12/5/14

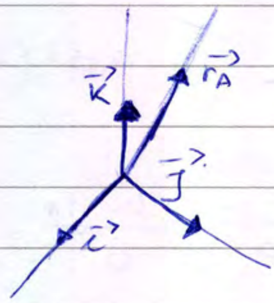
Η ευθεία στο επίπεδο!

Καθορισμός της ευθείας:

- Από δύο σημεία.
- Από ένα σημείο και τη διεύθυνσή της.
- Ειδικά στο επίπεδο: Από ένα σημείο και την κάθετη διεύθυνσή της.

Μαθηματικοποίηση

Γλώσσα → Διανύσματα
Γλώσσα → Συντεταγμένες.



$\vec{r_A}$ ≡ διάνυσμα θέσης του σημείου A.
$\vec{OA} \equiv \vec{r_A}$
$A(x_A, y_A, z_A)$

Στο χώρο δίνεται ένα σημείο A και μια διεύθυνση δηλαδή ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u} \neq \vec{0}$. Ζητείται η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι // στο $\vec{u}$. Διανυσματική εξίσωση $\vec{AM} \parallel \vec{u}$ (για $M \in (\varepsilon)$) Άρα $\vec{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$. Άλλα.
$\vec{AM} = \vec{r} - \vec{r_A} = t\vec{u} \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{r_A} + t\vec{u}}$

Ειδική περίπτωση

Δίνονται A και B, τότε η ευθεία που ορίζουν $\boxed{\vec{r} = \vec{r_A} + t\vec{AB}}$
$\vec{u} = \vec{AB}$

Αναλυτικές Εξισώσεις

$A(x_A, y_A, z_A)$
$\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 0$
$M(x, y, z)$

$$\vec{r} = \vec{r_A} + t\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Ειδικές περιπτώσεις (μπορώ να απαλείψω την παράμετρο).

- $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x - x_A = t\alpha \\ y - y_A = t\beta \\ z - z_A = t\gamma \end{pmatrix} \quad \frac{x-x_A}{\alpha} = \frac{y-y_A}{\beta} = \frac{z-z_A}{\gamma}$$

Στο χώρο-σύστημα δύο εξισώσεων.

- Αν είναι στο επίπεδο

$(\gamma = 0,\ z = 0,\ z_A = 0)$.

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \quad (\alpha,\beta) \neq (0,0).$$

$\alpha, \beta \neq 0 \quad \frac{x-x_A}{\alpha} = \frac{y-y_A}{\beta} \qquad \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$

Ειδικά $A(x_A, y_A)$. $\quad \vec{u} = \vec{AB}\ (x_B - x_A,\ y_B - y_A)$

$B(x_B, y_B)$.

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Leftrightarrow \boxed{\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{x_B-x_A}{y_B-y_A}}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ειδικά για το επίπεδο

$\vec{u}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ για $\underline{\alpha \neq 0}$ $\exists \lambda_{\vec{u}} = \frac{\beta}{\alpha}$ για $\alpha = 0$ δεν έχει νόημα και το διάνυσμα είναι κάθετο στον άξονα $x'x$.

Με χρήση συντελεστών έχω:

$(x_B - x_A)y + y_A(x_B - x_A) = (y_B - y_A)x - x_A(y_B - y_A)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(y_B - y_A)}_{\beta}x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{\alpha}y = y_A(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A)$

$-\beta x+\alpha y+\gamma=0\ (\varepsilon)$. $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$ (όταν ορίζεται).

$\vec{u}(\alpha,\beta)$. $\vec{u}\parallel(\varepsilon)$.

$\vec{v}(-\beta,\alpha)$ $\vec{v}\perp(\varepsilon)$

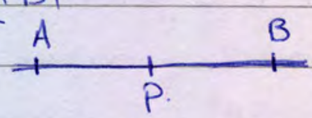
$y=\lambda x+\beta$.

Γνωστά Θέματα Γεωμετρίας

① Χωρισμός ευθύγραμμου τμήματος σε δοθέντα λόγο
Απλός λόγος τριών σημείων.

Ορισμός: Δοθέντων 2 σημείων A και B για ένα τρίτο σημείο P ορίζεται ο απλός λόγος (ABP) που είναι ο πραγματικός αριθμός λ για τον οποίο ισχύει

$\boxed{\vec{AP}=\lambda\vec{PB}}$



$\vec{AB}, \vec{BP}$ παράλληλα άρα $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\vec{AP}=\lambda\vec{PB}$. Αυτό το λ συμβολίζω (ABP).

Σχόλιο

Δεν ορίζεται λόγος διανυσμάτων $\left(\frac{\vec{u}}{\vec{v}}\right)$ Δεν έχει νόημα.

Πολλά βιβλία

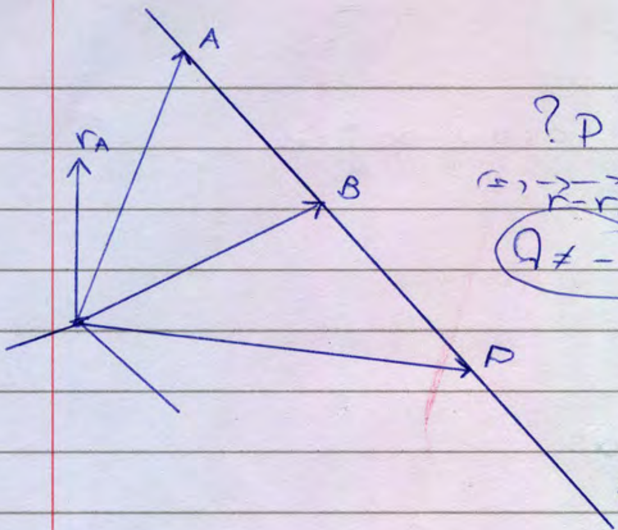
$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\lambda$ ($\overline{AP}$ => μήκος με προσανατολισμό)

Παρατήρηση: $\lambda>0 \Leftrightarrow$ AP, PB (ιδιαίτερα και P εσωτερικό του ε.τ.)

Πρόβλημα: Δοθέντων A, B ($\lambda\in\mathbb{R}$)
Ζητείται P ώστε $(ABP)=\lambda$.

Λύση

Π.ς.ο



? P $\vec{AP} = \lambda \vec{PB} \Leftrightarrow ? \vec{r}$, $r - r_A = \lambda(\vec{r_B} - \vec{r})$

$\Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r_A} = \lambda(\vec{r_B} - \vec{r}) \Leftrightarrow (1+\lambda)\vec{r} = \vec{r_A} + \lambda\vec{r_B}$.

$\lambda \neq -1$ $\quad \vec{r} = \frac{\vec{r_A} + \lambda\vec{r_B}}{(1+\lambda)}$.

Σε συντεταγμένες έχω

$\vec{r} = (x_P, y_P, z_P)$, $\vec{r_A} = (x_A, y_A, z_A)$.

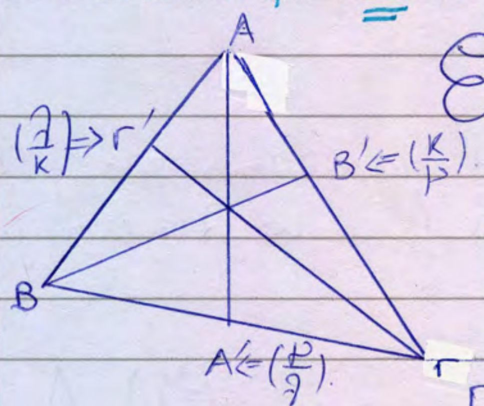
$\vec{r_B} = (x_B, y_B, z_B)$.

$P\left(x_P = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, y_P = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, z_P = \frac{z_A + \lambda z_P}{\varepsilon}\right)$

$\lambda = +1$ P(μέσον) $\rightarrow \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

$\frac{\vec{r_A} + \vec{r_B}}{2} = \vec{r_P}$ (μέσον

ΘΕΩΡΗΜΑ CEVA



Ειδική μορφή στο επίπεδο.
Εαν οι λόγοι είναι αυτοί στο σχήμα τοτε τα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εστω ότι $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$. $A'(x_{A'}, y_{A'})$, $B'(x_{B'}, y_{B'})$, $\Gamma'(x_{\Gamma'}, y_{\Gamma'})$.

Γ' διαιρεί το AB σε λόγο $\frac{\lambda}{\kappa}$ άρα $x_{\Gamma'} = \frac{\kappa x_\Gamma + \lambda x_B}{\kappa+\lambda}$ και $y_{\Gamma'} = \frac{\kappa y_\Gamma + \lambda y_B}{\kappa + \lambda}$.

Αναζητώ σημείο P του ΓΓ' ώστε να το διαιρεί σε λόγο $\left(\frac{\kappa+\lambda}{\mu}\right)$, $P(x_P, y_P)$. όπου $x_P = \frac{\mu x_\Gamma + (\kappa+\lambda)x_{\Gamma'}}{\mu + (\kappa+\lambda)}$, $y_P = \frac{\mu y_\Gamma + (\kappa+\lambda) y_{\Gamma'}}{\mu + (\kappa+\lambda)}$.

