κατάλληλων στάσεων.

2. Ο νόμος της άσκησης: Οι σύνδεσμοι ανάμεσα σε ένα ερέθισμα (S) και στην αντίστοιχη αντίδραση (R), ενδυναμώνουν ή αδυνατίζουν ανάλογα με τα αισθήματα ικανοποίησης ή ενόχλησης από την πλευρά εκείνου που απαντά στο ερέθισμα.

3. Ο νόμος του αποτελέσματος (ο νόμος της μάθησης): Η εγκατάσταση συνδέσεων ανάμεσα στο ερέθισμα και την αντίδραση (S-R), εξαρτάται όχι μόνο από την χρονική εγγύτητα μέσα στην οποία συμβαίνουν το S και το R, αλλά και από τα αποτελέσματα που ακολουθούν το R.

Για παράδειγμα, αν ένα ερέθισμα ακολουθείται από μία αντίδραση και στη συνέχεια ακολουθεί μια ικανοποιητική κατάσταση, ο σύνδεσμος S-R θα ενισχυθεί, στην αντίθετη περίπτωση ο σύνδεσμος θα αδυνατίσει. Γενικά, η θεωρία του συνειρισμού βασίστηκε στην έννοια των νοητικών δεσμών (mental bonds) ή των αντιστοιχιών μεταξύ ερεθισμάτων και αντιδράσεων π.χ. «δύο και δύο» ως ερέθισμα και «τέσσερα» ως αντίδραση. Ο συνειρισμός είχε μεγάλη επίδραση τόσο στην διδασκαλία όσο και στον σχεδιασμό των αναλυτικών προγραμμάτων, δεδομένου ότι το βασικό θεωρητικό του πλαίσιο ήταν «η εξάσκηση και η πρακτική» (drill and practice), το οποίο αποτέλεσε και την κύρια διδακτική προσέγγιση μέχρι τέλος της δεκαετίας του '50 σε πολλές χώρες.

Ένα από τα πιο σημαντικά μειονεκτήματα του Συνειρισμού ήταν η απουσία κάθε αναφοράς στην έννοια της κατανόησης και γενικότερα στην μικρή σημασία που απέδιδε στις νοητικές

λειτουργίες. Η κατάσταση αυτή παγιώθηκε με τις εργασίες του Skinner οι οποίες εγκατέστησαν το «ρεύμα» του Συμπεριφορισμού (Behaviorism).

Πιο συγκεκριμένα, ο Skinner (1958) ισχυρίστηκε ότι κάθε αναφορά στις γνωστικές λειτουργίες, πιο απλά «κάθε αναφορά σε αυτά που συμβαίνουν μέσα στο κεφάλι του μαθητή» θα ήταν μια μη καλώς διατυπωμένη ερώτηση δεδομένου ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε το τι «συμβαίνει μέσα εκεί». Αντίθετα, η μάθηση μπορούσε να οριστεί αποκλειστικά με όρους παρατηρήσιμης συμπεριφοράς και ακόμα, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του ατόμου με το περιβάλλον. Έτσι, η θεωρία μάθησης του Συμπεριφορισμού εστιάζει την προσοχή της στη διευθέτηση του περιβάλλοντος ώστε να έχουμε τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα.

Τα αποτελέσματα των ερευνών του Skinner και των συνεργατών του τους οδήγησαν στη θέση ότι η μάθηση είναι δυνατή μέσα από την διαμόρφωση της κατάλληλης συμπεριφοράς μέσα σε ένα επίσης κατάλληλο διευθετημένο περιβάλλον, το οποίο ανατροφοδοτεί (reinforce) την σωστή συμπεριφορά. Η συμπεριφορά αναπτύσσεται με σύντομα διαδοχικά και προσεκτικά σχεδιασμένα βήματα τα οποία, τελικά, οδηγούν σε μια παρουσίαση χωρίς λάθη. Είναι φυσικό λοιπόν το γεγονός ότι το ενδιαφέρον των συμπεριφοριστών εστιάστηκε στην ανάπτυξη μιας τεχνολογίας της διδασκαλίας που θα επέτρεπε την οργάνωση της διδακτικής πρακτικής σε προσεκτικές ακολουθίες διαδοχικών, επί μέρους, στόχων, πράγμα που οδήγησε στη λεγόμενη «προγραμματισμένη μάθηση» με κύριο εκπρόσωπο τον Gagne, και όπου το κατάλληλο περιβάλλον είναι το περιβάλλον του computer.

