ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ιστορία νεότερων Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τι είναι τα Μαθηματικά

Παπασταυρίδης Σταύρος
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Περιγραφή Ενότητας

Γενική θεώρηση του τι κάνει η επιστήμη των Μαθηματικών. Τονισμός της σημασίας του ιστορικού περίγυρου.

Περιεχόμενα Υποενότητας

- Τι είναι τα μαθηματικά
- Αριστοτέλης, Όιλερ, Αύγουστος Κομπτ, Πουανκαρέ, W. W. Sawyer
- Patterns, μοτίβα, κανονικότητες, αναλογίες, Eugene Wigner
- Πρόγραμμα Σποδών για το Νέο Λύκειο 2015
- Μέθοδος των μαθηματικών, μαθηματικοί ορισμοί, αξιώματα. Κανόνας των προσήμων, Μιγαδικοί αριθμοί, Θεμελιώδες Θεώρημα της άλγεβρας, Τετράδες του Hamilton

Τι είναι τα Μαθηματικά

Ορισμός για τα Μαθηματικά

Ορισμός των Μαθηματικών

- Τι εικόνα σχηματίζει απόφοιτος του λυκείου στην χώρα μας?
- Τι είδους ορισμό θέλουμε?
- Τι πρέπει να είναι τα μαθηματικά?
- Τι είναι σήμερα τα μαθηματικά?
- Λεξικολογική περιγραφή

- Τι μας λέει η **δεδομένη** παρελθούσα Ιστορία
- Εντοπισμός των Μεγάλων Τάσεων μέσα στους Αιώνες
- Σκοπός: Διδασκαλία στην Εκπαίδευση

Λεξικολογική περιγραφή

- **Λεξικό Τεγόπουλος Φυτράκης***:* Η επιστήμη των αριθμών, των σχημάτων και των φυσικών μεγεθών, που μελετά τις μεταξύ τους σχέσεις , καθώς και τις σχέσεις τους στο χώρο και στο χρόνο.
- **Λεξικό Εμμ. Κριαρά***:* Το σύνολο των επιστημών που μελετούν την ποσότητα και τη σειρά σε ό,τι αφορά κυρίως τους αριθμούς και τα μεγέθη που μπορούν να μετρηθούν (ειδικά το χώρο και την κίνηση), καθώς και τις ποικίλες σχέσεις μεταξύ τους και μέσα στο χώρο και το χρόνο εφαρμοσμένα.
- **Λεξικό Μπαμπινιώτη**: Η επιστήμη που έχει ως αντικείμενο τη συστηματική εξέταση των φυσικών μεγεθών, των σχημάτων, των αριθμών και τις μεταξύ τους σχέσεις. Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία είναι κλάδοι των Μαθηματικών.

What is Mathematics

- What is Mathematics: Λογικό είναι για να απαντήσεις στο ερώτημα «τι είναι τα μαθηματικά» να ζητήσεις τη βοήθεια του βιβλίου των R. Courant και H. Robins με τίτλο «What is Mathematics?».
- Δυστυχώς όμως εκεί δεν βρίσκεις συγκεκριμένη απάντηση στο ερώτημα. Περισσότερο δείχνουν τις βασικές έννοιες των διαφόρων μαθηματικών κλάδων, αλλά ορισμό για τα Μαθηματικά δεν δίνουν.
- David Hersh ‘The Mathematical Experience’: The definition of mathematics changes. Each generation and each thoughtful mathematician within a generation formulates a definition according to his lights.

Διάφορες περιγραφές των Μαθηματικών

- Aristotle defined mathematics as: *The science of quantity*.
- In Aristotle's classification of the sciences, discrete quantities were studied by arithmetic, continuous quantities by geometry.[3] James Franklin, "Aristotelian Realism" in *Philosophy of Mathematics, ed. A.D. Irvine, p. 104. Elsevier (2009).*

Euler (1707, Basel, Switzerland - September 18, 1783, Saint Petersburg, Russia)

Elements of Algebra, Part 1, Sec. 1, 2

- Whatever is capable of increase or diminution, is called *magnitude, or quantity.*
- A sum of money therefore is a quantity, since we may increase it or diminish it. It is the same with a weight, and other things of this nature.
- From this definition it is evident, that the different kinds of magnitude must be so various as to render it difficult to enumerate them: and this is the origin of the different branches of Mathematics, each being employed one particular kind of magnitude.
- **Mathematics, in general, is the *science of quantity; or, the science which investigates* the means of measuring quantity.**

Ελληνική Wikipedia

- Τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη που μελετά θέματα που αφορούν την ποσότητα (δηλαδή τους αριθμούς)[2], τη δομή (δηλαδή τα σχήματα)[3], το χώρο[2], τη μεταβολή[4][5], τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητας και της φαντασίας μας, καθώς επίσης, σύμφωνα με ορισμένους ερευνητές, και μερικά άλλα που δεν είναι γενικώς δεκτά ότι πρέπει να περιλαμβάνονται στον ορισμό[6][7][8].

Isidore Marie Auguste François Xavier Comte (1798 – 1857)

- Isidore Marie Auguste François Xavier Comte (17 January 1798 – 5 September 1857) was a French philosopher who coined the terms "sociology" and "altruism" and developed forms of social discipline he called Positivism.
- Social positivism only accepts duties, for all and towards all. Its constant social viewpoint cannot include any notion of rights, for such notion always rests on individuality.

Auguste Comte, *The Philosophy of Mathematics*

The Philosophy of Mathematics, tr. W.M. Gillespie, P.18

- To form a just idea of the object of mathematical science, we may start from **the indefinite and meaningless definition of it usually given**, in calling it "The science of magnitudes" or, which is more definite, "The science which has for its object the measurement of magnitudes".
- Let us see how we can rise from this rough sketch (which is singularly deficient in precision and depth, though, at bottom, just) to a veritable definition, worthy of the importance, the extent, and the difficulty of the science.