αλλά $x_P = \frac{\kappa x_A + \lambda x_B + \mu x_\Gamma}{\kappa+\lambda+\mu}$, και $y_P = \frac{\kappa y_A + \lambda y_B + \mu y_\Gamma}{\kappa+\lambda+\mu}$.

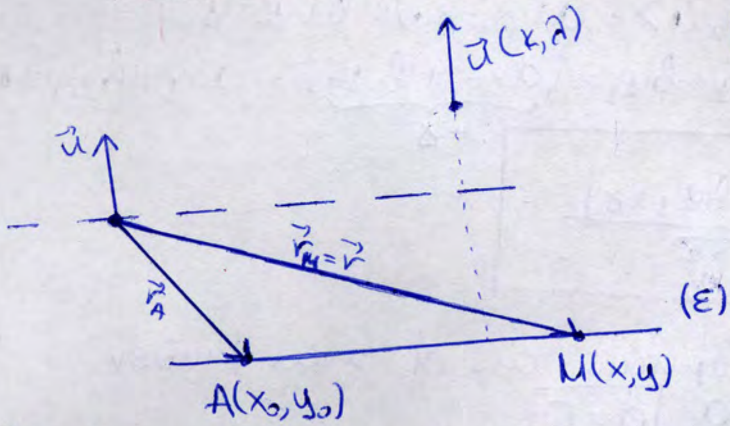
Το P ανήκει και στις τρεις

14/5

Ευθεία στο Επίπεδο (Εφαρμογές)

(1)
(Oxy)

$|\kappa|+|\lambda| \neq 0$



(?) (ε): Που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στο $\vec{u}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AM}\perp\vec{u}\\ (\vec{r}-\vec{r}_A)\perp\vec{u}\end{array}\right\} \Rightarrow \langle \vec{r}-\vec{r}_A, \vec{u}\rangle = 0$$

$\langle \vec{r},\vec{u}\rangle = (\langle \vec{r}_A,\vec{u}\rangle)$ $\rightsquigarrow$ Συντεταγμένες:

$\langle \vec{r},\vec{u}\rangle =$ σταθ.

Αν $\vec{r}-\vec{r}_A=(x-x_0, y-y_0)$

$\vec{u}=(\kappa,\lambda)$ τότε:

$$\langle (x-x_0, y-y_0), (\kappa,\lambda)\rangle = 0$$

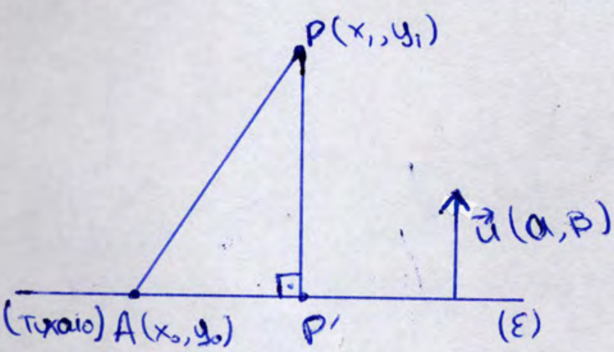
$$\Rightarrow \kappa\cdot(x-x_0)+\lambda(y-y_0)=0$$

$$\Rightarrow \kappa x+\lambda y+\underbrace{(-\lambda y_0-\kappa x_0)}_{\mu}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\kappa x+\lambda\mu+\mu=0},\ |\kappa|+|\lambda|\neq 0$$

$$\vec{u}\perp(\varepsilon),\ \vec{u}(\kappa,\lambda)$$

• Απόσταση Σημείου Από Ευθεία στο Επίπεδο:



Λύση: $(\varepsilon): \alpha x+\beta y+\gamma=0$

$|\alpha|+|\beta|\neq 0$

$d(P,(\varepsilon))=$;; / Ζητείται $\|PP'\|=$?

$\vec{PP'} \parallel \vec{u}=(\alpha,\beta)\perp(\varepsilon)$

$$d = \|\text{prob}_{\vec{u}} \vec{AP}\| = \left\| \frac{\langle \vec{AP}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} \right\| = |\langle \vec{AP}, \vec{u} \rangle| \,/\, \|\vec{u}\|$$

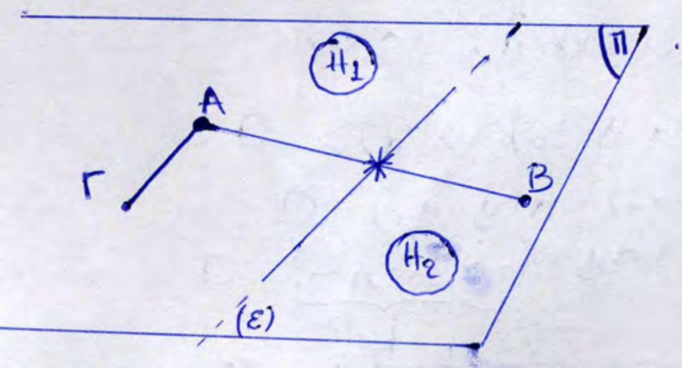
$$\left.\begin{array}{l} \vec{AP} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \\ \vec{u}(a, b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \langle \vec{AP}, \vec{u} \rangle = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = \\ = a x_1 + b y_1 - \underbrace{(a x_0 + b y_0)}_{-\gamma} = a x_1 + b y_1 + \gamma \end{array}$$

$$\boxed{d = \frac{|a x_1 + b y_1 + \gamma|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|a x_1 + b y_1 + \gamma|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

- Όταν το $P \in (\varepsilon) \Rightarrow$ ο αριθμητής της d είναι μηδέν άρα $\boxed{d = 0}$

- Η Έννοια του Ημιεπιπέδου:

(i) Γεωμετρικά - Εποπτικά : • $(\varepsilon) \subset (\Pi)$. Τότε η (ε) ορίζει δύο ημιεπίπεδα (στο επίπεδο (Π)) ώστε η μετάβαση από το ένα στο άλλο να περνάει αναγκαστικά από την (ε).



(ii) Πώς αλγεβροποιείται;

$$\Downarrow$$

$$A, \Gamma \begin{cases} \text{στο ίδιο μέρος} \\ \text{εκατέρωθεν } A, B \end{cases}$$

1η μερική απάντηση:

$ax + by + \gamma = 0$, $(Oxy) : \mathcal{E}$

$f : \underset{(\text{επίπεδο})}{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = ax + by + \gamma$

$f^{-1}(\{0\}) =$ ευθεία (ε)

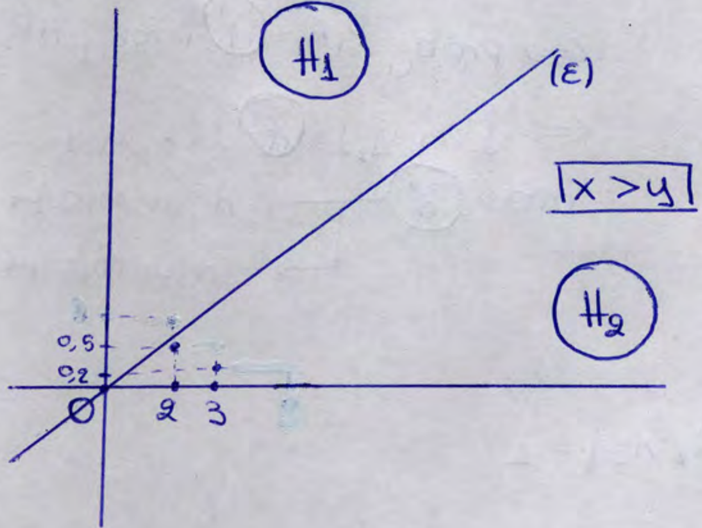
$H_1 = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid f(x, y) > 0\}$

$H_2 = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid f(x, y) < 0\}$

$H_1 \cap H_2 = \emptyset \rightsquigarrow$ η ευθεία $(\varepsilon) \not\subset (H_1)$ $\boxed{\text{και}}$ $(\varepsilon) \not\subset (H_2)$

$H_1 \cup H_2 \cup (\varepsilon) = \mathcal{E}$

Παράδειγμα:



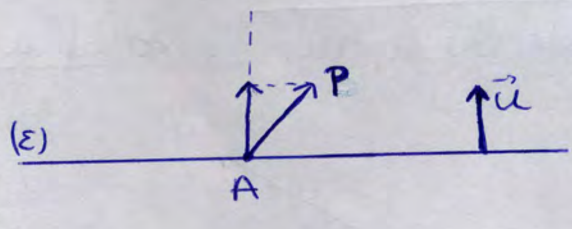
(ε): $x-y=0$

Τα H_1 και H_2 τα βρίσκω "δοκιμάζοντας" $\boxed{\text{ένα}}$ μόνο σημείο.

Ερώτημα: Πρέπει να πούμε τι σημαίνει προς το ίδιο μέρος και εκατέρωθεν.

