



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Γενική Φυσική

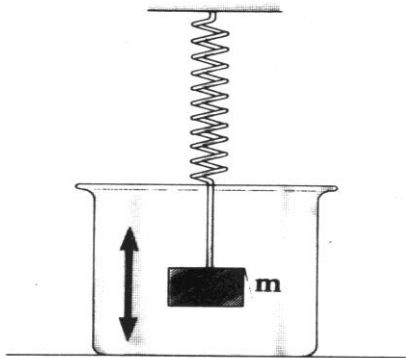
Ενότητα 8: Ταλαντώσεις

Γεώργιος Βούλγαρης  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Μαθηματικών

# Ταλάντωση με απόσβεση

Η δύναμη τριβής δίνεται από τη σχέση :  $-ku$ .

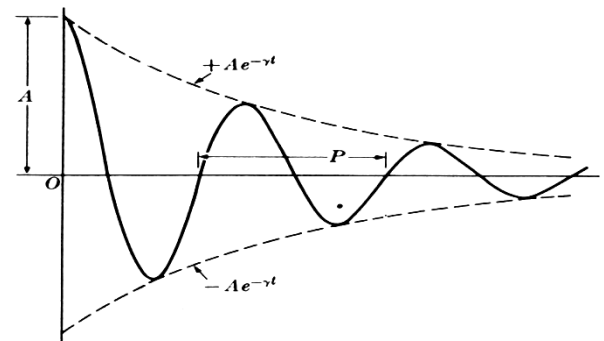
$$\Sigma F_x = -kx - bu = ma_x$$



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$\begin{aligned} -kx - b \frac{dx}{dt} &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x &= 0 \\ \Rightarrow x &= Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \delta) \end{aligned}$$



# Λύση της Διαφορικής (1 από 2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

*Δοκιμάζω Λύση της μορφής :*

$$x = ce^{zt}$$

$$cz^2 e^{zt} + \frac{b}{m} cze^{zt} + \frac{k}{m} e^{zt} = 0$$

*Πρέπει να ισχύει  $\forall t$*

$$\Rightarrow z^2 + \frac{b}{m} z + \frac{k}{m} = 0$$

$$z = \frac{b/m \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

$$z = \frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$



# Λύση της Διαφορικής (2 από 2)

$$Av \left( \frac{b}{2m} \right)^2 > \frac{k}{m} \rightarrow \text{Απόσβεση}$$

$$Av \left( \frac{b}{2m} \right)^2 < \frac{k}{m} \rightarrow \text{Ταλάντωση}$$



# Από Μιγαδικές Συναρτήσεις (1 από 2)

$$\text{αν: } z = x + iy \rightarrow z = re^{i\theta}$$

$$\dot{\eta} : z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\dot{\omega}\text{που: } r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan^{-1}\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = -\frac{b}{2m} + i\sqrt{\left[\frac{b}{2m}\right]^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\left[\frac{b}{2m}\right]^2 - \frac{k}{m}}$$



