ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Γενική Φυσική

Ενότητα 5: Έργο, ενέργεια

Γεώργιος Βούλγαρης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Έργο - Ενέργεια

- **Βασική έννοια.**

  Μηχανική, Ηλεκτρομαγνητική, Χημική, Θερμική, Πυρηνική, κ.α.

  Δυνατότητα μετατροπής της μίας μορφής σε άλλη.

- **Μηχανική ενέργεια.**

  Λύση προβλημάτων μηχανικής.

  α) 2ος νόμος Νεύτωνα, δυναμική εξίσωση.

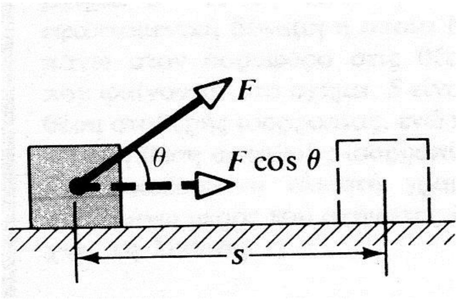
  Χρονική εξέλιξη του συστήματος (θέση σαν συνάρτηση του χρόνου).

  β) εξίσωση έργου ενέργειας όταν ενδιαφέρει η αρχική και η τελική κατάσταση του σώματος (ταχύτητα).

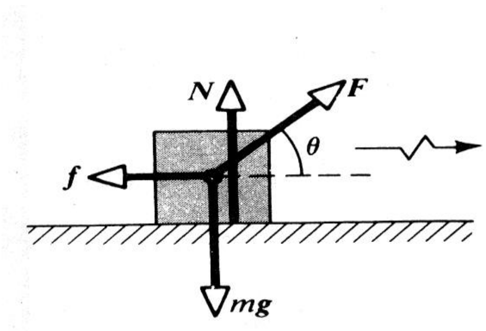
  Συνήθως πιο εύχρηστη π.χ. όταν η δύναμη δεν είναι σταθερή, ή όταν το σύστημα είναι πολύπλοκο.

Έργο σταθερής δύναμης

$W=(F \cdot \cos\theta) \cdot s$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$



Οι δυνάμεις που είναι κάθετες στη μετατόπιση δεν παράγουν έργο.

Ισχύς

- Μέση Ισχύς $$\boxed{\overline{P} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

- Στιγμιαία $$\boxed{P \equiv \frac{dW}{dt}}$$

$$\boxed{P = F\frac{ds}{dt} = F \cdot \upsilon}$$

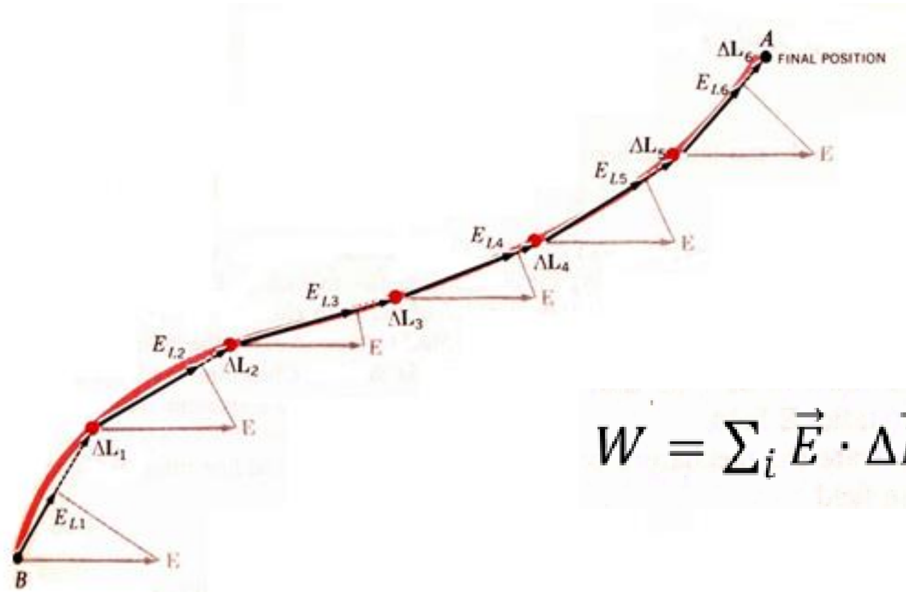
Ισχύς που μεταφέρεται πάνω σε σώμα που κινείται με ταχύτητα υ. Αν η F δεν είναι σταθερή τότε ο τύπος ισχύει για την μέση ισχύ