Αν $P(x,y)$, $A(x_0,y_0)\in(\varepsilon)$, $\vec{u}(\alpha,\beta)$

$$f(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma=\frac{\langle \vec{AP},\vec{u}\rangle}{\|\vec{u}\|}$$



$$\langle \vec{AP},\vec{u}\rangle=\|\vec{AP}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot \text{συν}(\vec{AP},\vec{u})$$

$$f(x,y)>0 \Leftrightarrow \text{prob}_{\vec{u}}\vec{AP}\uparrow\uparrow\vec{u}$$

$$f(x,y)<0 \Leftrightarrow \text{prob}_{\vec{u}}\vec{AP}\uparrow\downarrow\vec{u}$$

$P_1(x_1,y_1)\notin(\varepsilon)$
$P_2(x_2,y_2)\notin(\varepsilon)$
- P_1,P_2: στο ίδιο μέρος της (ε)
- P_1,P_2: εκατέρωθεν της (ε)

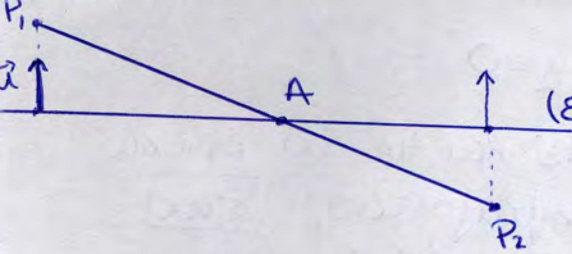
$\Longrightarrow$ Θεωρώ την παράσταση:

$$\frac{f(x_1,y_1)}{f(x_2,y_2)}=\frac{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma}{\alpha x_2+\beta y_2+\gamma}$$

- $>0 \Leftrightarrow$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο
- $<0 \Leftrightarrow$ βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα

Τι άλλο μπορεί να καθορίσει η παράσταση;

$$\frac{f(x_1,y_1)}{f(x_2,y_2)}=(P_1P_2A)$$ = (σχετίζεται με τον απλό λόγο των P_1, P_2 και A)



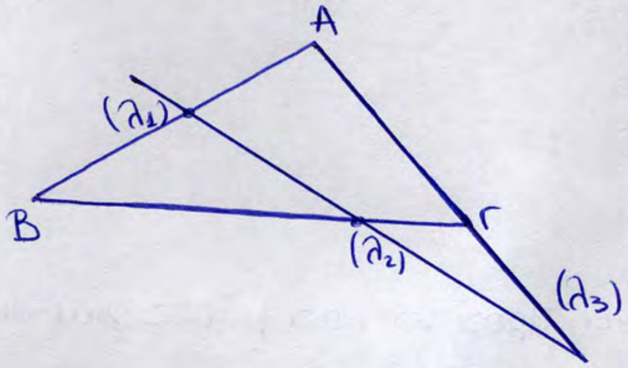
$$(P_1P_2A)=\lambda \iff \vec{P_1A} = \lambda^* \cdot \vec{AP_2}$$

$$\iff \text{prob}_{\vec{u}}\, \vec{P_1A} = \lambda^* \cdot \text{prob}_{\vec{u}}\, \vec{AP_2}$$

$$\iff f(x_1,y_1)=\lambda^* \cdot f(x_2,y_2)$$

όπου λ^* → λ, αν πάρουμε $\vec{P_2A}$
→ $-\lambda$, αν πάρουμε $\vec{AP_2}$

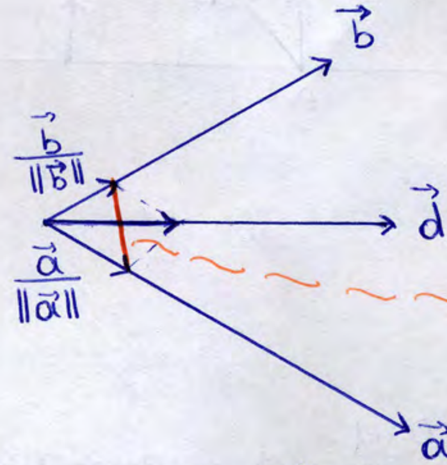
• ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1):



$$|\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3|=1$$

• ΕΦΑΡΜΟΓΗ (2):

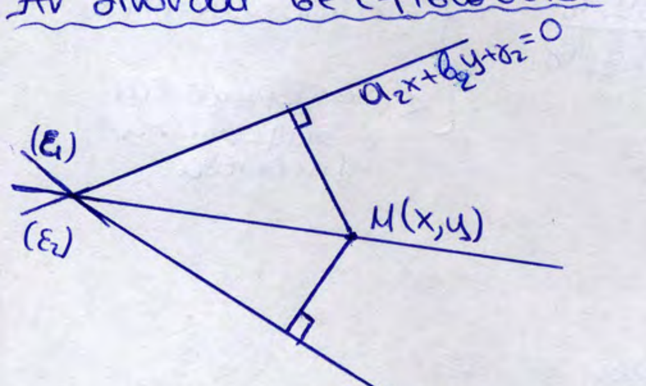
Η διεύθυνση των "διχοτόμων"?



$$\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}+\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right) \parallel \text{διχοτόμο}$$

$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}-\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$: η άλλη διχοτόμος

Αν δίνονται σε εξισώσεις:



$\boxed{d(M,(\varepsilon_1))=d(M,(\varepsilon_2))}$ (Ιδιότητα διχοτόμων)

(Τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι μοναδιαία)

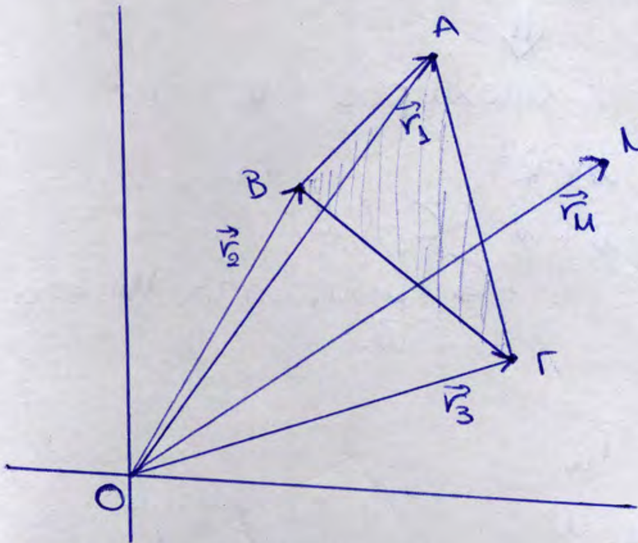
$$\frac{|a_1x+b_1y+\gamma_1|}{|a_2x+b_2y+\gamma_2|}=1$$

$$\left.\begin{aligned}(\delta_1)&: a_1x+b_1y+\gamma_1=a_2x+b_2y+\gamma_2\\(\delta_2)&: a_1x+b_1y+\gamma_1=-(a_2x+b_2y+\gamma_2)\end{aligned}\right\}$$

Το ποια ακριβώς είναι εσωτερική ή εξωτερική διχοτόμος προκύπτει από τα ημιεπίπεδα (το βρίσκω "δοκιμάζοντας")

Άσκηση: Στο επίπεδο δίνονται 3 μη συνευθειακά σημεία.

Ν.α.ο. $\vec{r}_M = k\cdot\vec{r}_1 + \lambda\cdot\vec{r}_2 + \mu\cdot\vec{r}_3$, $k+\lambda+\mu=1$



- Τα k, λ, μ ονομάζονται βαρυκεντρικές συντεταγμένες.
- Ειδικά αν M: κέντρο βάρους $\boxed{k=\lambda=\mu=\frac{1}{3}}$

Απόδειξη: Θεωρούμε $(A, \{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}\})$: νέο σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A\\ \vec{A\Gamma}=\vec{r}_\Gamma-\vec{r}_A\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AM}=\rho\cdot\vec{AB}+\sigma\cdot\vec{A\Gamma}, \quad \boxed{\rho, \sigma : \text{ΜΟΝΑΔΙΚΑ}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AO}+\vec{OM}=\rho\cdot\vec{AB}+\sigma\cdot\vec{A\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_M=\vec{r}_1+\rho\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\sigma\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_M=\vec{r}_1+\rho\cdot\vec{r}_2-\rho\cdot\vec{r}_1+\sigma\cdot\vec{r}_3-\sigma\cdot\vec{r}_1=\underbrace{(1-\rho-\sigma)}_{k}\vec{r}_1+\underbrace{\rho}_{\lambda}\cdot\vec{r}_2+\underbrace{\sigma}_{\mu}\cdot\vec{r}_3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_M=k\cdot\vec{r}_1+\lambda\cdot\vec{r}_2+\mu\cdot\vec{r}_3}$$

$k+\lambda+\mu=1$, αφού τα k,λ,μ $\quad k=1-(\lambda+\mu)$

$\lambda=\rho$

$\mu=\sigma$

Συντεταγμένες των:

$A(1,0,0)$

$B(0,1,0)$

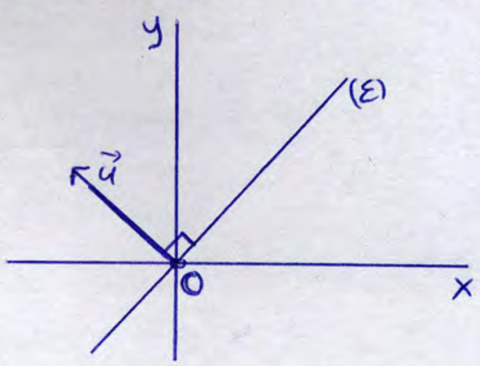
$\Gamma(0,0,1)$

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ Oxy.