Στην πραγματικότητα, ο Συμπεριφορισμός εμπνευσμένος από τις έρευνες σε πειραματόζωα όπως π.χ. οι έρευνες S-R του Ρανβλον, ισχυρίστηκε ότι η έρευνα στη ψυχολογία θα αποκτούσε «επιστημονική» υπόσταση αν λάμβανε υπόψη μόνον εκείνα τα δεδομένα που μπορούσαν να θεωρηθούν ως «αντικειμενικά». Η αντίληψη αυτή, για την ακρίβεια ο Skinner θεωρούσε τον Συμπεριφορισμό όχι ως αντίληψη ή «ρεύμα» αλλά ως φιλοσοφία που αφορούσε στα θέματα και τις μεθόδους της Ψυχολογίας, βλέπε π.χ. O'Donnell (1985, σελ.Χ της εισαγωγής), στην εκπαιδευτική έρευνα είχε ως αποτέλεσμα την μονομερή επικέντρωση στην ποσοτικοποίηση, τον πειραματισμό και στην ανάλυση των δεδομένων με στατιστικές μεθόδους. Έτσι, υιοθετήθηκαν εμπειρικές μέθοδοι όπως «Διαπραγμάτευση Α» έναντι «Διαπραγμάτευσης Β», παραγοντική ανάλυση και συσχετίσεις με στατιστική σημαντικότητα.

Χωρίς αμφιβολία, οι στατιστικές μέθοδοι μπορούν να αποτελέσουν ένα εξαιρετικά δυναμικό εργαλείο έρευνας, αρκεί η χρήση τους να είναι συμβατή με τις υποθέσεις και με την όλη πραγματοποίηση της έρευνας. Είναι γνωστό ότι ένας σωστός σχεδιασμός απαιτεί:

1. Τις κατάλληλες υποθέσεις οι οποίες μοντελοποιούν την κατάσταση που θέλουμε να μελετήσουμε.
2. Την επιλογή ενός μαθηματικού μοντέλου.
3. Τη μαθηματική επεξεργασία μέσα στο μοντέλο, και
4. Την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Όμως, η στατιστική σημαντικότητα, και επομένως η ερμηνεία των αποτελεσμάτων, δε σημαίνει τίποτα αν οι συνθήκες υπό τις οποίες γίνεται το πείραμα δε συμβιβάζονται με τις υποθέσεις. Για παράδειγμα, αν εξετάζουμε την αποτελεσματικότητα μιας διδασκαλίας με πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου, με διαφορετικούς δασκάλους, τότε είναι πιθανόν ότι οι παρατηρούμενες διαφορές να οφείλονται στις ατομικές διαφορές των δασκάλων και όχι στις διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις.

Κατά τον Schoenfeld (1994), ένα μεγάλο μέρος των ερευνών της δεκαετίας του '70 είχαν τέτοιου είδους μεθοδολογικά σφάλματα. Και παρά το γεγονός ότι έρευνες αυτού του τύπου έδωσαν σημαντικά αποτελέσματα, για παράδειγμα συσχετίσεις της απόδοσης των μαθητών με π.χ. το κοινωνικοοικονομικό status της οικογένειας, γενικά η σημασία των ερευνών αυτών

άρχισε να υποχωρεί, δεδομένου ότι είχαν ήδη διατυπωθεί νέα ερωτήματα που απαιτούσαν και αντίστοιχες, νέες, ερευνητικές μεθοδολογίες.

## **2.2. Η Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης (Constructivism) και η Λύση Προβλήματος.**

Στην δεκαετία του '70 διατυπώθηκαν τα ερωτήματα που έστρεψαν το ενδιαφέρον των ερευνητών και πάλι στις νοητικές λειτουργίες και που διαμόρφωσαν τις σημερινές κατευθύνσεις της έρευνας.