Εφαρμογές

Παραδείγματα

Αντίσταση αέρα	$F_R = -c\,υ^2$
Αεριωθούμενο	$F_t = λ(υ - υ_{εξ})$
Πύραυλος	$F_t = λυ_{εξ}$

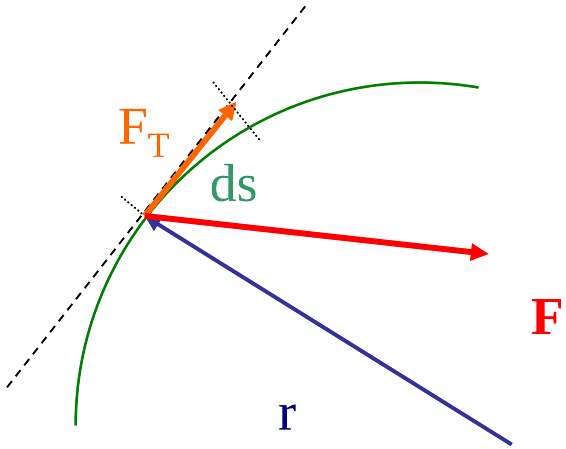
Μετατόπιση σε καμπύλη



$$W = \sum_i \vec{E} \cdot \Delta\vec{L}_i$$

Η δύναμη E είναι σταθερή σε όλο το χώρο. Το έργο υπολογίζεται από την προβολή της δύναμης στη μετατόπιση ΔL_i.

Καμπυλόγραμμη κίνηση



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$F_r dr \Rightarrow dW = 0$$

$$\Rightarrow dW = F_T \cdot ds$$

$$W_{AB} = \int_A^B F_T \cdot ds$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Κινητική ενέργεια

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dx}$$

$$\Rightarrow W = \int_{xx_1}^{x_2} m \frac{d\upsilon}{dt} dx = \int m\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} dx =$$

$$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon d\upsilon = \tfrac{1}{2} m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

Η ποσότητα

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m\upsilon^2}$$

Ονομάζεται Κινητική Ενέργεια

Θεώρημα έργου ενέργειας

Το έργο που παράχθηκε είναι ίσο με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος.

Μονάδες

Μονάδες έργου

1 (Joule) 1 J=1 Nt * 1 m

Μονάδες Ισχύος 1W=1J/1s

SI 1 hp=736 W

Βρετανικό 1 hp=746 W

Διατηρητικές δυνάμεις

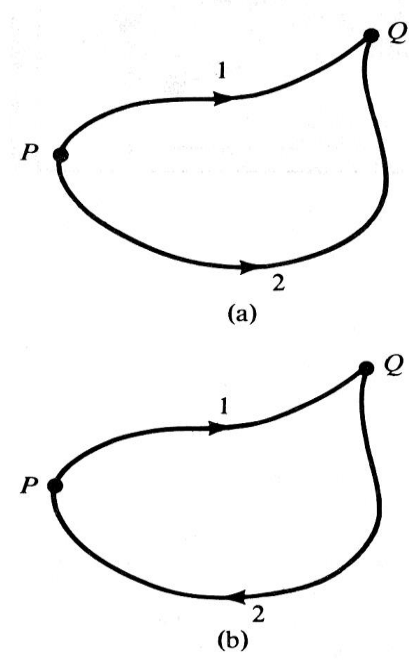
Ορισμός

(a) $W_{PQ1}=W_{PQ2}$

(b) $W_{PQ}= -W_{QP}$

$W_{ολ}=W_{PQ}+ W_{QP}=0$

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$



Παραδείγματα

- Διατηρητικές
    - Βαρύτητα, Ηλεκτροστατικές
- Μη διατηρητικές
    - Τριβή

Συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας

Αν το παραγόμενο έργο, εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος και όχι από την διαδρομή.

Ορίζουμε μία συνάρτηση U(x,y,z) την οποία ονομάζουμε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ή απλα δυναμική ενέργεια και η οποία είναι συνάρτηση μόνον των συντεταγμένων.

$$\boxed{\begin{aligned} W_c &= -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx = U(x_i) - U(X_f) = -\Delta U \\ U_f &= -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i \end{aligned}}$$

Η U_i μπορεί να μηδενίζεται σε κάποιο αυθαίρετο σημείο αναφοράς

Πεδία Δυνάμεων (1 από 2)

Τι δυνατότητες μας δίνει η χρησιμοποίηση των συναρτήσεων δυναμικής ενέργειας.

Από τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας, μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη που θα ασκηθεί πάνω σε ένα σώμα που θα βρεθεί στη θέση αυτή.