# Από Μιγαδικές Συναρτήσεις (1 από 2)

*Και η Λύση θα είναι :*

$$x = Ae^z = Ae^{-\frac{b}{2m}t} e^{i\omega t}$$

*ή :*

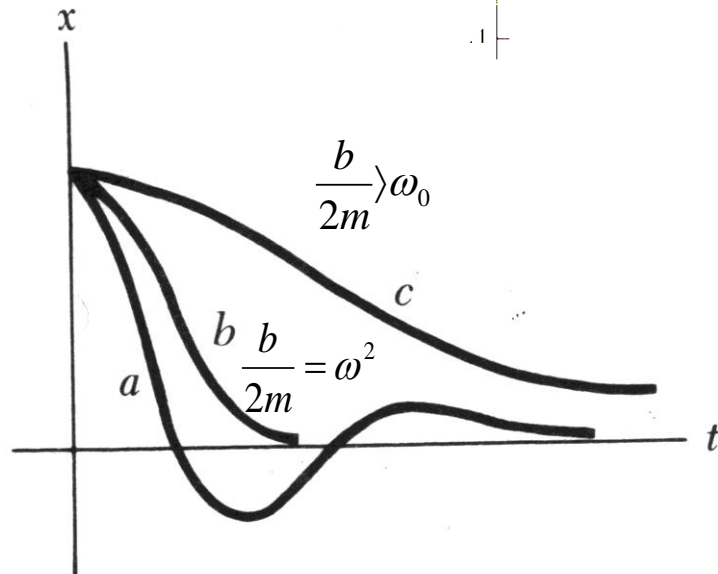
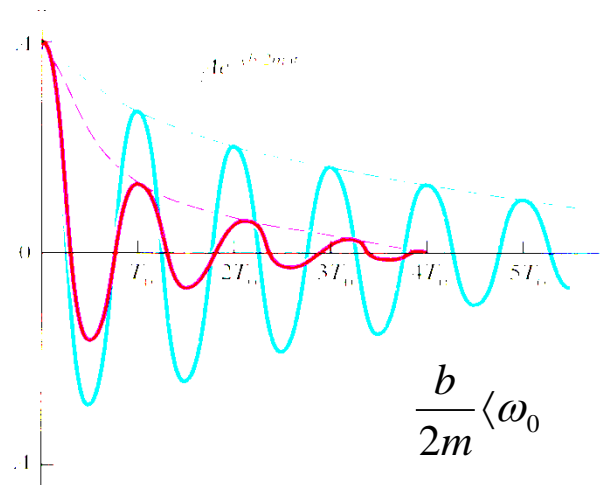
$$x = e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t)$$

*η Ειδική Λύση :*

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi)$$



# Ταλάντωση για διαφορετικές τιμές του $b$



Αυξάνοντας τον συντελεστή απόσβεσης:

(α) Η κίνηση παρουσιάζει ακόμη περιοδικότητα

(β) Η κρίσιμη απόσβεση. Ο χρόνος για την επιστροφή στη θέση ισορροπίας γίνεται ελάχιστος.

(γ) Η κίνηση γίνεται απεριοδική.

# Ταλάντωση με εξωτερική διέγερση, συντονισμός (1 από 2)

$$F_0 \cos(\omega t) - kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow x = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$



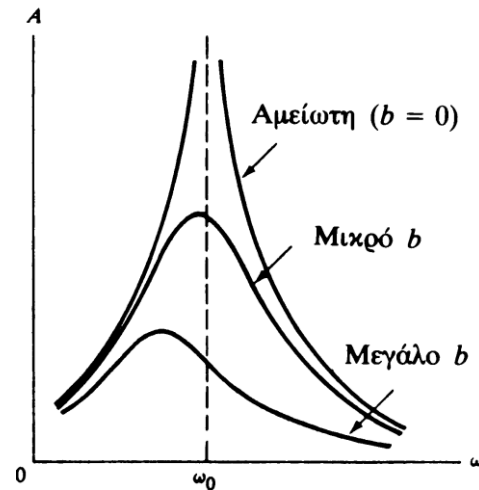


# Ταλάντωση με εξωτερική διέγερση, συντονισμός (2 από 2)

## Συντονισμός πλάτους

Το πλάτος γίνεται μέγιστο για:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{m} \right)^2}$$



Μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης με την συχνότητα της οδηγήτριας δύναμης, για μικρό και μεγάλο  $b$ .

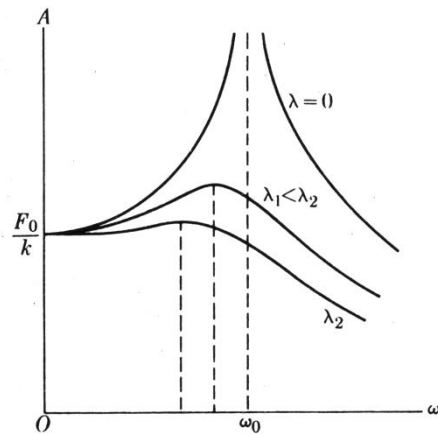
# Συντονισμός Ενέργειας (1 από 2)

$$F_0 \cos(\omega t)$$
$$v_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \omega \sin(\omega t + \phi)$$