True Definition Of Mathematics (1/2)

- We are now able to define mathematical science with precision, by assigning to it as -its object the **indirect measurement** of magnitudes, and by saying it constantly proposes to determine certain **magnitudes from others by means of the precise relations** existing between them.

True Definition Of Mathematics (2/2)

- **Auguste Comte's** definition tried to explain the role of mathematics in coordinating phenomena in all other fields: [4]   The science of indirect measurement.[5] Auguste Comte 1851.
- The "indirectness" in Comte's definition refers to determining quantities that cannot be measured directly, such as the distance to planets or the size of atoms, by means of their relations to quantities that can be measured directly.[6]

Quotes about Comte (1/2)

- Of M. Comte I have only read a few absurd passages.
  - –Louis Pasteur, as quoted in *The life of Pasteur* (1902), by René Vallery-Radot, p. 163
- Catholicism minus Christianity.
  - –T. H. Huxley, on the ideas of Comte.

Quotes about Comte (2/2)

- The philosopher Comte has made the statement that chemistry is a non-mathematical science. He also told us that astronomy had reached a stage when further progress was impossible. These remarks, coming after Dalton's atomic theory, and just before Guldberg and Waage were to lay the foundations of chemical dynamics, Kirchhoff to discover the reversal of lines in the solar spectrum, serve but to emphasize the folly of having **"recourse to farfetched and abstracted Ratiocination,"** and should teach us to be **"very far from the litigious humour of loving to wrangle about words or terms or notions as empty".**
  - J. R. Partington, *Higher Mathematics for Chemical Students* (1911), p.5
- " Man kann nicht mathematisch beweisen, dass die Natur so sein musse, wie sie ist.„ (E. Mach)
- Immanuel Kant (1724 –1804)

Higher Mathematics for Chemical Students. Contents, Chap. Page

Appendices

Σχόλιο από J. R. Partington, Higher Mathematics for Chemical Students (1911) (1/2)

- Jeremias Benjamin Richter in his Anfangsgriinde
- Der Stochyometrie, oder Messkunst chemischer Elemente, published by J. F. Korn of Breslau, in two volumes (1792), strikes a very decided note 'when he repeats a statement from his Inaugural Dissertation (" de Usu Matheseos in Chymia," Konigsberg, 1789) which must have puzzled his contemporaries : **chemistry belongs, in its greatest part, to applied mathematics**.
- The mathematical equipment of chemists must certainly have been somewhat restricted, for Richter begins his book by about thirty pages of mathematical introduction, in which he explains the arithmetical operations, and the rudiments of algebra, concluding with an account of arithmetical and geometrical progressions; this being doubtless as much as the chemist could then be expected to assimilate.

Σχόλιο από J. R. Partington, Higher Mathematics for Chemical Students (1911) (2/2)

- " The ultimate aim of pure science is to be able to explain the most complicated phenomena of nature as flowing by the fewest possible laws from the simplest possible data. A statement of a law is either a confession of ignorance, or a mnemonic convenience. It is the latter if it is deducible by logical reasoning from other laws. It is the former when it is only discovered as a fact to be a law.
- While on the one hand, the end of scientific investigation is the discovery of laws, on the other, science will have reached its highest goal when it shall have reduced ultimate laws to one or two, the necessity of which lies outside the sphere of our cognition.
- These ultimate laws - in the domain of physical science at least - will be the dynamical laws of the relation of matter to number, space, and time, themselves. When these relations shall be known, all physical phenomena will be a branch of pure mathematics “ (Prof. Hicks, B. A. Address, Section A, 1895).

Henri Poincaré (1854 - 1912)

- "Mathematics is the art of giving the same name to different things" Henri Poincaré.
- This was in response to "Poetry is the art of giving different names to the same thing", e.g. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Quotations/Poincare.html

La Valeur De La Science (1905), The Value Of Science

- It can only be **analogy**. But how vague is this word! Primitive man knew only crude analogies, those which strike the senses, those of colors or of sounds. He never would have dreamt of likening light to radiant heat.
- What has taught us to know the true, profound analogies, those the eyes do not see but reason divines?
- It is the mathematical spirit, which disdains matter to cling only to pure form. This it is which has taught us to give the same name to things differing only in material, **to call by the same name**, for instance, the multiplication of quaternions and that of whole numbers.
- Δεν υπάρχει αναφορά σε «poetry»!

Δεν Ελέχθησαν

- Point set topology is a disease from which the human race will soon recover. Quoted in D MacHale, *Comic Sections* (Dublin 1993).
- Later generations will regard *Mengenlehre* (set theory) as a disease from which one has recovered.
  [Whether or not he actually said this is a matter of debate amongst historians of mathematics.] See Jeremy Gray, "Did Poincaré say 'Set theory is a disease'?", *The Mathematical Intelligencer*, 13:19-22 , (1991).

Ελέχθησαν από Poincaré

- Mathematicians are born, not made
- A scientist worthy of his name, about all a mathematician, experiences in his work the same impression as an artist; his pleasure is **as great** and of the same nature.
  Quoted in N Rose *Mathematical Maxims and Minims* (Raleigh N C 1988).
- Τειρεσίας, Ζευς, Ήρα, Σεξ

Τι είναι τα Μαθηματικά

- "**Mathematics is the classification and study of all possible patterns**".
- Pattern is here used in a way that not everybody may agree with. It is to be understood in a very wide sense, to cover almost any kind of regularity that can be recognized by the mind. **Life, and certainly intellectual life, is only possible because there are certain regularities in the world**.
- A bird recognizes the black and yellow bands of a wasp; man recognizes that the growth of a plant follows the sowing of seed. In each case, a mind is aware of pattern.
- **W.W. Sawyer, Prelude to Mathematics Penguin Books Ltd. 1955, p. 12**

Patterns – Αναλογίες

- Θα μπορούσαμε να λέμε αναλογίες (analogies) αντί pattern?
- Μάλλον!