Δηλαδή ορίζουμε ένα πεδίο δυνάμεων δηλ. μία περιοχή του χώρου όπου αν φέρουμε ένα σώμα πάνω του θα ασκηθούν δυνάμεις.

Υπολογίζω την συνάρτηση που δίνει την δύναμη που ασκείται πάνω στη μονάδα μάζας, φορτίου, για κάθε σημείο του χώρου. Την δύναμη αυτή την ονομάζω ένταση του πεδίου ή για συντομία σκέτο πεδίο.

Έτσι περιγράφουμε το πεδίο βαρύτητας με την σχέση , $\vec{F} = km\frac{\hat{r}}{r^2}$

το ηλεκτροστατικό πεδίο με την σχέση : $\vec{F} = kq\frac{\hat{r}}{r^2}$

κ.α. Και στις δύο περιπτώσεις έχω «κρύψει» το πρώτο σώμα στη σταθερή *k.*

Πεδία Δυνάμεων (2 από 2)

Το πλεονέκτημα των είναι ότι απλοποιώ το σύστημα και το χωρίζω ουσιαστικά σε δύο κομμάτια. Το ένα κομμάτι είναι το πεδίο το οποίο παράγεται από το ένα σώμα και προέρχεται από την βαθμωτή συνάρτηση U(x,y,z). Δηλαδή διαλέγουμε ένα από τα σώματα και το αντικαθιστούμε με το πεδίο δυνάμεων. Συνήθως το χρησιμοποιούμε όταν οι αποστάσεις που χρησιμοποιούμε είναι πολύ μεγαλύτερες από τις διαστάσεις του σώματος , στο οποίο τοποθετούμε την αρχή των συντεταγμένων.

Πεδία συνέχεια

Έστω ότι στην αρχή των αξόνων τοποθετώ ένα ηλεκτρικό φορτίο και το εξαναγκάζω να κάνει μία παλινδρομική κίνηση. Γύρω του δημιουργείται ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο το οποίο διαδίδεται στον γύρω χώρο. Αν διακόψουμε την κίνηση η μεταβολή της κατάστασης δεν θα γίνει αμέσως αισθητή σε έναν απομακρυσμένο παρατηρητή και το πεδίο θα εξακολουθήσει να διαδίδεται στο χώρο ανεξάρτητα από την κατάσταση του φορτίου που το δημιούργησε!

Αν τώρα εξετάσουμε το πεδίο που δημιουργείται από ένα αντικείμενο με πολύ μεγάλη μάζα πχ. μία μαύρη τρύπα. Ελέγχουμε την γεωμετρία του χώρου γύρω της χρησιμοποιώντας μία φωτεινή ακτίνα. Διαπιστώνουμε ότι η ακτίνα δεν διαδίδεται ευθύγραμμα! Άρα έχει αλλάξει η γεωμετρία του χώρου!

Στα παραπάνω παραδείγματα ο φυσικός χώρος δεν είναι πιά ο γνωστός Ευκλείδιος χώρος αλλά έχει αποκτήσει φυσικές ιδιότητες που προέρχονται από την παρουσία των σωμάτων.

Μηχανική Ενέργεια

Μεταβολή Κινητικής Ενέργειας από την επίδραση Διατηρητικών Δυνάμεων

$$W_C = \Delta K$$
$$\Delta K = -\Delta U$$

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = 0$$

Το άθροισμα διατηρείται

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Ε Μηχανική Ενέργεια $\boldsymbol{E \equiv K + U}$