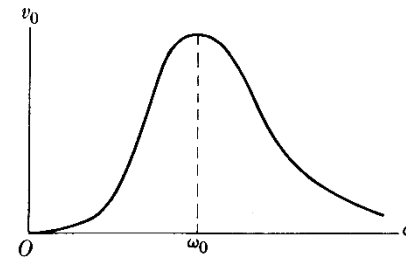
Η ταχύτητα και συνεπώς η κινητική ενέργεια του σώματος, μεγιστοποιείται για την συχνότητα  $\omega = \omega_0$  δηλαδή την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Στην ίδια συχνότητα η ταχύτητα έχει την ίδια Φάση με την δύναμη. Η ισχύς  $Fv$  που αποδίδεται στο σύστημα γίνεται μέγιστη.



# Συντονισμός Ενέργειας (2 από 2)

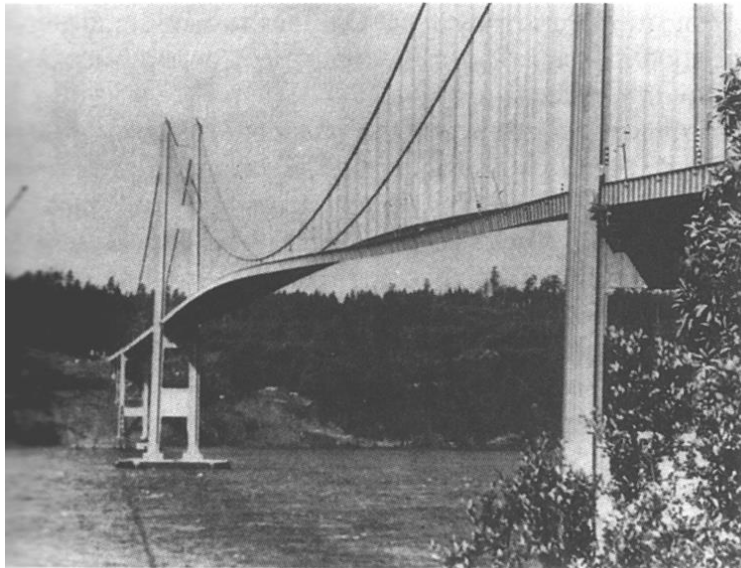


Σχήμα 12-32. Μεταβολή του πλάτους των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων με την απόσβεση (στο σχήμα,  $\lambda_2$  είναι μεγαλύτερο από το  $\lambda_1$ ).

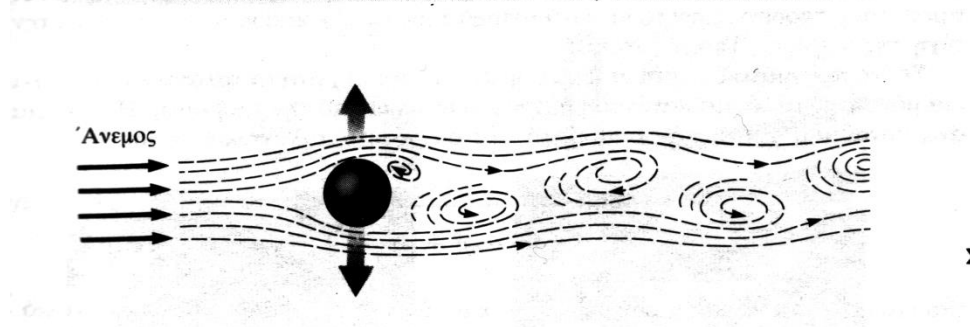
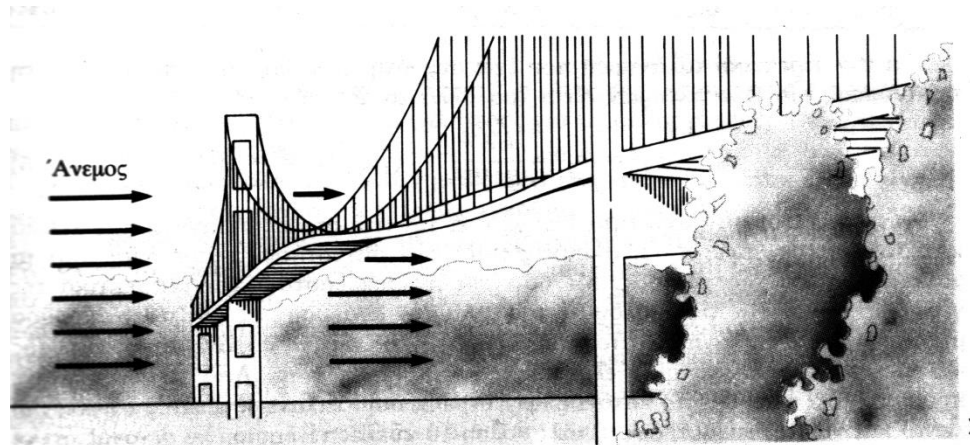