Πιο συγκεκριμένα, στην δεκαετία αυτή από διάφορα πεδία ερευνών ανεξάρτητα μεταξύ τους όπως Τεχνητή Νοημοσύνη (AI), Νευροφυσιολογία του εγκεφάλου, Προγραμματισμός ηλεκτρονικών υπολογιστών, Εκπαιδευτική Έρευνα, έβαζαν ερωτήματα που απαιτούσαν ένα, έστω, στοιχειώδες μοντέλο λειτουργίας της ανθρώπινης σκέψης και μνήμης. Η πιο συστηματική διερεύνηση φαίνεται να προέκυψε από την AI.

Στην AI οι ερευνητές παρατηρούσαν άτομα που είχαν εμπλακεί σε δραστηριότητες Λ.Π. Οι παρατηρήσεις μετασχηματίζονταν σε στρατηγικές που οι ερευνητές υπέθεταν ότι ακολουθούσε το άτομο στην προσπάθειά του να λύσει ένα πρόβλημα, στην συνέχεια οι στρατηγικές κωδικοποιούνταν σε προγράμματα υπολογιστών και να λοιπόν: τα προγράμματα αυτά λειτουργούσαν, δηλαδή έλυναν προβλήματα και μάλιστα, σε μερικές περιπτώσεις, σύνθετα προβλήματα.

Οι έρευνες στην AI ανέτρεψαν τις θέσεις των Συμπεριφοριστών. Πράγματι, πολλά προγράμματα υπολογιστών είχαν επιτυχία ακριβώς επειδή ακολουθούσαν γνωστικές στρατηγικές που είχαν διαμορφωθεί από υποθέσεις πάνω στην ανθρώπινη νόηση. Οι στρατηγικές αυτές και γενικότερα οι νοητικές δομές επομένως, είχαν σοβαρή σημασία για την έρευνα, άρα οι γνωστικές λειτουργίες δεν είναι πια μια μη επιστημονική περιοχή αλλά ένα σοβαρό ερευνητικό πεδίο. Και αυτό γιατί μπορούσαν, πλέον, να διατυπωθούν υποθέσεις και οι υποθέσεις αυτές με τη σειρά τους ήταν δυνατόν να ελεγχθούν πειραματικά.

Το ενδιαφέρον για τις γνωστικές λειτουργίες και τη Μάθηση προέκυψε και από την εκπαιδευτική έρευνα, για δικούς της όμως λόγους. Ειδικά για την έρευν στην μαθηματική εκπαίδευση, διατυπώθηκαν δύο ερωτήματα:

Πρώτον, γιατί οι μαθητές κάνουν λάθη; Γιατί ορισμένοι τύποι λαθών επαναλαμβάνονται σταθερά σε κάθε νέα γενιά μαθητών;

Δεύτερον, ποιες είναι οι γνωστικές λειτουργίες που διακρίνουν τον ικανό από τον μη ικανό στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων;

Συμπληρωματικά με τα ερωτήματα αυτά, νέα ερωτήματα διατυπώθηκαν από το "πείραμα" του Stanley Erlwanger, το οποίο έκανε φανερές τις συνέπειες μιας διδασκαλίας που αποτυγχάνει να λάβει υπόψη της το γεγονός ότι οι μαθητές συμμετέχουν ενεργητικά στην κατασκευή της γνώσης τους και δεν την «απορροφούν», με αποτέλεσμα να μην συνειδητοποιούν τις ενδεχόμενες αντιφάσεις τους. Για το πείραμα του Erlwanger βλέπε π.χ. Brousseau et all (1986, σελ. 210), Steffe and Kieren (1994, σελ.717).

Παρουσιάζεται λοιπόν μια στροφή και προς αντίστοιχα επιστημολογικά ερωτήματα όπως, «τι σημαίνει γνωρίζω;», «τι σημαίνει μαθαίνω Μαθηματικά;», «τι σημαίνει διδάσκω Μαθηματικά;».

Είναι φανερό πως η απάντηση στα ερωτήματα αυτά δεν μπορούσε να προκύψει από τον τύπο των ερευνών που μέχρι τότε ήταν κυρίαρχος, αλλά έπρεπε να στραφεί το ενδιαφέρον προς τις γνωστικές λειτουργίες. Το γεγονός αυτό ανάγκασε τους ερευνητές να δουν κάτω από νέο πρίσμα τις εργασίες του Piaget ο οποίος από τις δεκαετίες του '20 και '30 δούλεψε πάνω σε θέματα της Γνωσιακής Ψυχολογίας.