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας $\boldsymbol{E_i = E_f}$

Ελατήριο

$F = -kx$

Ελαστική δυναμική ενέργεια $U\left(x\right) = \frac{1}{2}kx^2$

Απόδ. Διατηρητική δύναμη

$x = x_0 \cos\left(\omega t + \phi\right)$

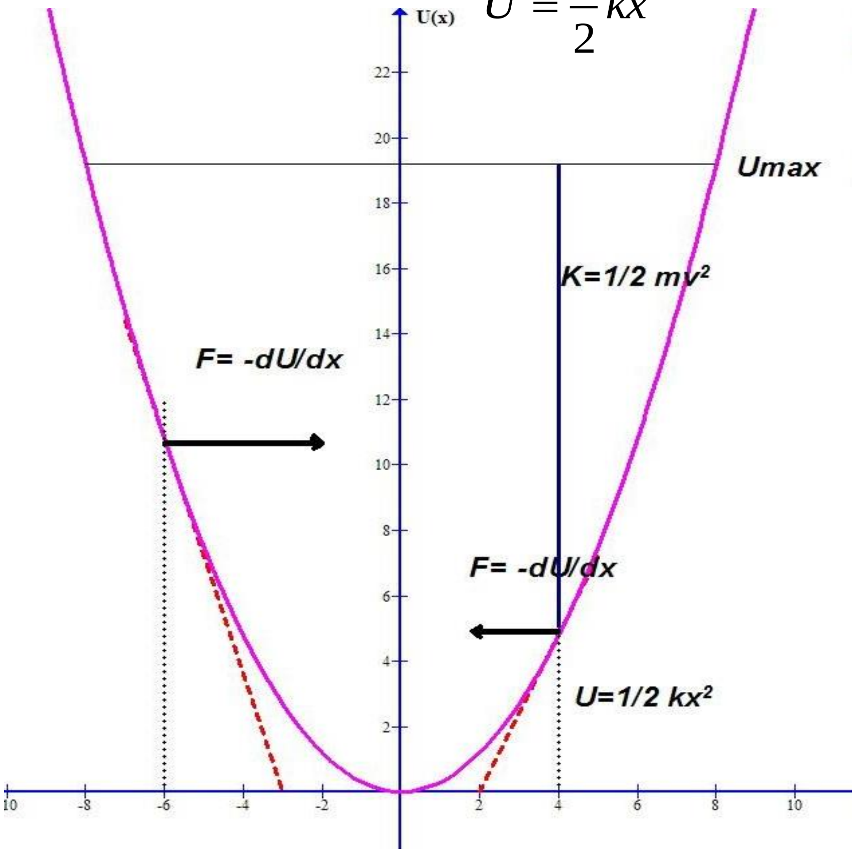
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t)dt = \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)d\varphi = 0$$

Αν γνωρίζουμε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας τότε μπρούμε να υπολογίσουμε την δύναμη από την σχέση :

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας Αρμονικός Ταλαντωτής

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$



Δυναμικό Yukawa

$$U(r) = U_0 \frac{r_0}{r} e^{-r/r_0}$$

$$\upsilon_{(r)} = -\upsilon_o \frac{r_o}{r} e^{-\frac{r}{r_o}}$$

$$F = -\frac{d\upsilon}{dr}$$

$$F = -\upsilon_o \left(\frac{d}{dr}\left(\frac{r_o}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_o}} + \frac{r_o}{r}\frac{d}{dr}\left(e^{-\frac{r}{r_o}}\right)\right)$$

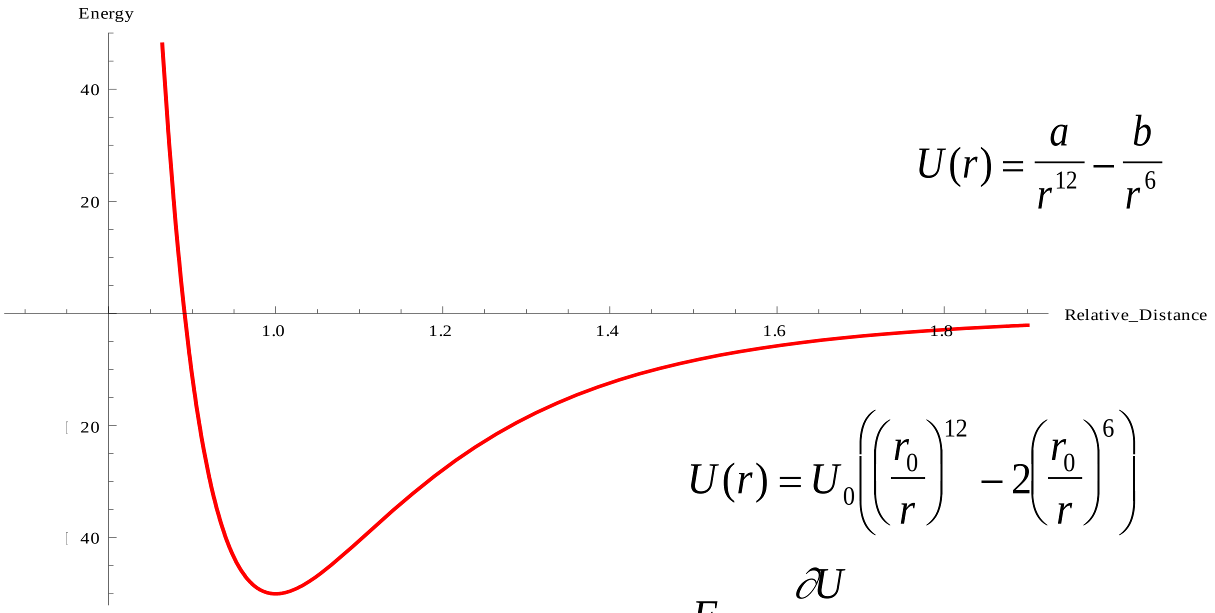
$$= -\upsilon_o \left(-\frac{r_o}{r^2} e^{-\frac{r}{r_o}} - \frac{r_o}{r}\left(-\frac{1}{r_o}\right) e^{-\frac{r}{r_o}}\right)$$

$$= -\upsilon_o \left(\frac{r_o}{r^2} + \frac{1}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_o}}$$