Σχήμα 12-33. Μεταβολή του πλάτους της ταχύτητας εξαναγκασμένων ταλαντώσεων με τη συχνότητα της εφαρμοζόμενης δύναμης.

# Η γέφυρα στο Tacoma Narrows (1 από 2)



# Η γέφυρα στο Tacoma Narrows (2 από 2)



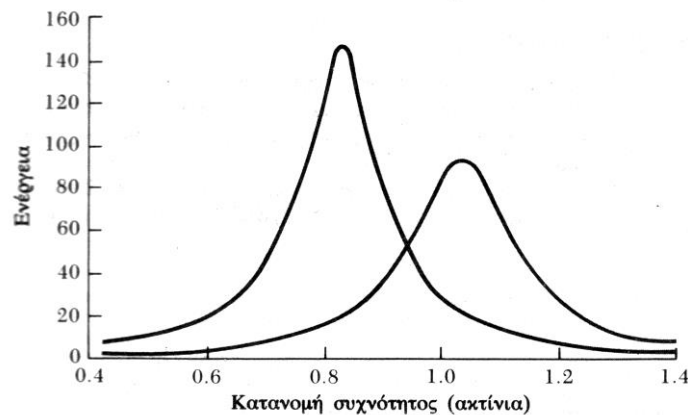
Η συχνότητα απόσπασης των  
στροβίλων είναι :  $v = u / 5,5 * d$

# Ερμηνεία

Ο άνεμος δημιουργούσε στροβίλους, οι οποίοι ασκούσαν στροφικές ροπές στο κατάστρωμα της γέφυρας.

Η ενέργεια από τις στροφικές ταλαντώσεις μεταφέρονταν στις κατακόρυφες ταλαντώσεις

Προκύπτει ότι η κατακόρυφη ταλάντωση είχε συχνότητα **8 /min** και η οριζόντια **10 /min**.



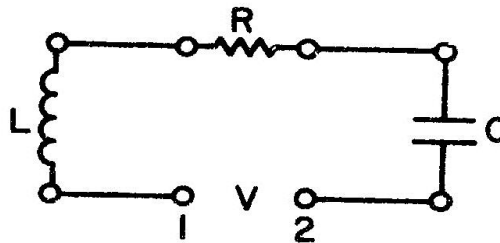
Σχήμα 4 Τυπικές τιμές του  $\Delta\omega$ .

# Φαινόμενα Συντονισμού

Κύκλωμα R L C.