Ένας από τους στόχους του Piaget ήταν η μελέτη της ανάπτυξης και εξέλιξης των εννοιών, των λογικών ενεργειών και πράξεων και της συμβολικής σκέψης στον νου του παιδιού. Οι



εργασίες του Piaget, οδήγησαν στην ανάπτυξη τόσο της Γενετικής Επιστημολογίας (Genetic epistemology) όσο και της Εξελικτικής Ψυχολογίας (Cognitive development Psychology). Στην Γενετική Επιστημολογία, μέσα από μια σύνθεση της φιλοσοφίας της Επιστήμης και της Ψυχολογίας εγκατέστησε σχέσεις μεταξύ των δύο αυτών περιοχών δείχνοντας ότι υπάρχει μια παράλληλη πορεία ανάμεσα στην εξέλιξη των επιστημών και στην εξέλιξη της σκέψης. Και στις δύο περιπτώσεις η εξέλιξη έχει τις απαρχές της σε πρακτικές καταστάσεις, προχωρεί στην ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής και καταλήγει στην αξιωματικοποίηση. Στην Γνωσιακή Ψυχολογία ο Piaget διατύπωσε τη γνωστή θεωρία των σταδίων της νοητικής ανάπτυξης, δηλαδή:

Το αισθησιοκινητικό στάδιο (sensori – motor), 0-2 χρόνια.

Το προσυλλογιστικό στάδιο ή περίοδος της προδιεργασικής αναπαράστασης (pre-operational), 2-7 χρόνια.

Το στάδιο των συγκεκριμένων διεργασιών (concrete-operational), 7-13 χρόνια, και

Το στάδιο των τυπικών διεργασιών (formal operational), από τα 13 χρόνια και πέρα.

Παρά το προφανές γεγονός της έντονης αλληλοσύνδεσης ανάμεσα στην Γενετική Επιστημολογία και Ψυχολογία, κατά τον Metraux (1986) οι ψυχολόγοι που επηρεάστηκαν από τον Piaget κάπου έχασαν το «νήμα» της σύνδεσης περιορίζοντας τον ορίζοντά τους στα στάδια της νοητικής ανάπτυξης καθουτά, με αποτέλεσμα να παραμένει υπό διερεύνηση το ζήτημα της μετάβασης από το ένα στάδιο στο άλλο.

Με ποιον τρόπο ο Piaget επεχείρησε να διερευνήσει το θέμα του; Κατά τον Lorenz (1988), η ερευνητική μεθοδολογία του Piaget συνίσταται από τις ακόλουθες αρχές:

1. Ο σκοπός είναι να εξετάσει το παιδί ως αυτόνομο υποκείμενο και όχι ως ένα «μικρό ενήλικα» με έλλειψη γνώσεων. Να δει δηλαδή το παιδί ως υποκείμενο που παράγει γνώση και να εξετάσει το είδος αυτής της γνώσης «από μέσα».

2. Αφετηρία των ερευνών είναι η παρατήρηση και η εξέταση των παρανοήσεων ή «παθολογιών» που παρουσιάζει το παιδί όταν λύνει συγκεκριμένα προβλήματα.

3. Συσσώρευση των παρατηρήσεων μέσα από μελέτες περίπτωσης (case studies), με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις «παθολογίες» της σκέψης.

4. Η συσσώρευση των παρατηρήσεων οδηγεί στην κατανόηση της φυσιολογικής, μή παθολογικής, κατάστασης της σκέψης και στην ανάπτυξη μιας αντίστοιχης θεωρίας της γνωστικής εξέλιξης. Αυτό επιτυγχάνεται με την αντιπαράθεση των αποτελεσμάτων των «παθολογικών» καταστάσεων με τα συνεπή «φυσιολογικά» μοντέλα των γνωστικών διεργασιών, δηλαδή με τη δομή των διαδικασιών της σκέψης του παιδιού.