Περιγράφει τις πυρηνικές δυνάμεις με την ανταλλαγή μεσονίων

Πολύ στενό και βαθύ πηγάδι δυναμικού

Συνάρτηση Δυν. Ενέργειας Leanard-Jones



$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}$$

$$U(r) = U_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right)$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow -12\frac{r_0^{12}}{r^{13}} + 12\frac{r_0^6}{r^7} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_0$$

$$U(r_0) = -U_0$$

Διατηρητικές Δυνάμεις (1 από 2)

Όταν η δύναμη είναι διατηρητική, ορίζουμε μία συνάρτηση U(x,y,z), τέτοια ώστε το παραγόμενο έργο, να δίνεται από την σχέση:

$$W_c = U_i - U_f$$

$$W_c = -\Delta U$$

$$\exists U(x,y,z): \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU$$

$$\Rightarrow \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} dU = U(x_1,y_1,z_1) - U(x_2,y_2,z_2)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$

Διατηρητικές Δυνάμεις (2 από 2)

Συνθήκη Cauchy

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_c F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

Ισχύει όταν:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

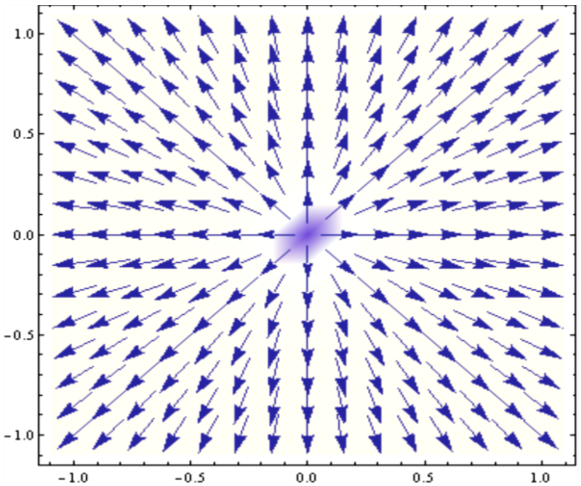
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Θεώρημα Stokes

$$\boxed{\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \vec{F} = 0}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

Μορφές Πεδίων



Ακτινικό Πεδίο, με σταθερό μέτρο.

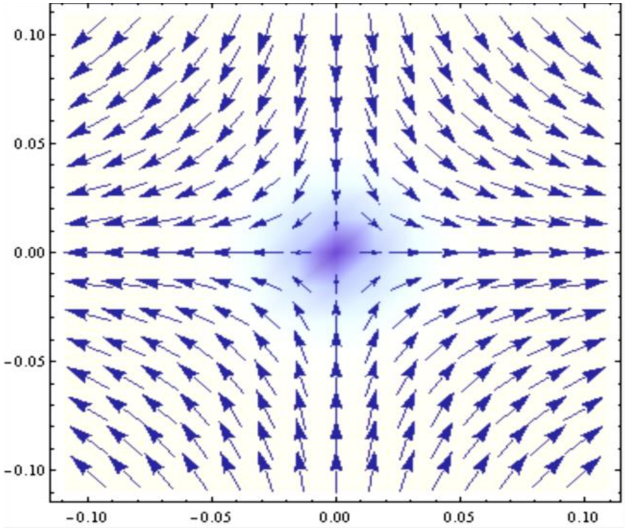
$$\vec{F} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