Διαμόρφωση Ορισμού

- Τα μαθηματικά ασχολούνται με την ανακάλυψη (η μήπως εφεύρεση), ταξινόμηση και μελέτη γενικότερα, των γενικών αναλογιων – κανονικοτήτων – patterns – μοτίβων που υπάρχουν στον κόσμο που μας περιβάλλει και στην κοινωνία που οργανώνουμε.

Προσοχή

- Συχνά τα patterns – μοτίβα, εννοούνται σαν εκδηλώσεις ακολουθίας συμβάντων.
- Εδώ, τα εννοούμε με την γενικότερη δυνατή έννοια.

Σημαντικά Ερωτήματα

- Τι κατευθύνει την έρευνα για patterns - αναλογίες?
- Ποια είναι τα σημαντικά patterns - αναλογίες?
- Σχέση με τις φυσικές επιστήμες: The unreasonable effectiveness of mathematics in physical sciences

ΦΕΚ 22-01-2015, τεύχος 2, Αρ. ΦΥΛΛΟΥ 162 (1/2)

Η αντίληψη μας για τα μαθηματικά:

- Είναι αυτονόητη αλήθεια ότι αντίληψη μας για τα μαθηματικά θα επηρεάσει καίρια την αντίληψη μας για την μαθηματική παιδεία.
- Για αυτό τον λόγο επιχειρούμε να συνοψίσουμε την αντίληψη μας για τα Μαθηματικά, στον βαθμό που επιβάλλεται, αλλά και επιτρέπεται από τους σκοπούς του παρόντος κειμένου.
- Δεν υπάρχει γενικά αποδεκτός ορισμός των Μαθηματικών, κάτι που δεν ξαφνιάζει γιατί τα Μαθηματικά είναι ένα πολύ ευρύ επιστημονικό πεδίο με όλων των ειδών τις διασυνδέσεις, με όλες τις μορφές γνώσης, με ένα συνεχώς εξελισσόμενο περιεχόμενο και έναν πολυδιάστατο τρόπο σκέψης.
- Αναζητώντας, για τις ανάγκες του παρόντος κειμένου μια σύντομη, λειτουργική περιγραφή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα Μαθηματικά είναι η γενική μελέτη των κανονικοτήτων (μοτίβα, pattern) και των σχέσεων των.

ΦΕΚ 22-01-2015, τεύχος 2, Αρ. ΦΥΛΛΟΥ 162 (2/2)

- Οι σκοποί των μαθηματικών σε πρώτη φάση είναι η διαμόρφωση εικασιών επί αυτών των κανονικοτήτων και η απόδειξη αυτών.
- Σε δεύτερη φάση, ο σκοπός τους, όπως και άλλων επιστημών και με την βοήθεια άλλων επιστημών, είναι η κατανόηση των φαινομένων που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις και το μυαλό μας.
- Ο σκοπός αυτός έχει τρεις κύριους υποσκοπούς:
  - την εξήγηση των φαινομένων
  - τη πρόβλεψη
  - την τεχνολογία αξιοποίησης της γνώσης στον έλεγχο της φύσης.

Μέθοδος των Μαθηματικών (1/2)

- Η μέθοδος τους έχει ως κεντρικό άξονα το Αριστοτέλειο (ή Ευκλείδειο) κουαρτέτο: Λογική, Ορισμοί, Αξιώματα, Προτάσεις.
- Αυτή η αναζήτηση γενικών κανονικοτήτων οδηγεί στην ανάπτυξη εννοιών, γενικεύσεων και συμπερασμάτων, που βελτιώνουν την κατανόησή μας για τον κόσμο και που μπορούν να-εφαρμοστούν για την επίλυση προβλημάτων, καθαρά μαθηματικών ή από τις άλλες επιστήμες.
- Ο σημαντικός μαθηματικός René Frédéric Thom (1923 –2002), (βραβείο Fields 1958), έγραψε: «All mathematical pedagogy, even if scarcely coherent, rests on a philosophy of mathematics» (μτφ. Κάθε παιδαγωγική των μαθηματικών, ακόμα και αν έχει λίγη λογική συνέπεια, στηρίζεται σε κάποια φιλοσοφία των μαθηματικών). (Βλέπε Ernest Paul, Mathematics Education and Philosophy: An International Perspective, σελ. 1)

Μέθοδος των Μαθηματικών (2/2)

- Ας δούμε ένα παράδειγμα:
- Οι θετικοί ακέραιοι προκύπτουν από θεωρήσεις κοπαδιών ζώων, δένδρων σε έναν αγρό κλπ. Τα κοπάδια μπορούν να ενωθούν, όπως και οι αγροί και να οδηγηθούμε στην πρόσθεση των θετικών ακεραίων. Φυσικά αυτά που τώρα περιγράφουμε έτσι απλά, έλαβαν χώρα στα βάθη της προϊστορίας σε διάρκεια πιθανότατα εκατοντάδων αιώνων. Εξ άλλου θεωρήσεις της κίνησης σε μεταγενέστερους αιώνες, ξεκινώντας από τις έννοιες της ταχύτητας, επιτάχυνσης, δύναμης κλπ., μας οδηγούν στην γενικότερη έννοια α του διανύσματος κλπ.
- Το σχήμα αυτό οργάνωσης της γνώσης γενικώς διατυπώνεται στο Αναλυτικά Πρότερα του Αριστοτέλη. Στα Στοιχεία του Ευκλείδη έχουμε την πρώτη μείζονα εφαρμογή του σχήματος αυτού, η οποία επηρέασε καθοριστικά τον τρόπο σκέψης της νεότερης επιστήμης.