- Πότε μια ευθεία είναι υπόχωρος?

(↳ Πρέπει να διέρχεται από το **O**.)

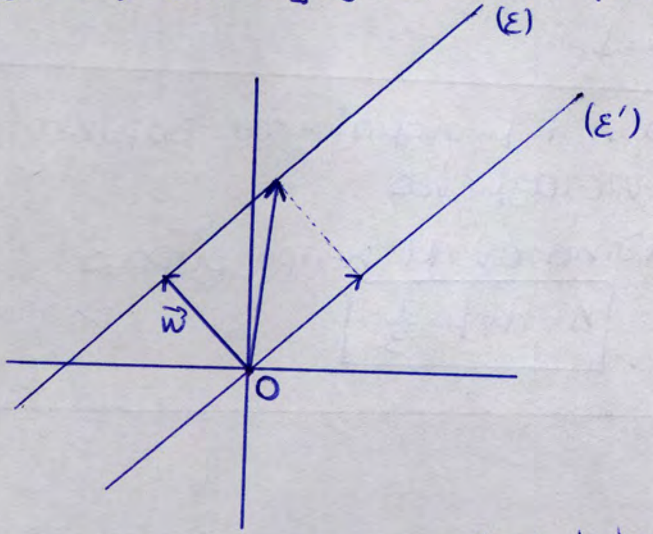
Για να μιλάω για υπόχωρο πρέπει να έχω διανυσματικό χώρο άρα σταθεροποιημένη αρχή (Oxy).



Αφού είναι υπόχωρος περιέχει την αρχή O, άρα $ax+by=0$, $|a|+|b|\neq 0$

$\vec{u}(a,\beta)\perp(\varepsilon)$

• Αν $\gamma \neq 0$, $ax+by+\gamma=0$ είναι μεταφορά υποχώρου (σύμπλεγμα).



• (ε') // (ε) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

$\Downarrow$

(ε') : υπόχωρος , $W = \langle \vec{u} \rangle$

• Έστω $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$

$W_{\vec{w}} = \vec{w} + W = T_{\vec{w}}(W)$

Η μεταφορά του W κατά $\vec{w}$.

• Η (ε) είναι εικόνα της (ε') μέσω της $T_{\vec{w}}$

• Το $\vec{w}$ δεν είναι ΜΟΝΑΔΙΚΟ $w_1 + W = w_2 + W$

$\Updownarrow$

$(w_1 - w_2) \in W$

• $T_{\vec{w}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

• $T_{\vec{w}}(x,y) = (x+w_1, y+w_2)$, $\vec{w} = (w_1, w_2)$

• Οι ευθείες δεν είναι υπόχωροι είναι μονοδιάστατα σύμπλοκα δηλαδή μεταφορές υποχώρων εκτός και αν περνάνε από το O.

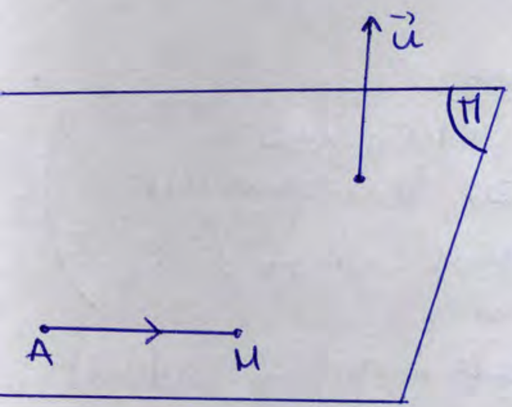
15/5

(1) $\vec{r}=\vec{r}_A+t\cdot$, $t\in\mathbb{R}$ ⇝ εξαρτάται από μια παράμετρο (t)

(2) $\left.\begin{matrix} ax+by+\gamma=0 \\ |a|+|b|\neq 0 \end{matrix}\right\}(Oxy)$ ⇝ γραμμικό αντικείμενο 1ου βαθμού δεν εξαρτάται από κάποια παράμετρο

Το ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΤΟ ΧΩΡΟ:

Πρόβλημα: Στο χώρο $(Oxyz)$ δίνονται σημείο $A(x_A,y_A,z_A)$ και διάνυσμα $\vec{u}(a,\beta,\gamma)$ με $|a|+|\beta|+|\gamma|\neq 0$. Ζητείται το επίπεδο που διέρχεται από το A και είναι κάθετο (ορθογώνιο) στο $\vec{u}$.



· Πρέπει να προσδιορίσουμε το (Π)

Αν M τυχαίο σημείο του επιπέδου,

$\vec{AM}\perp\vec{u} \iff \langle\vec{AM},\vec{u}\rangle=0$

$(\Pi)\leftrightarrow\{M \mid \langle\vec{AM},\vec{u}\rangle=0\}$

↳ Τι μορφές μπορεί να πάρει αυτή η σχέση;

Αν $\vec{r}_A$: διανυσματική ακτίνα του A

$\vec{r}_M$: — // — — // — του M

$\vec{r}_A,\vec{r}_M\equiv\vec{r},\vec{u}$

$\langle\vec{r}_M-\vec{r}_A,\vec{u}\rangle=0 \iff \langle\vec{r},\vec{u}\rangle=\langle\vec{r}_A,\vec{u}\rangle$ (δοσμένο και σταθερό)

① $\langle\vec{r},\vec{u}\rangle=R=$ σταθερό επίπεδο (εν γένει παριστάνει επίπεδο στο χώρο)

$$\left.\begin{matrix}\vec{r}(x,y,z)\\ \vec{r}_A(x_A,y_A,z_A)\\ \vec{u}(a,\beta,\gamma)\end{matrix}\right\} \overset{①}{\Rightarrow} ax+by+\gamma z=\underbrace{(ax_A+by_A+\gamma z_A)}_{-\delta} \iff \boxed{\begin{matrix} ax+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ |a|+|\beta|+|\gamma|\neq 0\end{matrix}}$$

→ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ισχύει και το αντίστροφο του προβλήματος $(\Leftarrow)$

Μια σχέση της μορφής $ax+\beta y+\gamma z+\delta=0$, $|a|+|\beta|+|\gamma|\neq 0$ παριστάνει επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα $\vec{u}(a,\beta,\gamma)$.

Απόδειξη: Έστω (x_0,y_0,z_0) σημείο που ικανοποιεί την σχέση για κάθε άλλο σημείο (x,y,z) $ax+\beta y+\gamma\cdot z+\delta=ax_0+by_0+\gamma z_0+\delta=0$

$\iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0$

$\iff \langle(a,\beta,\gamma),(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\rangle=0$

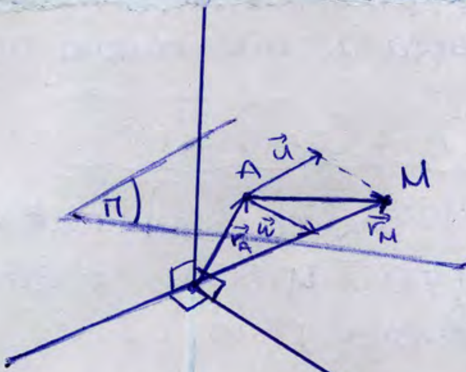
$\iff \langle\vec{u},\vec{r}-\vec{r}_A\rangle=0 \iff$ επίπεδο!

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ:

Το επίπεδο παράγεται από 2 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{u},\vec{w}$ άρα

$$\left.\begin{matrix}\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM} \iff \vec{r}=\vec{r}_A+\vec{AM} \\ \vec{AM}=t\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{w},\ t,s\in\mathbb{R} \Rightarrow \vec{r}=\vec{r}_A+t\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{w},\ t,s\in\mathbb{R} \\ \vec{u}=(a,b,\gamma),\ \vec{w}=(a',\beta',\gamma')\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t\cdot\alpha + s\cdot\alpha' \\ y = y_A + t\cdot\beta + s\cdot\beta' \\ z = z_A + t\cdot\gamma + s\cdot\gamma' \end{array} \right\} (\Pi) \rightsquigarrow \text{Παραμετρική Παράσταση}$$



Απαλοιφή των παραμέτρων $\Rightarrow$ αναλυτική εξίσωση.

$$\left.\begin{array}{l} (x_A - x)\cdot 1 + \alpha t + \alpha' s = 0 \\ (y_A - y)\cdot 1 + \beta t + \beta' s = 0 \\ (z_A - z)\cdot 1 + \gamma\cdot t + \gamma' s = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

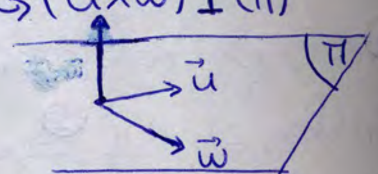
(Το βλέπω σαν ομογενές γραμμικό (3x3) που δέχεται μη μηδενική λύση: det( ) = 0)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \kappa\cdot x + \lambda y + \mu\cdot z + \nu = 0$$

(ανάπτυγμα ως προς $1^{η}$-γραμμή)

↳ Απαλοιφούσα

$(\kappa, \lambda, \mu) = ? \rightsquigarrow (\vec{u}\times\vec{w}) \perp (\Pi)$



$A(x_A, y_A, z_A)$, $\vec{u}, \vec{w} \parallel (\Pi)$

$\vec{u} \to (\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{w} \to (\alpha', \beta', \gamma')$

• Στην γεωμετρία ότι περιγράφεται με 2 παραμέτρους ανήκει στις "επιφάνειες" $\Rightarrow$ "Επίπεδο" $\subset$ "Επιφάνεια" (Το κοινό σημείο είναι ότι και οι 2 έννοιες περιγράφονται με 2 παραμέτρους)

<u>Άσκηση:</u> $4x + 2y + 3z + 4 = 0 \quad (\Pi)$

? Μια παραμετρική παράσταση.