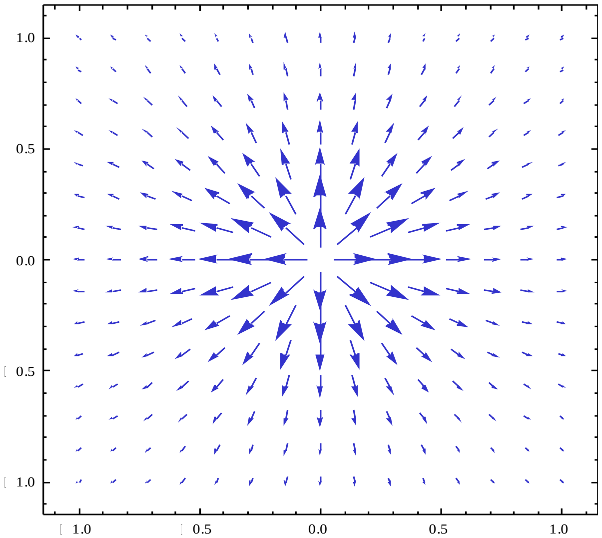
Τετραπολικό Πεδίο.

$$\vec{F} = \frac{x\hat{i} - y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\nabla \times \vec{F} \neq 0$$



Ακτινικό Πεδίο



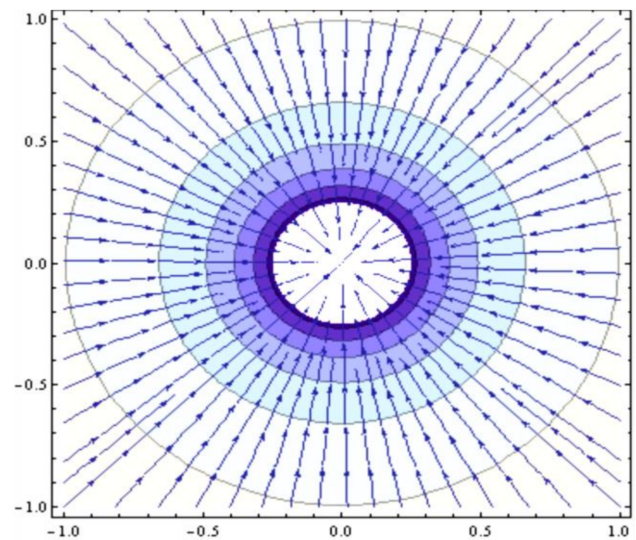
Ακτινικό Πεδίο με μέτρο

$$\prec \frac{1}{r^2}$$

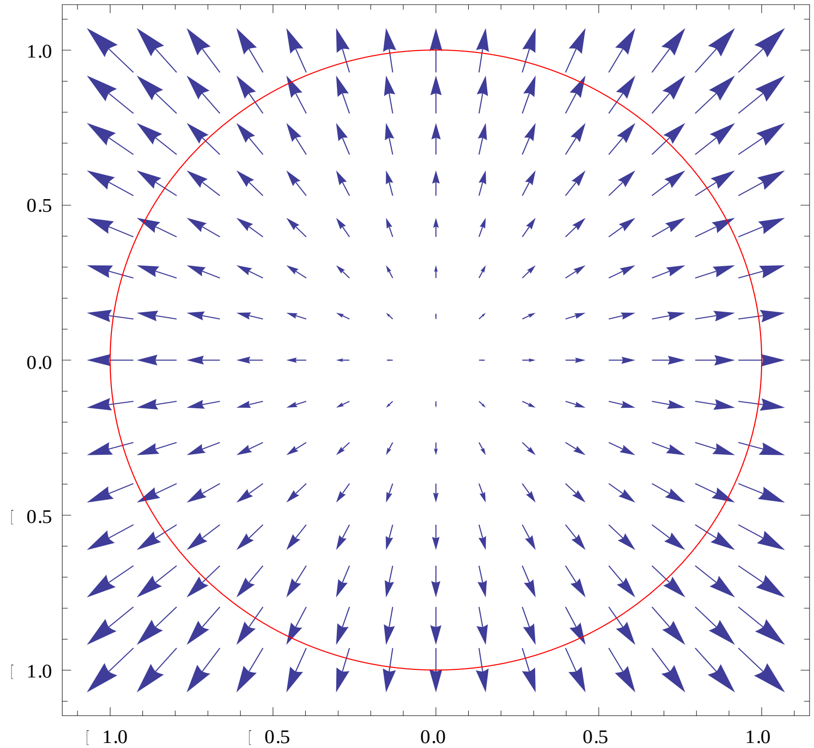
$$\vec{F} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt[3/2]{x^2 + y^2}}$$

Οι ομόκεντροι κύκλοι αντιστοιχούν στη <u>Δυναμική Ενέργεια</u> και τα βέλη ,στις «<u>Γραμμές Ροής</u>»,

«Δυναμικές Γραμμές»