Επιστροφή στον ορισμό

- Τα μαθηματικά ασχολούνται με την ανακάλυψη (η εφεύρεση), ταξινόμηση και μελέτη γενικότερα, των γενικών αναλογιών – κανονικοτήτων – patterns – μοτίβων που υπάρχουν στον κόσμο που μας περιβάλλει και στην κοινωνία που οργανώνουμε.

Επιστροφή στον ορισμό μας – Παράδειγμα

- Κοπάδι προβάτων
- Κοπάδι αιγών
- Φυσικός ακέραιος

Παράδειγμα (1/3)

- Κοπάδι προβάτων 1, (συντ. κπ1)
- κπ2
- Ένωση των κπ1, κπ2, προκύπτει κπ3
- Πρόσθεση φυσικών

Παράδειγμα (2/3)

- Διανύσματα στο επίπεδο και στον χώρο
- Πίνακες
- Διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης
- Σειρές Fourier
- Χώρος Hilbert, σύγκλιση μέσω αποστάσεως

Παράδειγμα (3/3)

- Καμπύλες στον χωριό
- Επιφάνειες στον χώρο
- $f\colon\ R^m \to R^n,\ \ a\varepsilon\ R^n,\ \ \ f^{-1}(a)$
- Διαφορική πολλαπλότης

Mathematics http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics

- Mathematicians seek out patterns[9][10] and use them to formulate new conjectures. Mathematicians resolve the truth or falsity of conjectures by mathematical proof.
- When mathematical structures are good models of real phenomena, then mathematical reasoning can provide insight or predictions about nature. Through the use of abstraction and logic, mathematics developed from counting, calculation, measurement, and the systematic study of the shapes and motions of physical objects.
- Practical mathematics has been a human activity for as far back as written records exist. The research required to solve mathematical problems can take years or even centuries of sustained inquiry.

Περίληψη προηγούμενων

- Ορισμός Μαθηματικών
- Τα μαθηματικά ασχολούνται με την ανακάλυψη (η εφεύρεση), ταξινόμηση και μελέτη γενικότερα, των γενικών αναλογιών – κανονικοτήτων – patterns – μοτίβων που υπάρχουν στον κόσμο που μας περιβάλλει και στην κοινωνία που οργανώνουμε.

Πως «κινούνται» τα Μαθηματικά: «Ποιητικός» ορισμός

- French mathematician Claire Voisin
- “There is (SGP, eternal)creative drive in mathematics, it's all about movement trying to express itself,” Voisin confides.
- Nothing to do with the “boring, dead, and dry” mathematics taught in secondary school, where the courses go through an endless series of “definitions, properties, and theorems” using a method that is “always under control, as if on tracks,” and which is applied to “simple exercises in logic.”

Ορισμός συνεχούς συναρτήσεως

- http://en.wikipedia.org/wiki/(%CE%B5,_%CE%B4)-definition_of_limit
- In calculus, the **(ε, δ) - definition of limit** ("epsilon-delta definition of limit") is a formalization of the notion of limit. It was first given by Bernard Bolzano in 1817. Augustin-Louis Cauchy never gave an () definition of limit in his Cours d'Analyse, but occasionally used arguments in proofs. The definitive modern statement was ultimately provided by Karl Weierstrass.[1][2]

Στόχος ενός ορισμού

- Στην εποχή της ανακάλυψης (η εφεύρεσης), τι ακριβώς σημαίνει:
  - να ορισθεί η συνεχής συνάρτηση?
  - υπάρχει η έννοια «ο ορισμός είναι λάθος»?
  - υπάρχει έννοια «καλού» ορισμού και έννοια «μετρίου» ορισμού?

Όριο

- Ολοκλήρωμα
- Παράγωγος
- Όριο: είναι «κανονικότης» παραγώγου και ολοκληρώματος

Αξιωματική θεμελίωση Γεωμετρίας: Όροι 1/5

Ὅροι

αʹ Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

βʹ Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γʹ Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δʹ Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

εʹ Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Αξιωματική θεμελίωση Γεωμετρίας: Όροι 2/5

ς′ Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζ′ Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η′ Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ′ Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι′ Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

Αξιωματική θεμελίωση Γεωμετρίας: Όροι 3/5

ϛʹ Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζʹ Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

ηʹ Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θʹ Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ιʹ Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

Αξιωματική θεμελίωση Γεωμετρίας: Όροι 3/5

ια΄ Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ΄ Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ΄ Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ΄ Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε΄ Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Αξιωματική θεμελίωση Γεωμετρίας: Όροι 4/5

ιϛ′ Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ′ Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη′ Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

ιθ′ Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

Αξιωματική θεμελίωση Γεωμετρίας: Όροι 5/5

κ´ Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κα´ Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

κβ´ Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

κγ´ Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Διαφάνειες από Heiberg, Euclid elements

Αιτήματα (ή Αξιώματα)

Αἰτήματα

α΄ Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β΄ Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾿ εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γ΄ Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ΄ Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε΄ Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾿ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾿ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοινές έννοιες (ή λογική)

Κοιναὶ ἔννοιαι

α′ Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

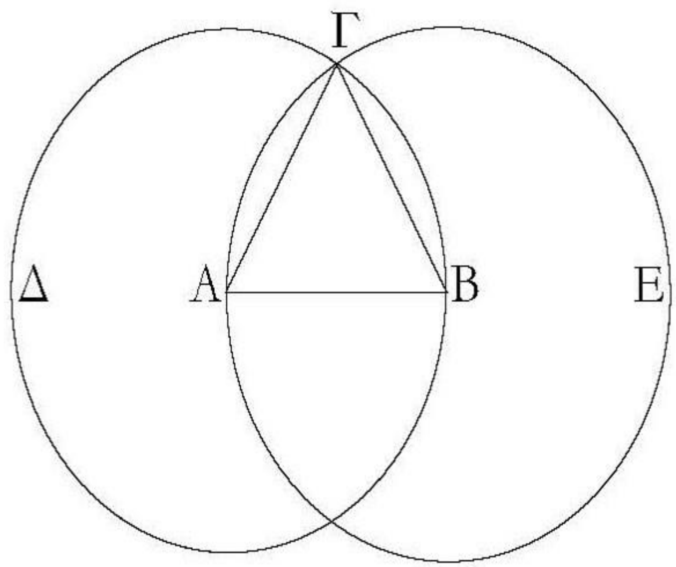
β′ Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ′ Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

δ′ Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ε′ Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].