<u>$1^{ος}$ τρόπος:</u> Παίρνουμε τυχαίο σημείο $A(0,-2,0) \in (\Pi)$ και $\vec{\ell}(1,2,3) \perp (\Pi)$

$$\left.\begin{array}{l} (\Pi) \parallel \vec{u} = (0,-3,2) \perp \vec{\ell} \\ (\Pi) \parallel \vec{w} = (-2,1,0) \perp \vec{\ell} \\ \{\vec{u}, \vec{w}\} \text{ γραμμικά ανεξάρτητα} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_A + t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{w}$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος:</u> Λύνω ως προς μια μεταβλητή: $x = -4 - 2y - 3z$ και περιγράφω το (x, y, z):

$$(x,y,z) = (-4-2y-3z, y, z) = \underbrace{(-4,0,0)}_{A} + \underbrace{(-2,1,0)}_{\vec{u}} y + \underbrace{(-3,0,1)}_{\vec{w}} z =$$

$=(-4,0,0)+y\cdot\vec{u}+z\cdot\vec{w},\ \ y,z\in\mathbb{R}$

$\vec{r}=\vec{r}_A+y\vec{u}+z\vec{w}\ ,\ y,z\in\mathbb{R}$

$\vec{u},\vec{w}\perp\vec{l}$ και $\{\vec{u},\vec{w}\}$ γραμμικά ανεξάρτητα (όπου $\vec{l}=(1,2,3)$)

Αν πάρε $W=\mathcal{L}(\{\vec{u},\vec{w}\})$ $\quad$ ($W=\mathcal{L}\{\vec{u},\vec{w}\}=\mathcal{L}\{\vec{u}',\vec{w}'\}$)

$\vec{c}+W\longleftrightarrow(\Pi)$: Μεταφορά Δισδιάστατου Υποχώρου

$\vec{c}\,'+W\longleftrightarrow(\Pi)$

$(\vec{c}-\vec{c}\,')\in W$

Άσκηση: Εξίσωση επιπέδου από 3 (μη συνευθειακά) σημεία

$A(x_A,y_A,z_A)$

$B(x_B,y_B,z_B)$

$\Gamma(x_\Gamma,y_\Gamma,z_\Gamma)$

? $(\Pi)=(A,B,\Gamma)$

1ον) $\vec{AB},\vec{A\Gamma}$: γραμμικά ανεξάρτητα

2ον) $\vec{l}=\vec{AB}\times\vec{A\Gamma}$, $\vec{l}\perp\vec{A\Gamma},\vec{AB}$, $\vec{l}\neq\vec{0}$

3ον) $A,\vec{l}$ καθορίζουν ένα επίπεδο

$\vec{r}=\vec{r}_A+s\cdot\vec{AB}+t\cdot\vec{A\Gamma}$

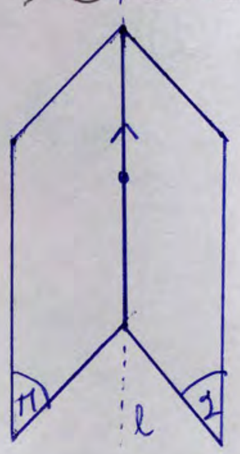
(σε αναλυτική μορφή;;)

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_\Gamma-x_A & y_\Gamma-y_A & y_\Gamma-y_A \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & z_\Gamma & 1 \end{vmatrix}=0}_{\text{Τελική Απάντηση}}$$

($(3\times3)\Rightarrow$ ευθεία
$(4\times4)\Rightarrow$ επίπεδο)

ΤΟΜΗ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ:

1ος τρόπος:



Γεωμετρικά: πρέπει να περιγράψω μία ευθεία στο χώρο [σημείο και διεύθυνση]

$\downarrow$

$\vec{r}=\vec{r}_A+t\cdot\vec{u}$

[σημείο → σημείο της τομής
Διεύθυνση → Διεύθυνση της τομής →
→ 2 σημεία της τομής]

$2^{ος}$ τρόπος: $(\Pi)\perp\vec{u}$, $(\Sigma)\perp(\vec{w})$, $\boxed{(\Pi)\cap(\Sigma)\parallel\vec{u}\times\vec{w}}$ (Παρατήρηση!!)

Αναλυτική Λύση:

$$\left(\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ \underbrace{2x+3y+z=7} \end{array}\right) \quad (\text{Τομή})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Άρα μπορώ να βρω 2 αγνώστους και ο $3^{ος}$ ελεύθερος!

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x+y=4-z \\ 2x+3y=7-z \end{array}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4-z & 1 \\ 7-z & 3 \end{vmatrix}}{1}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-z \\ 2 & 7-z \end{vmatrix}}{1}$$

$$x = 3(4-z)-(7-z) = 12-3z-7+z = \underline{\underline{5-2z}}$$

$$y = (7-z)-2(4-z) = 7-z-8+2z = \underline{\underline{z-1}}$$

$$(x,y,z) = (5-2z, -1+z, z), \quad z\in\mathbb{R}$$

$$= \underbrace{(5,-1,0)} + \underbrace{(-2,1,1)}z, \quad z\in\mathbb{R}$$

Ευθεία $\begin{cases} \text{διέρχεται από } (5,-1,0) \\ \parallel (-2,1,1) \end{cases}$

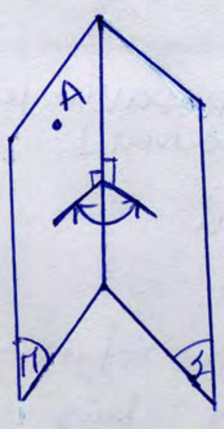
Μια άλλη μορφή των λύσεων:

$$\left(\begin{array}{l} x-5=-2z \\ y+1=z \\ z=z \end{array}\right) \quad \underbrace{\frac{x-5}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-0}{1}}$$

όπου $(5,-1,0)$ ~ σημείο της ευθείας, $(-2,1,1)\parallel(\varepsilon)$

$$\frac{x-x_0}{\kappa}=\frac{y-y_0}{\lambda}=\frac{z-z_0}{\mu} \quad (\kappa,\lambda,\mu\neq 0)$$

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ:



$(\Pi)\leftrightarrow(A,\vec{u})$, $\vec{u}\perp(\Pi)$, $A\in(\Pi)$

$(\Sigma)\leftrightarrow(B,\vec{w})$, $\vec{w}\perp(\Sigma)$, $B\in(\Sigma)$

Υπολογίζω $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$

$$\cos(\vec{u},\vec{w})=\frac{\langle\vec{u},\vec{w}\rangle}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{w}\|}$$

$$(\Pi)\perp(\Sigma)\Longleftrightarrow\langle\vec{u},\vec{w}\rangle=0$$

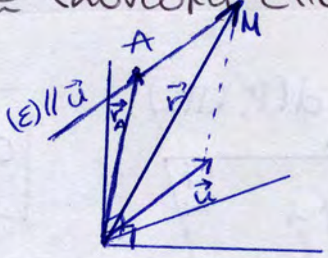
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ (Σύντομη Επανάληψη)

(1) ΕΥΘΕΙΕΣ:

$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_A+t\cdot\vec{u}}$

(διανυσματική μορφή)

↳ 1-παράμετρος



• Άλλες Μορφές:

$$\vec{u}(\kappa,\lambda,\mu)\quad\left\{\begin{aligned} x&=x_A+t\cdot\kappa\\ y&=y_A+t\cdot\lambda\\ z&=z_A+t\cdot\mu\end{aligned}\right\}$$

(αναλυτική μορφή)

αν $\kappa,\lambda,\mu\neq 0$: $\boxed{\dfrac{x-x_A}{\kappa}=\dfrac{y-y_A}{\lambda}=\dfrac{z-z_A}{\mu}}$

(2) ΕΠΙΠΕΔΟ:

• Από 3 σημεία:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A\\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A\\ x_\Gamma-x_A & y_\Gamma-y_A & z_\Gamma-z_A\end{vmatrix}=0\iff\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_A & y_A & z_A & 1\\ x_B & y_B & z_B & 1\\ x_\Gamma & y_\Gamma & z_\Gamma & 1\end{vmatrix}=0$$

• $(\Pi)\perp\vec{\ell}(\alpha,\beta,\gamma)$, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\neq 0$