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία αυτή, παρατηρώντας τις λανθασμένες προσπάθειες των μαθητών στην λύση προβλημάτων, είμαστε ικανοί να διατυπώσουμε υποθέσεις για το πώς θα είναι η μη λανθασμένη συμπεριφορά. Ορίζοντας τώρα, την παθολογική συμπεριφορά ως ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή ως ερώτημα που μπορεί να απαντηθεί, είμαστε ικανοί να κατανοήσουμε τις διαδικασίες της σκέψης.

Ας δούμε ένα «μεταφορικό» παράδειγμα (metaphor). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μάθουμε με ποιον τρόπο λειτουργεί η μηχανή του αυτοκινήτου. Δεν έχουμε στη διάθεσή μας κάποια θεωρία ή άλλο βοηθητικό μέσο. Προφανώς, οδηγώντας το αυτοκίνητο πολύ λίγα πράγματα θα μάθουμε για την λειτουργία της μηχανής. Αν όμως προκαλέσουμε μια «παθολογική» κατάσταση στη μηχανή, αν δηλαδή π.χ. αποσυνδέσουμε ένα καλώδιο, τότε μπορούμε να κατανοήσουμε το ρόλο του στην λειτουργία της μηχανής. Η συσσώρευση παρόμοιων παρατηρήσεων για διάφορα μέρη της μηχανής θα μας δώσει πληροφορίες όχι μόνο για τον ρόλο τους αλλά και για τη λειτουργία της μηχανής συνολικά.

Σύμφωνα με τους Steffe and Kieren (1994), οι έρευνες στην Διδακτική των Μαθηματικών, επηρεασμένες από τη θεωρία του Piaget, πέρασαν από διάφορα στάδια προκειμένου να φθάσουν στην σημερινή τους μορφή. Έτσι, μέχρι περίπου τα μέσα της δεκαετίας του '70, ο

βασικός στόχος ήταν να δείξουν ότι οι μαθηματικές δομές θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως μοντέλα περιγραφής των μαθηματικών γνώσεων του μαθητή, όπως οι γενετικές δομές ήταν τα αντίστοιχα μοντέλα της νοητικής ανάπτυξης.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Σύμφωνα με τον Piaget, ένας μαθητής στο στάδιο των συγκεκριμένων διεργασιών έχει κατακτήσει την έννοια της πολλαπλασιαστικής δομής. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να ενεργεί με τα συστήματα συμβόλων της γλώσσας, μπορεί να ταξινομήσει λέξεις εννοιολογικά ώστε να σχηματίσει κλάσεις που να περιέχονται σε άλλες κλάσεις και γενικότερα, μπορεί να αντιμετωπίσει με επιτυχία έργα όπως ταξινομήσεις, να διακρίνει λανθασμένες ταξινομήσεις, προβλήματα που περιέχουν πολλαπλές δυνατότητες επιλογών κ.λ.π.

Στο επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιεί τους αριθμούς με μαθηματικό τρόπο, δηλαδή ως πληθικούς αριθμούς διαφόρων συνόλων. Και διατυπώνεται το ερώτημα: Ποια Μαθηματικά εκφράζουν τις γνώσεις του στο στάδιο αυτό; Ο Piaget φαίνεται να υποστηρίζει ότι στο πρώιμο στάδιο των συγκεκριμένων διεργασιών (early concrete) ο πολλαπλασιασμός γίνεται κατανοητός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ενώ μόνο στο ύστερο στάδιο (late concrete) γίνεται αντιληπτός ως ιδιαίτερη πράξη. Για παράδειγμα, ας δούμε τα ακόλουθα δύο προβλήματα:

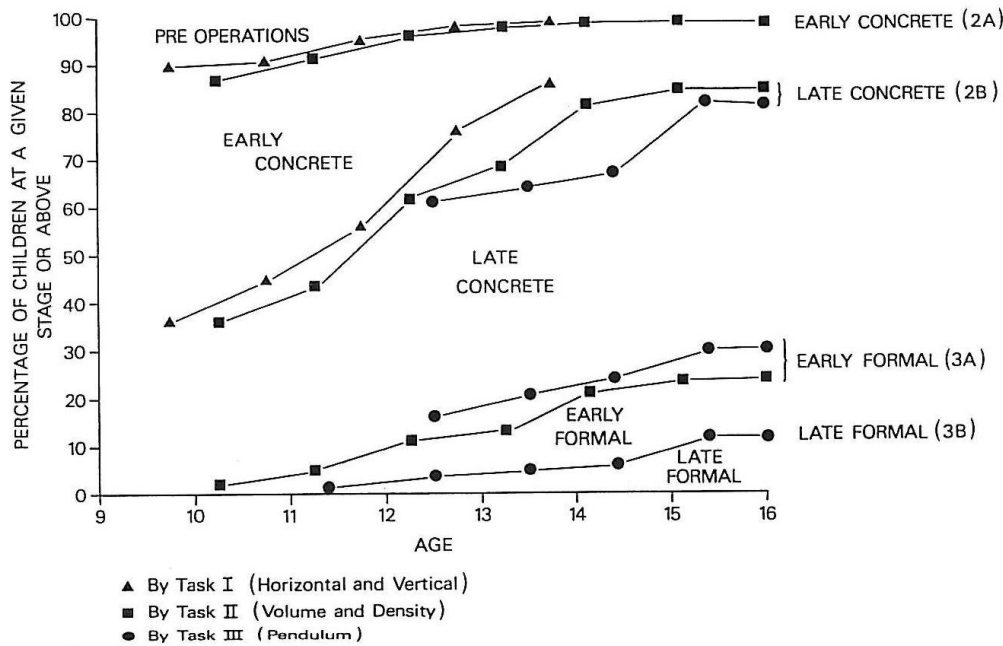
1. Ένα δοχείο χωράει 8 λίτρα νερό και χρειαζόμαστε 4 τέτοια δοχεία για να γεμίσουμε ένα βαρέλι. Πόσα λίτρα νερό χωράει το βαρέλι;

2. Ένα εστιατόριο προσφέρει σάντουιτς με τρία διαφορετικά είδη ψωμιού και με έξι παραλλαγές ως προς το περιεχόμενο, στο κάθε είδος. Πόσα διαφορετικά είδη σάντουιτς προσφέρει το εστιατόριο;

Ένας μαθητής λοιπόν που αναγνωρίζει ως πρόβλημα πολλαπλασιασμού μόνον το πρώτο, λέμε ότι οι γνώσεις του περιγράφονται από τη δομή της πρόσθεσης, ενώ όταν αναγνωρίζει και το δεύτερο τότε οι γνώσεις του περιγράφονται από την πολλαπλασιαστική δομή ή από τη δομή του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων.

Όμως, η αντίληψη αυτή οδήγησε σε ακρότητες. Πράγματι, μια ματιά στις βασικές αρχές π.χ. του Stanford University: Sets and Numbers Project, είναι διαφωτιστική. Η έννοια του συνόλου και πράξεις σε σύνολα, η ακριβής γλώσσα, οι νόμοι της μαθηματικής λογικής, η σχέση ανάμεσα στην συνολοθεωρία και την θεμελίωση της αριθμητικής, αλγεβρικές και γεωμετρικές αρχές κ.λ.π., Sherman (1972, σελ.16-17).

Σύμφωνα με την Brown (1979), είναι πολύ απλουστευτικό να χρησιμοποιούμε τα στάδια του Piaget για να καθορίσουμε τις αντίστοιχες μαθηματικές δραστηριότητες, δεδομένου ότι αφενός δεν έχει αποδειχθεί ότι η ανάπτυξη ακολουθεί στάδια αντί π.χ. ένα συνεχές φάσμα, ενώ, επίσης, το περιεχόμενο του κάθε σταδίου εξακολουθεί να αποτελεί πεδίο αντιπαράθεσης. Τέλος, σύμφωνα με το ακόλουθο διάγραμμα που παραθέτει η Brown, και που έγινε μετά από έρευνες σε 10000 μαθητές στην Αγγλία, φαίνεται πως το «πέραςμα» στο ύστερο στάδιο των τυπικών διεργασιών γίνεται για πολλούς μαθητές σε ηλικία πολύ μεγαλύτερη από αυτή που προβλέπει η θεωρία. Για παράδειγμα, μόνο ένα 10-15% των μαθητών στην ηλικία των 12 ετών μπορεί να ταξινομηθεί στο πρώιμο στάδιο των τυπικών διεργασιών, και ακόμα φαίνεται πως η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών στο γυμνάσιο βρίσκεται στο στάδιο των συγκεκριμένων διεργασιών, εκτός ίσως από μια μικρή μειοψηφία.