Το πρώτο «λάθος» (1/2)



Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Το πρώτο «λάθος» (2/2)

Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ᾽ ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπί τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Γέννησις της Αξιωματικής Γεωμετρίας

- Πως σκέφτηκαν τα αξιώματα?
- χρώμα, οσμή, αντοχή υλικού κλπ.
- μήκος
- Αλλαγή: αναλογίες →
- συμβολική Άλγεβρα → συνάρτηση

Επανάληψη: Διαμόρφωση Ορισμού

- Τα μαθηματικά ασχολούνται με την ανακάλυψη (η μήπως εφεύρεση), ταξινόμηση και μελέτη γενικότερα, των γενικών αναλογιών – κανονικοτήτων – patterns – μοτίβων που υπάρχουν στον κόσμο που μας περιβάλλει και στην κοινωνία που οργανώνουμε.

Μέθοδος

- Λογική
- Αξιωματική θεώρηση

Κατεύθυνσης

- **Τι κατευθύνει την έρευνα για patterns - αναλογίες?**
- Ποιες είναι οι « κανονικότητες» - αναλογίες ?
- Σχέση με τις φυσικές επιστήμες: The unreasonable effectiveness of mathematics in physical sciences

Επιτυχημένος Ορισμός

- Είναι το 0 φυσικός?
- Διδασκαλείο μέσης εκπαιδεύσεως (οδός Μενάνδρου)

Επέκταση μιας κανονικότητας

- Επεισόδιο από Δάφνη ορεινής Κορινθίας
- Θετικοί αριθμοί και η πραξεολογία τους
- Ισχύει $(-1)(-1) = \tau\iota$?

Minus times minus

33. It remains to resolve the case in which $-$ is multiplied by $-$; or, for example, $-a$ by $-b$. It is evident, at first sight, with regard to the letters, that the product will be ab; but it is doubtful whether the sign $+$, or the sign $-$, is to be placed before it; all we know is, that it must be one or the other of these signs. Now, I say that it cannot be the sign $-$: for $-a$ by $+b$ gives $-ab$, and $-a$ by $-b$ cannot produce the same result as $-a$ by $+b$; but must produce a contrary result, that is to say, $+ab$; consequently, we have the following rule: $-$ multiplied by $-$ produces $+$, that is, the same as $+$ multiplied by $+$*.

Τι ακριβώς λέει ο Euler

- Η απόλυτος τιμή του γινομένου δύο αριθμών, ισούται με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους.
- Αν αβ = γβ και ο β διάφορος του 0, τότε α = γ.

Υποσημείωση M. Bernoulli

- Έστω ότι α, β, γ είναι θετικοί και ο γ μικρότερος του β. Τότε

$$(-\alpha)(\beta-\gamma) = -(\alpha(\beta-\gamma)) = -(\alpha\beta-\alpha\gamma) = \alpha\gamma - \alpha\beta$$

$$(-\alpha)(\beta-\gamma) = (-\alpha)(\beta+(-\gamma)) =$$

- αν δεχθουμε οτι θα ισχυει η επιμεριστικη ιδιοτητα

$$= (-\alpha)\beta+(-\alpha)(-\gamma) = (-\alpha)(-\gamma) - \alpha\beta$$

$$\alpha\gamma-\alpha\beta = (-\alpha)(-\gamma)-\alpha\beta$$

$$\alpha\gamma = (-\alpha)(-\gamma)$$

Περαιτέρω «Εξήγηση»

- $3\chi = 2, \chi = 2/3$
- $-3\chi = -2, \chi = (-2)/(-3)$

Τι «ακριβώς» αποδείξαμε?

- $(-1)(-1) = 1$
- Οφείλει να είναι έτσι?
- Θα μπορούσε να είναι κάτι άλλο?
- Ποιο είναι το κριτήριο της «σωστής» επιλογής?

Λύση εξισώσεων δευτέρου βαθμού Τετραγωνική ρίζα αρνητικών: υπάρχει? (1/2)

- Έστω ότι υπάρχει ένα ευρύτερο σύστημα που περιέχει τους πραγματικούς, υπάρχει στοιχείο ω ώστε $\omega^2 = -1$.
- Έστω α θετικός πραγματικός.
- Ψάχνουμε χ ώστε $\chi^2 = -\alpha$.

$$\chi^2 = -\alpha, \chi^2 + \alpha = 0, (\chi + \omega\alpha^{1/2})(\chi - \omega\alpha^{1/2}) = 0$$

- Άρα ο ζητούμενος χ είναι η ο $\omega\alpha^{1/2}$ η ο $-\omega\alpha^{1/2}$
- Ας ορίσουμε $(-\alpha)1/2 = \omega\alpha^{1/2}$

Λύση εξισώσεων δευτέρου βαθμού Τετραγωνική ρίζα αρνητικών: υπάρχει? (2/2)

- Ας δεχθούμε στο νέο σύστημα, τον κανόνα ότι το γινόμενο τετραγωνικών ριζών, ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου των.
- $\left((-2)(-3)\right)^{1/2} = (-2)^{1/2}(-3)^{1/2} =$ $(\omega 2\ 1/2\ )(\ \omega 3\ 1/2\ ) = \omega^2 6^{\ 1/2} = -6^{1/2}$ $(\ (-2)(-3)\ )^{1/2} = 6^{1/2}$

It was not Euler's finest our (Winston Churchill) (1/2)

148. Moreover, as $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{b}$ makes $\sqrt{ab}$, we shall have $\sqrt{6}$ for the value of $\sqrt{-2}$ multiplied by $\sqrt{-3}$; and $\sqrt{4}$, or 2, for the value of the product of $\sqrt{-1}$ by $\sqrt{-4}$. Thus we see that two imaginary numbers, multiplied together, produce a real, or possible one.