$\boxed{\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0}$

• Διέρχεται από το $A(x_A,y_A,z_A)$ και είναι $\parallel$ προς $\vec{u},\vec{w}$

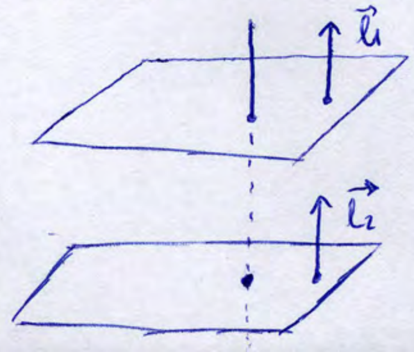
$$\left\{\begin{aligned} &\vec{\ell}=\vec{u}\times\vec{w}\Rightarrow\ldots\\ &\boxed{\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{u}+s\vec{w}},\ t,s\in\mathbb{R}\rightsquigarrow 2\text{-παράμετροι}\end{aligned}\right.$$

• Τομή Επιπέδων (Π) και (Σ), $(\Pi)\perp\vec{\ell}_1$ και $(\Sigma)\perp\vec{\ell}_2\Rightarrow$

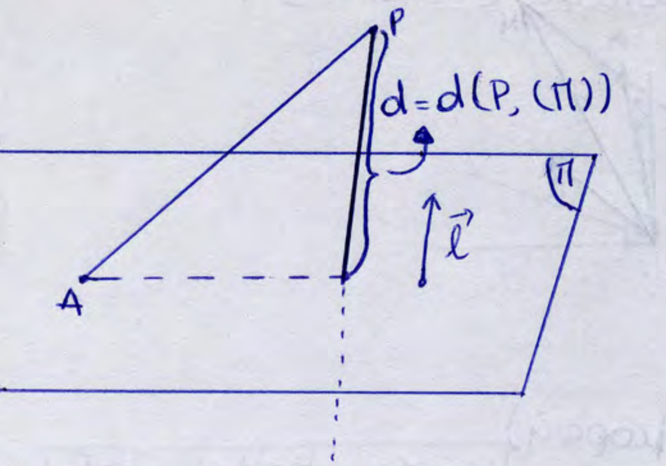
$\Rightarrow(\Pi)\cap(\Sigma)\parallel\vec{\ell}_1\times\vec{\ell}_2$

• Η γωνία των (Π) και (Σ) σχετίζεται με την $(\widehat{\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2})$

• $(\Pi)\parallel(\Sigma)\iff\vec{\ell}_1\parallel\vec{\ell}_2\iff\vec{\ell}_1\times\vec{\ell}_2=\vec{0}$



· Απόσταση Σημείου από Επίπεδο:



$$ax+by+\gamma z+\delta=0$$

$$P(x_0,y_0,z_0)$$

$$\boxed{d(P,(\Pi))=\frac{|ax_0+by_0+\gamma z_0+\delta|}{\sqrt{a^2+b^2+\gamma^2}}}$$

$$d=\|\text{prob}_{\vec{\ell}}\,\vec{AP}\|$$

$$\boxed{\text{prob}_{\vec{x}}\,\vec{y}=\frac{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}\cdot\vec{x}}$$ (Γενικός τύπος)

$A(x_1,y_1,z_1)\longrightarrow ax_1+by_1+\gamma z_1+\delta=0$

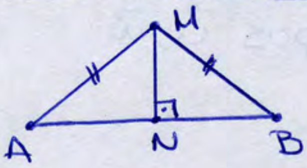
$$\text{prob}_{\vec{\ell}}\,\vec{AP}=\frac{\langle\vec{AP},\vec{\ell}\rangle}{\langle\vec{\ell},\vec{\ell}\rangle}\cdot\vec{\ell}=\frac{\langle(x_0-x_1,\,y_0-y_1,\,z_0-z_1),(a,\beta,\gamma)\rangle}{\|\vec{\ell}\|^2}\cdot\vec{\ell}=$$

$$=\frac{ax_0+by_0+\gamma z_0-\overbrace{(ax_1+by_1+\gamma z_1)}^{-\delta}}{\|\vec{\ell}\|^2}\cdot\vec{\ell}=\frac{ax_0+by_0+\gamma z_0+\delta}{\|\vec{\ell}\|^2}\cdot\vec{\ell}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\|\text{prob}_{\vec{\ell}}\,\vec{AP}\|=\frac{|ax_0+by_0+\gamma z_0+\delta|}{\|\vec{\ell}\|^2}\|\vec{\ell}\|=\frac{|ax_0+by_0+\gamma z_0+\delta|}{\|\vec{\ell}\|}=$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+\gamma z_0+\delta|}{\sqrt{a^2+b^2+\gamma^2}}=d(P,(\Pi))$$

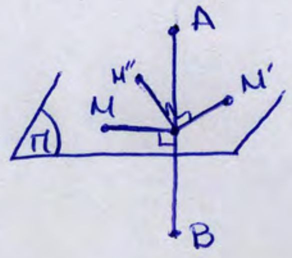
· Το Μεσοκάθετο Επίπεδο:



1η Απόδειξη (Γεωμετρία Λυκείου): Έστω M σημείο $\Rightarrow A\hat{M}B$: ισοσκελές $\Rightarrow \boxed{MN\perp AB}$ Αν N: το μέσον του AB, βρίσκονται σ'ένα επίπεδο (Π) Το μεσοκάθετο επίπεδο.

$\|\vec{AM}\|=\|\vec{MB}\|$

(σημεία που ισαπέχουν από τα άκρα ευθ. τμήματος)



Το (Π) περιέχει όλες τις κάθετες στο μέσο του AB.

2η Απόδειξη (Αναλυτική Αντιμετώπιση):

$\|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\|$

$$(x_A-x)^2+(y_A-y)^2+(z_A-z)^2=(x_B-x)^2+(y_B-y)^2+(z_B-z)^2$$

$$\Leftrightarrow x_A^2-2x_Ax+\cancel{x^2}+y_A^2-2y_Ay+\cancel{y^2}+z_A^2-2z_Az+\cancel{z^2}=x_B^2-2x_Bx+\cancel{x^2}+y_B^2-2y_By+\cancel{y^2}+z_B^2-$$
$$-2z_Bz+\cancel{z^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\underbrace{(z_B-z_A)}_{\gamma}z+2\underbrace{(y_B-y_A)}_{\beta}\cdot y+2\underbrace{(x_B-x_A)}_{\alpha}x+\underbrace{(x_A^2-x_B^2)+(y_A^2-y_B^2)+(z_A^2-z_B^2)}_{2\delta}=0$$

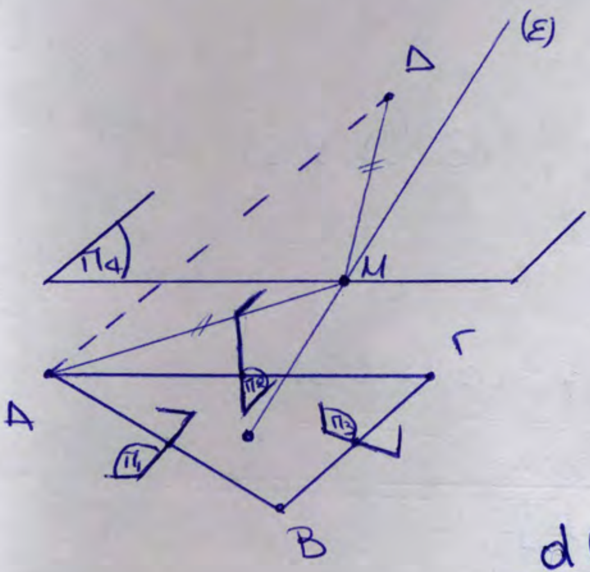
$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0}$$

Επίπεδο: $\to \perp \vec{l}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$
$\to \perp \vec{AB}$

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)\in(\Pi)$$

↳ Μέσον του AB

Άσκηση: Στο χώρο δίνονται 4 σημεία Α, Β, Γ, Δ. Να εξετασθεί αν υπάρχει σημείο του χώρου που να ισαπέχει από τα Α, Β, Γ, Δ.



$d(M,A)=d(M,B)\Rightarrow M\in(\Pi_1)$ (Μεσοκάθετος Α και Β)

$d(M,\Gamma)=d(M,A)\Rightarrow M\in(\Pi_2)$ (Μεσοκάθετος Α και Γ)

$d(M,B)=d(M,\Gamma)\Rightarrow M\in(\Pi_3)$ (Μεσοκάθετος Β και Γ)

$(\Pi_1), (\Pi_2), (\Pi_3)$: 3 επίπεδα στο χώρο ανά 2 τέμνονται

Αυτά τα 3 επίπεδα έχουν τομή μια ευθεία κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$.