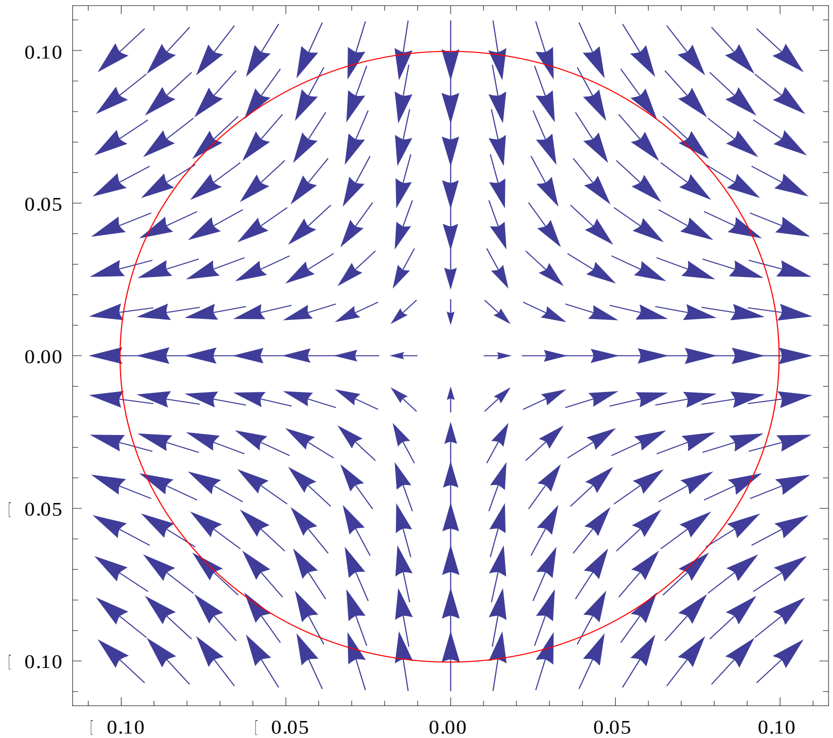


Έργο για κλειστή διαδρομή Ι



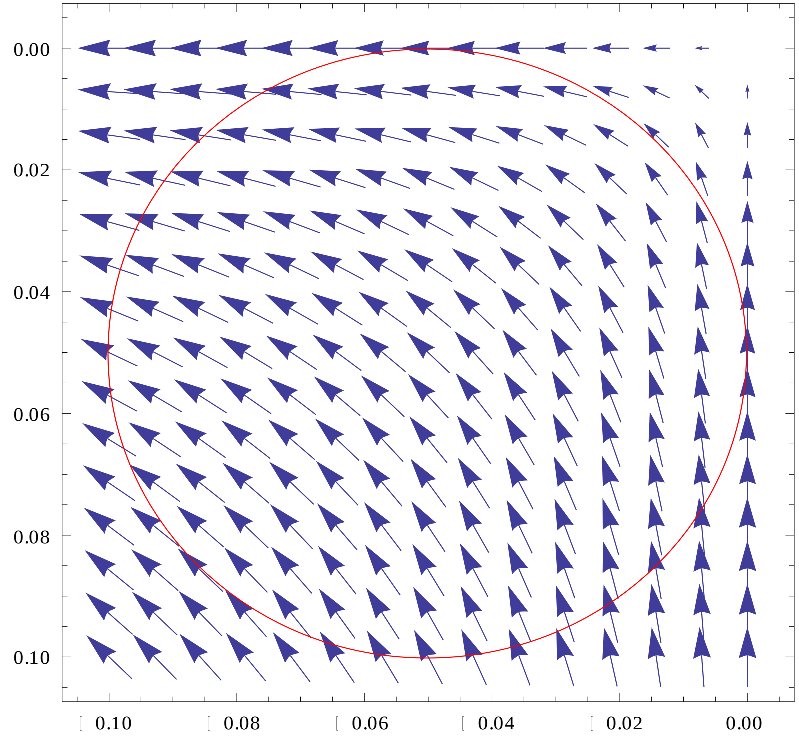
$$\oint_c \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Έργο για κλειστή διαδρομή ΙΙ