Λύση εξισώσεων 2ου βαθμού και ανισότητα (1/2)

- Έστω ότι υπάρχει ευρύτερο σύστημα «αριθμών», όπου υπάρχει ω με $\omega^2 = -1.$
- Στο σύστημα αυτό μπορεί να υπάρχει ανισότητα?
- Θα είναι $\omega > 0 \;\; \eta \; \omega < 0$.
- Το ω^2 θα είναι πάντα «θετικό»
- Το $1^2 = 1$ είναι πάντα «θετικό»

Τι «ακριβώς» αποδείξαμε?

- $(-1)(-1) = 1$
- Οφείλει να είναι έτσι?
- Θα μπορούσε να είναι κάτι άλλο?
- Ποιο είναι το κριτήριο της «σωστής» επιλογής?
- Μήπως είναι ορισμός?
- Είναι «καλός» ορισμός?
- Μήπως η επέκταση εγκλείει αντιφάσεις?

Επεξηγήσεις

- Είναι ορισμός.
- Το νέο σύστημα, (θετικοί + αρνητικοί), επιλέγεται έτσι ώστε να υπάρχουν κάποιες από τις ιδιότητες που παλαιά είχαν οι θετικοί από μόνοι τους.
- Αντιφάσεις υπάρχουν αν προϋπάρχουν.

It was not Euler's finest our (Winston Churchill) (2/2)

148. Moreover, as $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{b}$ makes $\sqrt{ab}$, we shall have $\sqrt{6}$ for the value of $\sqrt{-2}$ multiplied by $\sqrt{-3}$; and $\sqrt{4}$, or 2, for the value of the product of $\sqrt{-1}$ by $\sqrt{-4}$. Thus we see that two imaginary numbers, multiplied together, producc a real, or possible one.

Τι σημαίνει το προηγούμενο?

- Δεν υπάρχει ευρύτερο σύστημα που να περιλαμβάνει τους πραγματικούς, να έχουν οι πράξεις τις ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες, να υπάρχει ορισμός τετραγωνικής ρίζας, και να ισχύει ότι
- η ρίζα γινομένου ισούται με το γινόμενο των ριζών των παραγόντων

Λύση εξισώσεων β βαθμού και ανισότητα (2/2)

- Έστω ότι υπάρχει ευρύτερο σύστημα «αριθμών», όπου υπάρχει ω με $\omega^2 = -1$.
- Στο σύστημα αυτό μπορεί να υπάρχει ανισότητα ?
- Θα είναι $\omega > 0\ \eta\ \omega < 0$.
- Το ω^2 θα είναι πάντα «θετικό»
- Το $1^2 = 1$ είναι πάντα «θετικό»
- Άρα $\omega^2 + 1 = 0$ πρέπει να είναι θετικό!

Τι σημαίνει

- Δεν υπάρχει ευρύτερο σύστημα που να περιλαμβάνει τους πραγματικούς, και να υπάρχει ανισότητα με τις «συνήθεις» ιδιότητες.

Μιγαδικοί

- Δεν έχουν και δεν πρόκειται να έχουν, καθολικό ορισμό τετραγωνικής ρίζας η ανισότητα
- Με τις «συνήθεις» ιδιότητες των πραγματικών
- ERGO: οι μιγαδικοί εις το πυρ το ... εξώτερον?
- Όχι!
- Γιατί?
- Ο πρώτος χρονικά ιστορικός λόγος είναι οι εξισώσεις τρίτου βαθμού

Fundamental Theorem of Algebra

- Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα.
- Πόρισμα: Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού ν μεγαλύτερου του 0, με μιγαδικούς συντελεστές, έχει ακριβώς ν μιγαδικές ρίζες, (το πλήθος των ριζών μετράται κατά πολλαπλότητα).
- Και λοιπόν? Και τι έγινε?

«Πραγματικό» Πόρισμα

- Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού >0, γράφεται σαν γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.
- Αν δε δευτεροβάθμιο πολυώνυμο,
- e.g. $ax^2 + bx + c$
- είναι ένας από τους παράγοντες, τότε
- $b^2 - 4ac < 0$
- ERGO: Οι «μιγαδικοί» μας διαφωτίζουν για τους ... «πραγματικούς»

Το νέο πρόγραμμα σπουδών του λυκείου

- Μιγαδικοί εντός η εκτός?
- Σχόλιο Αμερικανών
- Επιχειρήματα υπέρ και κατά

Απόδειξη προηγούμενου πορίσματος

- Θεώρημα: Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα.
- Πόρισμα: Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού ν μεγαλύτερου του 0, με μιγαδικούς συντελεστές, έχει ακριβώς ν μιγαδικές ρίζες, (το πλήθος των ριζών μετράται κατά πολλαπλότητα).
- «Πραγματικό» Πόρισμα: Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού >0, γράφεται σαν γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.
- Αν δε δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, e.g. $ax^2 + bx + c$
- Είναι ένας από τους παράγοντες, τότε $b^2 - 4ac < 0$

Ποιος απέδειξε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας (1/3)

- Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra
- A first attempt at proving the theorem was made by d'Alembert in 1746, but his proof was incomplete. Among other problems, it assumed implicitly a theorem (now known as Puiseux's theorem) which would not be proved until more than a century later, and furthermore the proof assumed the fundamental theorem of algebra. Other attempts were made by Euler (1749), de Foncenex (1759), Lagrange (1772), and Laplace (1795).
- These last four attempts assumed implicitly Girard's assertion; to be more precise, the existence of solutions was assumed and all that remained to be proved was that their form was $a + bi$ for some real numbers a and b. In modern terms, Euler, de Foncenex, Lagrange, and Laplace were assuming the existence of a splitting field of the polynomial $p(z)$.