$d(M,A)=d(M,\Delta)$, $(\Pi_4)\cap(\varepsilon)\equiv M$

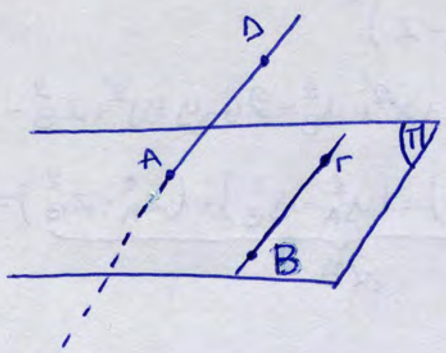
$\boxed{\exists!\text{ σημείο } M}$

- **Ασύμβατες ευθείες στο χώρο:**

$(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$: ασύμβατες αν δεν υπάρχει επίπεδο που να τις περιέχει

↳ $\exists$ουν ασύμβατες ευθείες;;

1ος ΤΡΟΠΟΣ:



(Π): επίπεδο $\xRightarrow{\text{Μοναδικό}}$ Α, Β, Γ: μη συνευθειακά

Δ: εκτός (Π)

ΒΓ, ΑΔ: ασύμβατες

2ος τρόπος: (Αναλυτικά)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \vec{r}=\vec{r}_A+t\cdot\vec{u}\\(2)\ \vec{r}=\vec{r}_B+s\cdot\vec{v}\end{array}\right\}(2)$$

(∃ $\vec{u},\vec{v},\vec{r}_A,\vec{r}_B$ ώστε το (2) να είναι αδύνατο?)

Στο παραπάνω σχήμα (1ος τρόπος): $\vec{u}=\vec{A\Delta}$ και $\vec{v}=\vec{B\Gamma}$

(Επίλυση του ερωτήματος με παράδειγμα):

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1} \quad (1)$$

π.χ) Διέρχεται από το O(0,0,0) και είναι // με το (1,1,1)

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5} \quad (2)$$

Διέρχεται από το (1,0,0) και είναι // με το (2,3,5)

Να εξετάσετε την σχετική τους θέση:

- ΔΕΝ είναι παράλληλες $[(1,1,1) \nparallel (2,3,5)]$
- Θα ελέγξω αν ∃ κοινό σημείο.

Λύση: του πρώτου (x,y,z), $x=y=z\in\mathbb{R}$

$\hookrightarrow (t,t,t)$ (Λύση του 1ου παραδείγματος)

$$\frac{t-1}{2}=\frac{t}{3}=\frac{t}{5} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}t=3\\3=5\rightsquigarrow \text{ΑΤΟΠΟ!}\end{array}\right\}$$

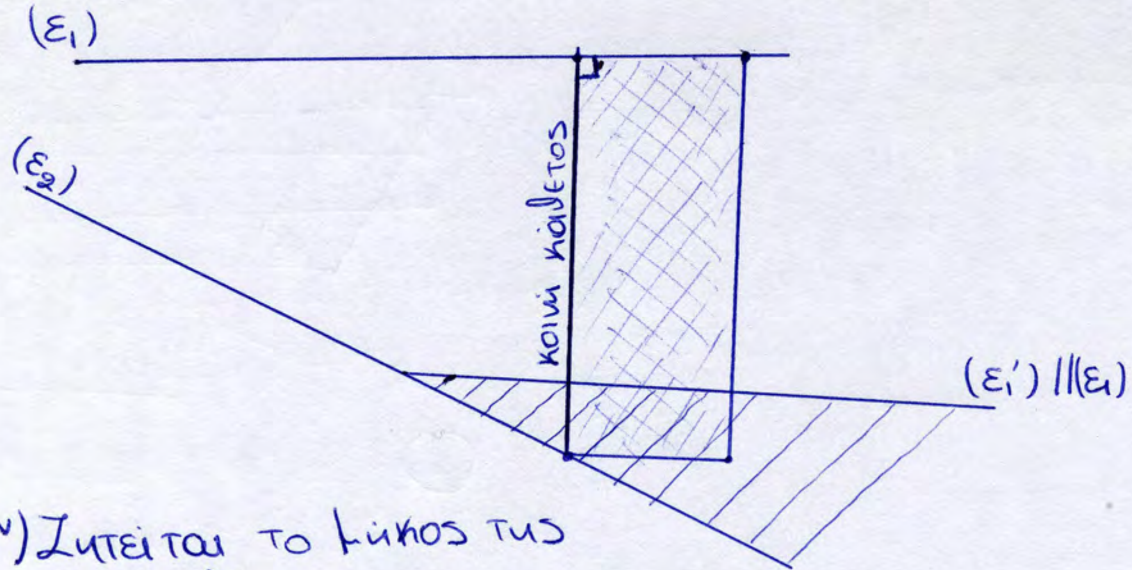
Άρα δεν υπάρχει καμία λύση του (1) που να ικανοποιεί την (2).

Τελικά ∄ κοινό σημείο άρα είναι ασύμβατες!

· Απόσταση 2 ασυμβάτων:

1ος τρόπος:

1ον) $\exists$ κοινό κάθετο τμήμα των 2 ασυμβάτων!
Αυτό "κατασκευάζεται"



2ον) Ζητείται το μήκος της κοινής καθέτου.

2ος τρόπος (Αναλυτική Γεωμετρία):

$\vec{r}_1 = \vec{r}_A + t \cdot \vec{u}$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_B + s \cdot \vec{v}$

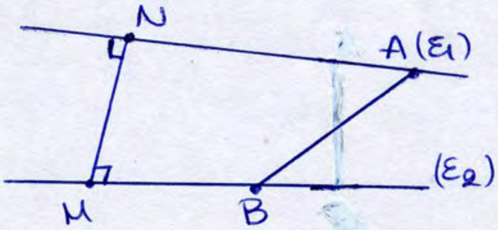
$\vec{MN} \parallel (\vec{u} \times \vec{v})$ $[\perp (\varepsilon_1), (\varepsilon_2)]$

$\|\vec{MN}\| = \|prob_{\vec{u}\times\vec{v}} \vec{AB}\|$

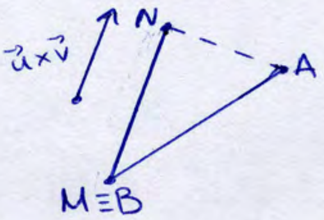
$$prob_{\vec{u}\times\vec{v}} \vec{AB} = \frac{\langle \vec{AB}, \vec{u}\times\vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}\times\vec{v}, \vec{u}\times\vec{v} \rangle} (\vec{u}\times\vec{v})$$

$$\Rightarrow \|\vec{MN}\| = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{u}\times\vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2} \cdot \|\vec{u}\times\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{MN}\| = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{u}\times\vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}$$



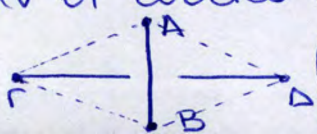
μετακινώ τα διανύσματα με κοινή αρχή B≡M



$\vec{AB} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$ / $A \in (\varepsilon_1)$, $B \in (\varepsilon_2)$

Αν $\|\vec{MN}\| = 0 \Rightarrow$ οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται!

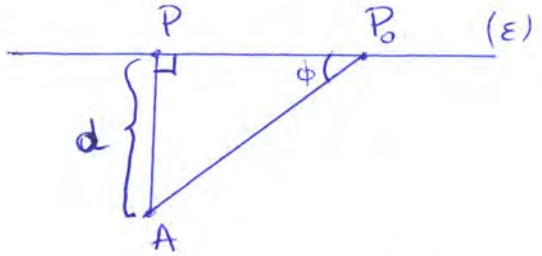
ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο ευθύγραμμα τμήματα ονομάζονται ασυμβάτως κάθετα αν οι ευθείες που ορίζουν είναι $\left\{ \begin{array}{c} \text{ασύμβατες} \\ \text{και} \\ \text{ορθογώνιες} \end{array} \right\}$



(ΑΒ, ΓΔ: όχι συνεπίπεδα και $AB \perp_{ορθ} ΓΔ$)

19/5

· Απόσταση σημείου από ευθεία στο ΧΩΡΟ:



$d(A,(\varepsilon))=;;$

1º βήμα: $\exists\, P\in(\varepsilon):(AP)\perp(\varepsilon)$

[Το P υπάρχει και είναι η τομή του επιπέδου (Π) (που διέρχεται από το A και είναι κάθετο στην (ε)) και της (ε)]

2º βήμα: Έστω $P_0\in(\varepsilon)$ (⤳ τυχαίο)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{P}P_0$ το $d=\|\vec{AP_0}\|\cdot \eta\mu(\vec{AP_0},\vec{PP_0})$, $\eta\mu(\vec{AP_0},\vec{PP_0})>0$

(αφού η γωνία είναι μέχρι 180°) ⤳ ($0<\hat{\varphi}<180^\circ$)

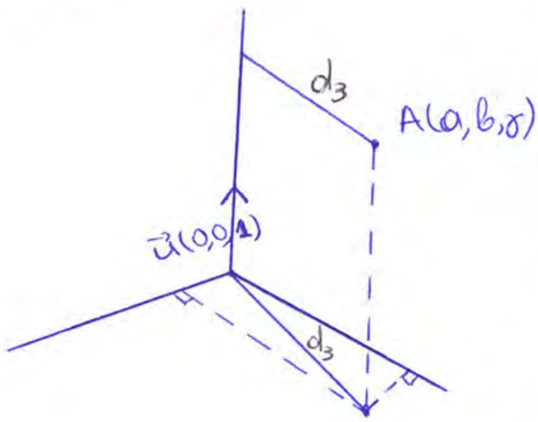
$(\varepsilon)\rightarrow \vec{r}=\vec{r}_{P_0}+t\vec{u}$, $\vec{u}\parallel\vec{PP_0}$

$$d=\|\vec{AP_0}\|\cdot\eta\mu(\vec{AP_0},\vec{u})=\frac{\|\vec{AP_0}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\eta\mu(\vec{AP_0},\vec{u})}{\|\vec{u}\|}=\frac{\|\vec{AP_0}\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=$$

$$=\frac{\|(\vec{r}_{P_0}-\vec{r}_A)\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$ ⤳ υπολογισμός με αρχικά δεδομένα.