$$\oint_c \vec{F} d\vec{r} = 0$$

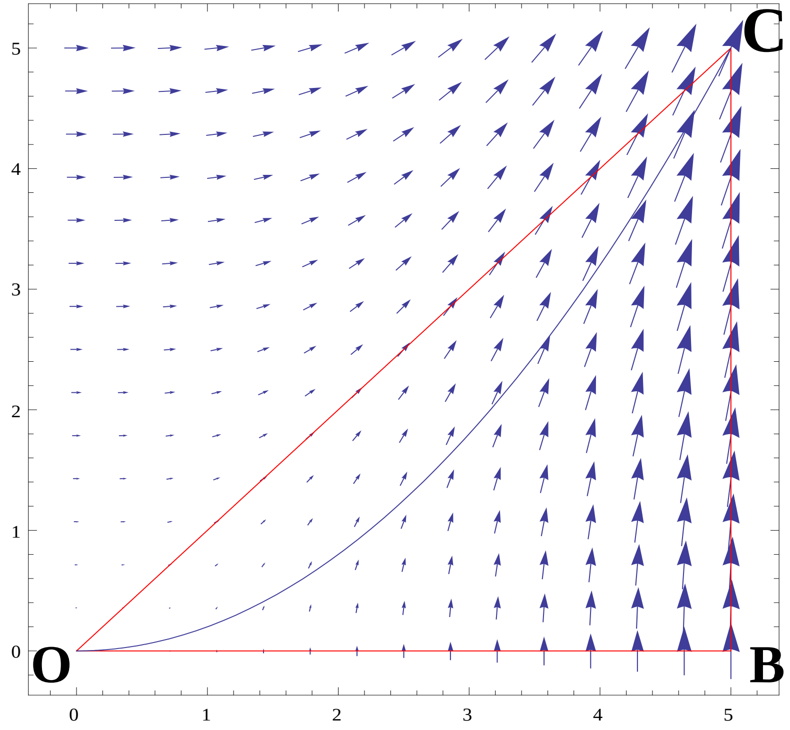
Έργο για κλειστή διαδρομή II κάτω αριστερό τέταρτο



$$\oint_c \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$

Έργο που παράγει η δύναμη F

$$\vec{F} = 2y\hat{i} + x^2\hat{j}$$

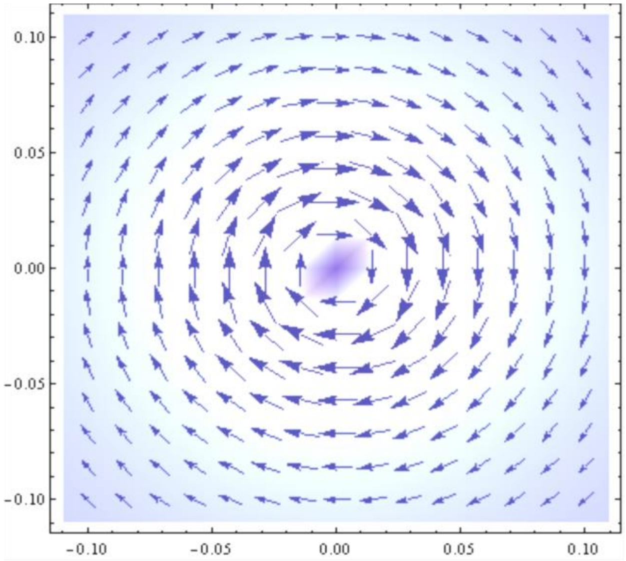


Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στις διαδρομές ολοκλήρωσης.

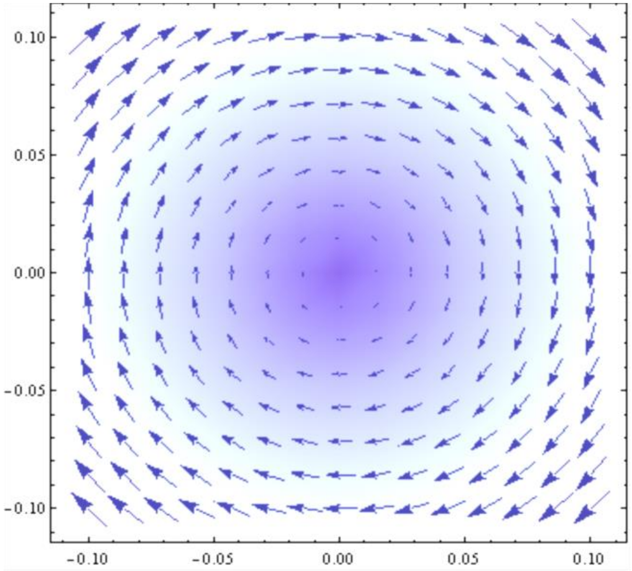
Στροβιλά Πεδία

Πεδία με «Στροβιλισμό»

Μαγνητικό Πεδίο
Ευθύγραμμου αγωγού.



«Φυγοκεντρικό» Πεδίο.



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Γεώργιος Βούλγαρης 2015. Γεώργιος Βούλγαρης. «Γενική Φυσική. Ενότητα 5: Έργο, ενέργεια». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH115/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.