Σταδιακά άρχισε να γίνεται κατανοητό το γεγονός ότι οι γενετικές δομές του Piaget ήταν μοντέλα ερμηνείας της συμπεριφοράς του παιδιού και όχι ένα υποθετικό - παραγωγικό σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι οι ερευνητές έπρεπε να κατασκευάσουν τα δικά τους μοντέλα προκειμένου να εξυπηρετήσουν τους σκοπούς τους και όχι να χρησιμοποιούν τις παρατηρήσεις του Piaget, και αυτό σηματοδοτεί τη μεγάλη καμπή. Η καμπή αυτή, με τη σειρά της, οδήγησε σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης (Constructivism), όπου οι ερευνητές παρατηρούν και περιγράφουν τους μηχανισμούς με τους οποίους ο μαθητής οικοδομεί τις μαθηματικές του γνώσεις, μέσα σε ένα συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον.

Τυπικά, η αρχή του Κονστρουκτιβισμού τοποθετείται το 1975 όπου ο Von Glaserfeld παρουσίασε τις ιδέες του στην Εταιρεία Jan Piaget της Philadelphia των Η.Π.Α. Οι ιδέες του Glaserfeld (1987), στηριγμένες στη Γενετική Επιστημολογία του Piaget οδήγησαν στον «Ριζοσπαστικό Κονστρουκτιβισμό» (Radical Constructivism), και τελικά άνοιξαν τον δρόμο για μια νέα εποχή στην μαθηματική εκπαίδευση.

Παρά το γεγονός της ευρείας δημοσιότητας των ιδεών του Von Glaserfeld, μόλις το 1983 παρουσιάστηκε άρθρο με τον όρο «constructivism» στον τίτλο του, βλέπε Cobb and Steffe (1983). Στο άρθρο αυτό τονίζεται ότι δεν είναι οι επεμβάσεις των ενηλίκων καθαυτές που επηρεάζουν την κατασκευή της γνώσης του μαθητή, αλλά οι εμπειρίες του μαθητή από αυτές τις επεμβάσεις, έτσι όπως αυτός τις ερμηνεύει βασιζόμενος στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις του. Ο ενήλικας δεν μπορεί να προκαλέσει στο παιδί εμπειρίες διαμέσου των δικών του εμπειριών. Επομένως, σύμφωνα π.χ. με τους Varela et al (1991), ο δάσκαλος δίνει τις ευκαιρίες στον μαθητή για μαθηματικές δραστηριότητες, αλλά εξαρτάται από τον ίδιο τον μαθητή να οικοδομήσει τη δική του γνώση μέσα από αυτές τις δραστηριότητες.

Γενικά, ο Ριζοσπαστικός Κονστρουκτιβισμός προσδιορίζεται από τις ακόλουθες δύο υποθέσεις, βλέπε π.χ. Lerman (1989).

1. Η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο και δεν «συλλαμβάνεται» παθητικά από το περιβάλλον.

2. Η γνώση είναι μια διαδικασία προσαρμογής με τον κόσμο των εμπειριών και όχι η ανακάλυψη ενός προϋπάρχοντος κόσμου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από το γνώστη.

Η δεύτερη υπόθεση, η οποία μπορεί να προκαλέσει και αντιπαραθέσεις, έχει διατυπωθεί από τον Von Glaserfeld ως εξής: «Η πραγματικότητα με μια απόλυτη έννοια βρίσκεται έξω από τη σφαίρα της πειραματικής επαλήθευσης».