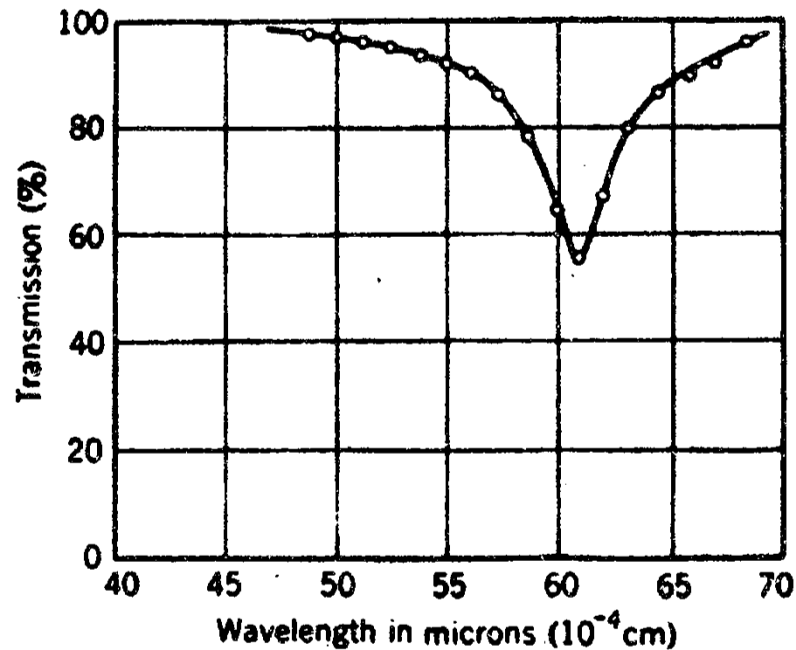
Η ποσότητα που μεταβάλλεται αρμονικά είναι το φορτίο.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q = V$$



# Απορρόφηση φωτός

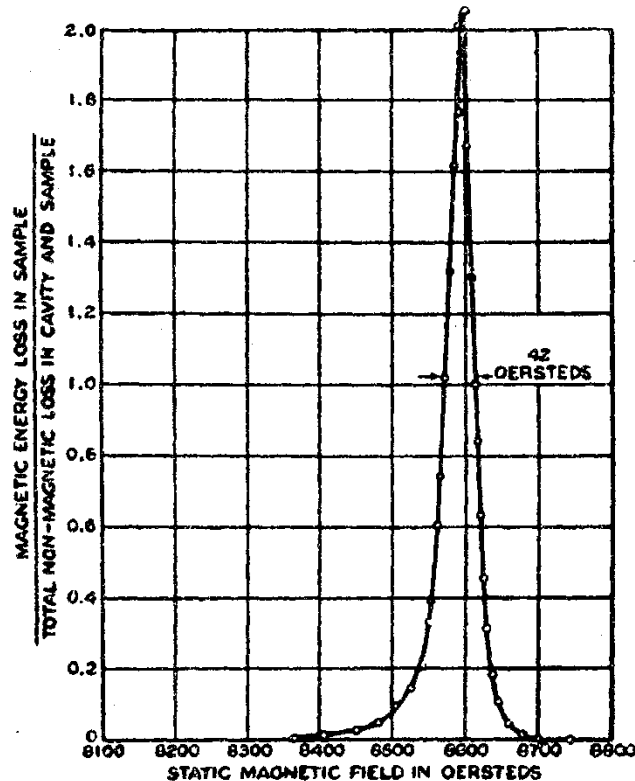
- Το φορτίο στο μόριο του NaCl ταλαντώνεται από το Ηλεκτρικό Πεδίο του Η. Μ. κύμματος