Ποιος απέδειξε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας (2/3)

- At the end of the 18th century, two new proofs were published which did not assume the existence of roots. One of them, due to James Wood and mainly algebraic, was published in 1798 and it was totally ignored. Wood's proof had an algebraic gap.[2]
- The other one was published by Gauss in 1799 and it was mainly geometric, but it had a topological gap, filled by Alexander Ostrowski in 1920, as discussed in Smale 1981 [3] (Smale writes, "...I wish to point out what an immense gap Gauss' proof contained. It is a subtle point even today that a real algebraic plane curve cannot enter a disk without leaving. In fact even though Gauss redid this proof 50 years later, the gap remained. It was not until 1920 that Gauss' proof was completed.

Σχόλιον Gauss

- Μπορώ να το αποδείξω αν ... προκληθώ!

Ποιος απέδειξε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας (3/3)

- In the reference Gauss, A. Ostrowski has a paper which does this and gives an excellent discussion of the problem as well..."). A rigorous proof was published by Argand in 1806; it was here that, for the first time, the fundamental theorem of algebra was stated for polynomials with complex coefficients, rather than just real coefficients. Gauss produced two other proofs in 1816 and another version of his original proof in 1849.
- The first textbook containing a proof of the theorem was Cauchy's *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821). It contained Argand's proof, although Argand is not credited for it.
- Κάθε μη αρνητική συνεχής συνάρτηση σε κλειστό δίσκο του επιπέδου, έχει ελάχιστον!

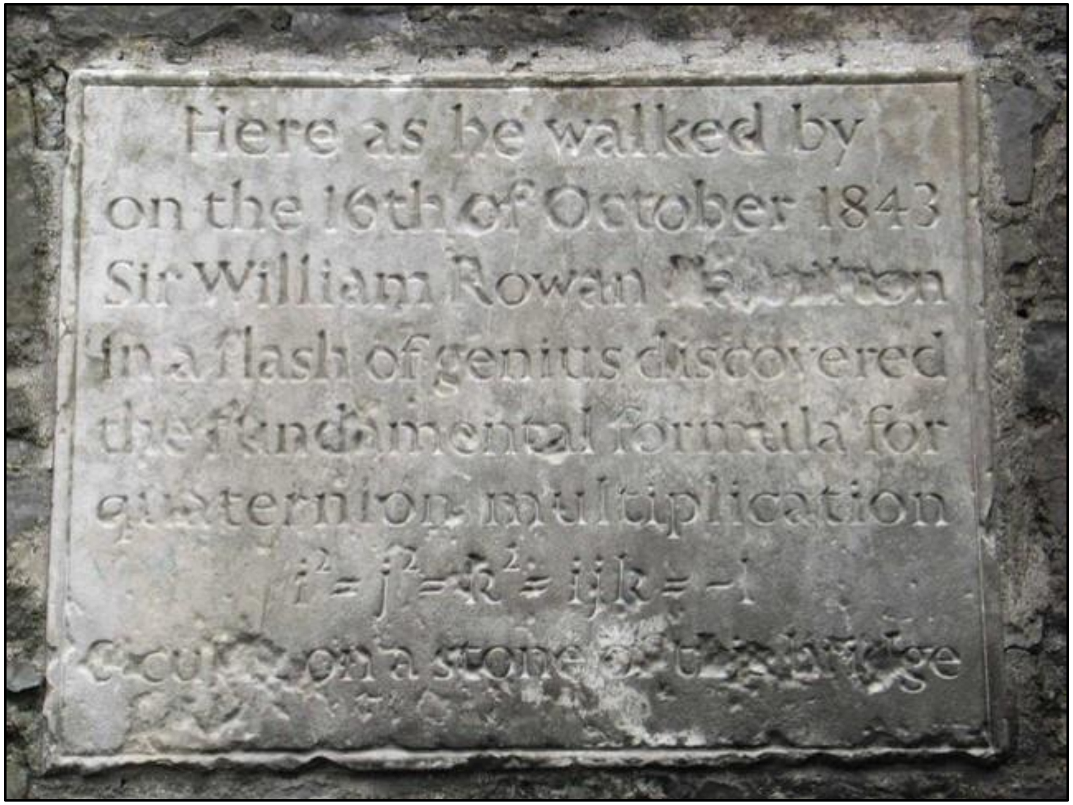
Επιμονή στον Gauss

- Wolfram Mathworld, http://mathworld.wolfram.com/FundamentalTheoremofAlgebra.html
- Fundamental Theorem of Algebra
- Every polynomial equation having complex coefficients and degree has at least one complex root. This theorem was first proven by Gauss.
- Ιστορία και μεγάλοι άνδρες

Quaternion

- **Sir William Rowan Hamilton** (1805–1865)
- Προβλήματα Φυσικής
- Γινόμενο στο R^3
- Γινόμενο στο R^4
- R^4
- $1 \ = \ (1, 0, 0, 0\ )$
- $i \ = \ (0, 1, 0, 0\ )$
- $j \ = \ (0, 0, 1, 0\ )$
- $k \ = \ (0, 0, 0, 1\ )$

Quaternion plaque on Brougham (Broom) Bridge, Dublin (1/2)



Εικόνα 1.