Η αποδοχή των δύο υποθέσεων, δηλαδή η αποδοχή του Ριζοσπαστικού Κονστρουκτιβισμού, έχει σοβαρές συνέπειες για την μαθηματική εκπαίδευση. Για παράδειγμα, η έννοια της κατανόησης μιας μαθηματικής ιδέας χάνει τον απόλυτο χαρακτήρα της και αποκτά μια εξατομικευμένη μορφή η οποία πρέπει να γίνει αντικείμενο διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη. Το νόημα της έννοιας, λοιπόν, προσδιορίζεται από την χρήση της στα πλαίσια της μαθητικής κοινότητας η οποία δρα στη συγκεκριμένη στιγμή ως μια «επιστημονική» κοινότητα, δηλαδή σε κάθε περίπτωση η έννοια έχει ένα νόημα «κοινωνικά» προσδιορισμένο που, με τη σειρά, του βασίζεται στα standards της ευρύτερης Μαθηματικής Κοινότητας. Η αντίληψη αυτή επιδρά τόσο στον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να γίνονται οι δραστηριότητες μέσα στην τάξη όσο και στον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τη θέση και το ρόλο του δασκάλου μέσα στην τάξη.

Η αποδοχή του Κονστρουκτιβισμού είχε επίσης σοβαρή επίδραση στην έρευνα. Ο βασικός σκοπός είναι να μελετήσουμε την κατασκευή των μαθηματικών εννοιών και πράξεων με τις οποίες ο μαθητής προσπαθεί να οργανώσει τις εμπειρίες του. Στο έργο αυτό κυριαρχεί η γενετική επιστημολογία του Piaget και ιδιαίτερα ο όρος «αναστοχαστική αφαιρετική διαδικασία» (reflective abstraction). Σύμφωνα με την reflective abstraction, η μάθηση είναι δυνατή επειδή είμαστε ικανοί να ανακαλύπτουμε κοινές ιδιότητες σε διαφορετικού είδους εμπειρίες, τις οποίες «αποθηκεύουμε» στη μνήμη για μελλοντική χρήση. Η νοητική αναπαράσταση μιας κοινής ιδιότητας είναι αυτό που ονομάζουμε έννοια. Οποτεδήποτε βλέπουμε ή ακούμε κάτι στο περιβάλλον, ανακαλούμε από τη μνήμη μας μια έννοια που θεωρούμε σχετική. Παριστάνοντας τις έννοιες με σύμβολα μπορούμε να τις ανακαλέσουμε κάθε στιγμή χωρίς την ανάγκη εξωτερικού ερεθίσματος. Στην περίπτωση αυτή η έννοια έχει γίνει ένα «νοητικό αντικείμενο» (mental object), το οποίο διαπραγματευόμαστε με διάφορους τρόπους. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ομαδοποιήσουμε έννοιες από μια κοινή τους ιδιότητα, σχηματίζοντας έννοιες ανωτέρας τάξεως. Οι διαδοχικές αφαιρετικές διαδικασίες που απαιτούνται για τη δημιουργία εννοιών ανωτέρας τάξεως, προσδιορίζουν το νόημα του όρου reflective abstraction.

Η Κονστρουκτιβιστική έρευνα, όπως επισημάναμε, αναζητά τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές οικοδομούν τις μαθηματικές τους γνώσεις, μέσα σε ένα περιβάλλον που επιτρέπει αυτού του είδους τις κατασκευές. Επομένως, το έργο του ερευνητή συνίσταται στην εννοιολογική ανάλυση (conceptual analysis) και στην ανάπτυξη μοντέλων 2ας τάξεως, δηλαδή μοντέλων που περιγράφουν και ερμηνεύουν τις γνώσεις και τις ενέργειες του μαθητή σε μια συγκεκριμένη στιγμή και σε ένα συγκεκριμένο έργο.

Η Κονστρουκτιβιστική έρευνα επηρέασε τόσο την διδακτική πρακτική όσο και τον προσανατολισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης. Όπως έχουμε επισημάνει, ένας από τους παράγοντες της ανάπτυξης της Λύσης Προβλήματος ήταν ακριβώς τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών. Στο επίπεδο της διδακτικής πρακτικής ο Κονστρουκτιβισμός προσανατολίζει τη διδασκαλία σε εργασίες με μικρές ομάδες μαθητών, σε διάφορες δραστηριότητες μέσα στην τάξη και βοηθά το δάσκαλο των μαθηματικών να παρατηρεί και να ερμηνεύει τις προσπάθειες των μαθητών του.