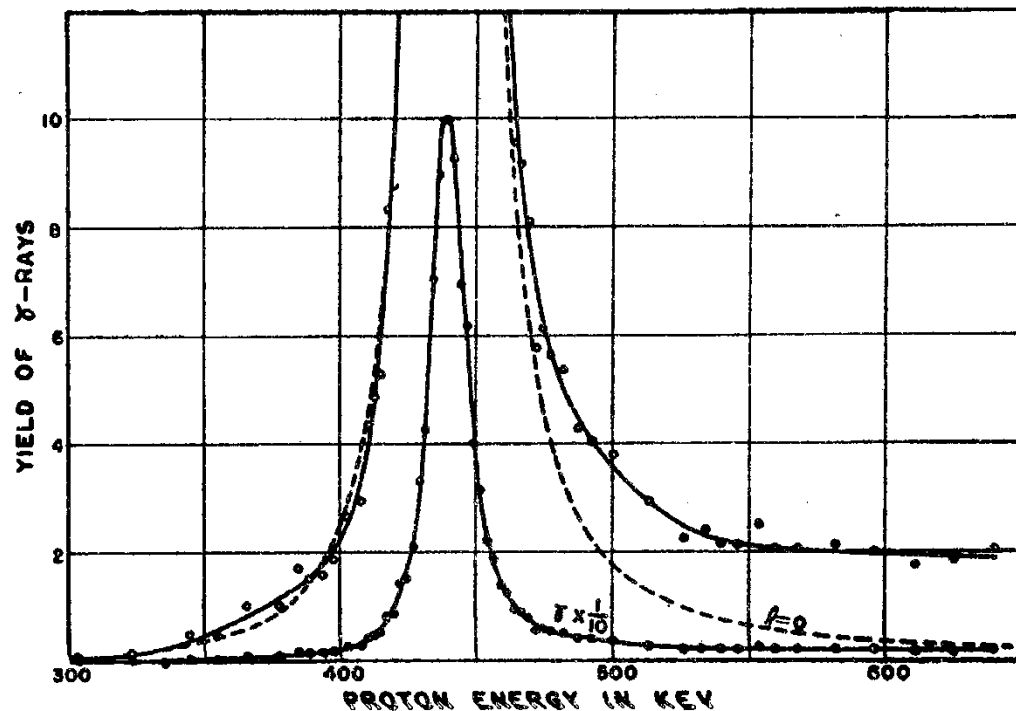
# Μαγνητικός Συντονισμός

- Το διάνυσμα της Μαγνητικής ροπής του μορίου κάνει μια μεταπτωτική κίνηση με συχνότητα  $\omega_0$



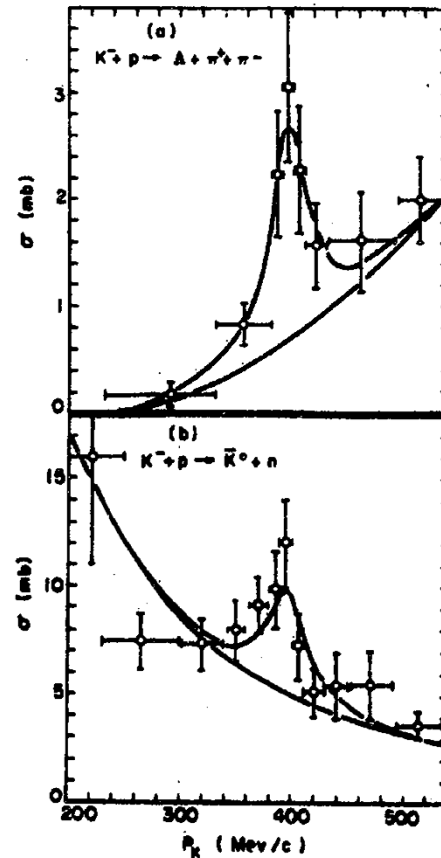
# Φαινόμενο Mossbauer

- Ο πυρήνας του ατόμου είναι ένα σύστημα που ταλαντώνεται η εκπομπή ακτίνων  $\gamma$  μεγιστοποιείται όταν το πρωτόνιο έχει μία συγκεκριμένη ενέργεια.



# Παραγωγή σωματιδίων

- Η παραγωγή ενός νέου σωματιδίου μεγιστοποιείται όταν η ενέργεια που δίνεται στον στόχο γίνει ίση μια συγκεκριμένη τιμή



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Γεώργιος Βούλγαρης 2015. Γεώργιος Βούλγαρης. «Γενική Φυσική. Ενότητα 8: Ταλαντώσεις». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH115/>





# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση σχημάτων από το ακόλουθο έργο:

SERWAY, PHYSICS For Scientists & Engineers, τόμος I ΜΗΧΑΝΙΚΗ, Saunders College Publishing