Quaternion plaque on Brougham (Broom) Bridge, Dublin (2/2)

- Here as he walked by on the 16th of October 1843
  Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication.
- $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, and cut it on a stone of this bridge
- flash of genius (?)

Multiplication

$$
\begin{aligned}
(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1)(a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2) = \\
= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, \\
a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, \\
a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, \\
a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2).
\end{aligned}
$$

Wikipedia

- In mathematics, the **quaternions** are a number system that extends the complex numbers. They were first described by Irish mathematicianWilliam Rowan Hamilton in 1843[1][2] and applied to mechanics in three-dimensional space. A feature of quaternions is that multiplication of two quaternions is noncommutative. Hamilton defined a quaternion as the quotient of two directed lines in a three-dimensional space[3] or equivalently as the quotient of two vectors.[4]
- Quaternions find uses in both theoretical and applied mathematics, in particular for calculations involving three-dimensional rotations such as in three-dimensional computer graphics, computer vision and crystallographic texture analysis.[5] In practical applications, they can be used alongside other methods, such as Euler angles and rotation matrices, or as an alternative to them, depending on the application.

Euler's four – square identity

$$
\begin{aligned}
&(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) \\
=&(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)^2 \\
+&(a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)^2 \\
+&(a_1 b_3 - a_2 b_4 - a_3 b_1 + a_4 b_2)^2 \\
+&(a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1)^2.
\end{aligned}
$$

Ιδιότητες

- Όλες οι ιδιότητες των πραγματικών (και μιγαδικών) πλην αντιμεταθετικής ιδιότητας στον πολλαπλασιασμό
- Μας ενδιαφέρουν οι Quaternions η μήπως δεν πολυ-αξίζουν?

Clerk Maxwell - Remarks on the Mathematical Classification of Physical Quantities

The invention of the calculus of Quaternions is a step towards the knowledge of quantities related to space which can only be compared, for its importance, with the invention of triple coordinates by Descartes. The ideas of this calculus, as distinguished from its operations and symbols, are fitted to be of the greatest use in all parts of science.

Εικόνα 2.

Proceedings of the London Mathematical Society, Volume 1-3, issue 1, 1869

Lord Kelvin, William Thomson

- Quaternions came from Hamilton after his really good work had been done; and, though beautifully ingenious, have been an unmixed evil to those who have touched them in any way, including Clerk Maxwell. (Lord Kelvin, letter to Hayward, 1892)
- S. P. Thompson, The Life of William Thomson, Baron Kelvin of Largs, Macmillan, London, 1910, p. 1138.

Kelvin on Heaviside

- Symmetrical equations are good in their place, but **"vector" is a useless survival**, or offshoot, from quaternions, and has never been of the slightest use to any creature. Hertz wisely shunted it, but unwisely he adopted temporarily Heaviside's nihilism. He even tended to nihilism in dynamics, as I warned you soon after his death. He would have grown out of all this, I believe, if he had lived. He certainly was the opposite pole of nature to a nihilist in his experimental work, and in his Doctorate Thesis on the impact of elastic bodies.
- S. P. Thompson, The Life of William Thomson, Baron Kelvin of Largs, Macmillan, London, 1910, p. 1070.
- Θεωρία της εξέλιξης

Kelvin on Liouville

- Once when lecturing he used the word "mathematician," and then interrupting himself asked his class : "Do you know what a mathematician is?”
- Stepping to the blackboard he wrote upon it :
  - Integration infinity to + infinity of $\exp(-x\hat{}2)dx = sqrt(pi)$
- Then, putting his finger on what he had written, he turned to his class and said : " A mathematician is one to whom that is as obvious as that twice two makes four is to you. Liouville was a mathematician." Then he resumed his lecture.
- S. P. Thompson, The Life of William Thomson, Baron Kelvin of Largs, Macmillan, London, 1910, P. 1139

Κληρονομιά των Quaternions

- Χρησιμοποιήθηκαν στην φυσική, π.χ. εξισώσεις Maxwell, ξεπεράστηκαν από διανυσματικό λογισμό όμως
- άνοιξαν νέο δρόμο στην Αλγεβρική σκέψη

Μαθηματικές Ανακαλύψεις

- Ξεκινάμε από πρόβλημα του παρελθόντος με βάση τις ιδέες του παρελθόντος πάμε σε κάτι νέο ίσως αρνούμενοι κάτι από το παρελθόν
- Το μέλλον μπορεί να ξεπεράσει ότι κατασκευάσαμε
- Γενίκευσης για την γενίκευση? Αξίζει?

Van Der Waerden, Mathematics Magazine

Hamilton's Discovery of Quaternions

Contemporary sources describe Hamilton's trail from repeated failures at multiplying triplets to the intuitive leap into the fourth dimension.

B. L. VAN DER WAERDEN
University of Zurich

Εικόνα 3.

Van Der Waerden, Mathematics Magazine, Vol. 49, No. 5 (Nov., 1976), pp. 227-234

Τέλος Υποενότητας

Ορισμός για τα Μαθηματικά

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Παπασταυρίδης Σταύρος. «Ιστορία Νεότερων Μαθηματικών, Τι είναι Μαθηματικά». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH113/.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Εικόνα 1: Quaternion plaque."William Rowan Hamilton Plaque, geograph.org.uk, 347941" by JP. Licensed under CC BY-SA 2.0 via Wikimedia Commons.

Εικόνα 2: Clerk Maxwell - Remarks on the Mathematical Classification of Physical Quantities. Proceedings of the London Mathematical Society, Volume 1-3, issue 1, 1869.

Εικόνα 3: Van Der Waerden on Hamilton’s discovery of Quartenions. Mathematics Magazine, Vol. 49, No. 5 (Nov., 1976), pp. 227-234.