2▸ Τετριμένη Εφαρμογή: Oxyz, $A(\alpha,\beta,\gamma)$, d_1,d_2,d_3 τις αποστάσεις του A από τους άξονες Ox, Oy, Oz αντίστοιχα.

$d_3=d(A,Oz)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (πρακτικά)



$d(A,Oz)$

$$\left.\begin{array}{l}A(\alpha,\beta,\gamma)\\ P_0(0,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{r}_{P_0}-\vec{r}_A=(-\alpha,-\beta,-\gamma)$$

$\vec{u}=(0,0,1)$

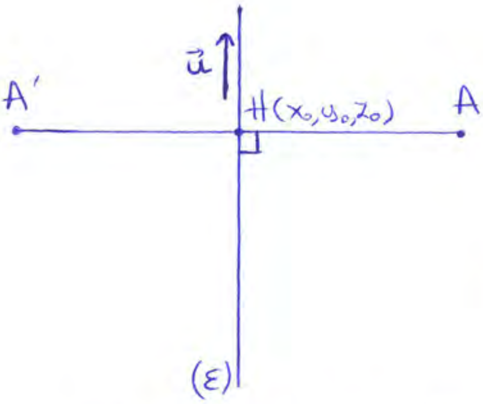
$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\alpha & -\beta & -\gamma\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-\beta,\alpha,0)\Rightarrow|(-\beta,\alpha,0)|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Άσκηση 1:

$(\varepsilon): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$, $A(2,5,6)$ $(\notin (\varepsilon))$

Ζητείται η προβολή του A στην (ε).

Αναδιατύπωση: Ζητείται σημείο H της (ε) ώστε $AH \perp (\varepsilon)$



$AH \perp (\varepsilon)$

$$\begin{cases} H \in (\varepsilon) \iff \frac{x_0-1}{1} = \frac{y_0-2}{2} = \frac{z_0-3}{3} \\ AH \perp (\varepsilon) \iff \langle \vec{AH}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \langle (x_0-2, y_0-5, z_0-6), (1,2,3) \rangle = 0 \end{cases}$$

$(\varepsilon) \parallel \vec{u}(1,2,3)$

$$\iff (x_0-2) + 2(y_0-5) + 3(z_0-6) = 0$$

$$\iff x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 2 + 10 + 18 = 30$$

$$(\Sigma) \begin{cases} \frac{x_0-1}{1} = \frac{y_0-2}{2} = \frac{z_0-3}{3} = t \\ x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 30 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = t+1 \\ y_0 = 2t+2 \\ z_0 = 3t+3 \\ (t+1) + 2(2t+2) + 3(3t+3) = 30 \end{cases}$$

$$\iff t + 4t + 9t + 14 = 30$$

$$\iff 14t = 16$$

$$\iff \boxed{t = \frac{8}{7}} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{15}{7} \\ y_0 = \frac{30}{7} \\ z_0 = \frac{45}{7} \end{cases}$$

Άρα η προβολή είναι:

$$H\left(\frac{15}{7}, \frac{30}{7}, \frac{45}{7}\right)$$

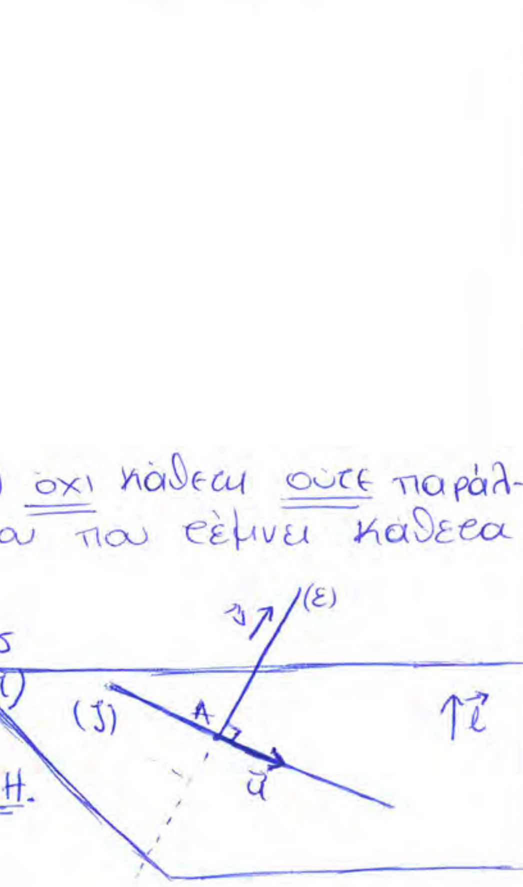
Συμμετρικό A' του A ως προς (ε) ?

Το H είναι το μέσον του AA' άρα:

Έστω $A'(x', y', z')$: το συμμετρικό του A.

$$H\left(\underbrace{\frac{x'+x_A}{2}}_{= x_0}, \underbrace{\frac{y'+y_A}{2}}_{= y_0}, \underbrace{\frac{z'+z_A}{2}}_{= z_0}\right)$$

Άσκηση 2: Δίνονται επίπεδο (Π) κ' ευθεία (ε) όχι κάθετη ούτε παράλληλη στο (Π). Ζητείται ευθεία (ζ) του επιπέδου που τέμνει κάθετα την (ε). (∃(ζ) και πόσες;)



Λύση: Έστω A το ίχνος της (ε) στο (Π) τότε όλες οι κάθετες ευθείες προς την (ε) στο A βρίσκονται σ' ένα επίπεδο (Σ) κάθετο στην (ε) στο σημείο A. Τότε $(\zeta) = (\Pi) \cap (\varepsilon)$ άρα ∃ (ζ) και είναι ΜΟΝΑΔΙΚΗ.

2η Λύση (στην Αναλυτική Γεωμετρία) (Εφαρμογή):

$x+y+z=1\ (\Pi)$
$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+5}{-1}\ (\varepsilon)$
Για να καθορίσω την (ζ) θέλω ένα σημείο και ένα παράλληλο διάνυσμα
$\left(\begin{array}{l}\vec{\ell}(1,1,1)\\ \vec{u}(2,1,-1)\end{array}, (\vec{\ell}\times\vec{u})\right)$

Το σημείο $A=(\Pi)\cap(\varepsilon)$
Το διάνυσμα $\vec{u}\,/\!/(\zeta)$
Το $\vec{u}$ είναι πάνω στο $(\Pi) \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{\ell}$, όπου $\vec{\ell}\perp(\Pi)$
Το $\vec{u}$ είναι κάθετο στην $(\varepsilon) \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$, αφού $\vec{v}\,/\!/(\varepsilon)$
Τελικά: $\boxed{\vec{u}=\vec{\ell}\times\vec{v}}$

Λύσεις των συστημάτων:

$$(\varepsilon):\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+5}{-1}=\frac{x-1+y-2+z+5}{2+\cancel{1}-\cancel{1}}=\frac{(x+y+z)+2}{2}\quad \left.\begin{array}{l}\\ x+y+z=1\end{array}\right\} \Rightarrow =\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

Άρα $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+5}{-1}=\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\frac{y-2}{1}=\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{y=7/2}$$

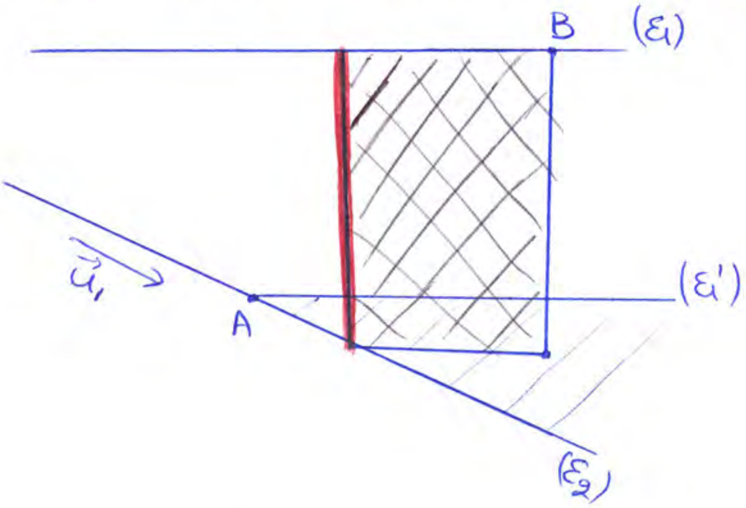
$$\frac{z+5}{-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{z=-13/2}$$

$$\vec{u}=\vec{v}\times\vec{\ell}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=(-2,3,-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{x-4}{-2}=\frac{y-7/2}{3}=\frac{z+13/2}{-1}}$$

Δίδονται ευθείες (ε_1) και (ε_2) ασύμβατες. Ζητείται επίπεδο που να περιέχει την μία και να είναι κάθετο στην άλλη. (Το ζητούμενο επίπεδο (Π) είναι το επίπεδο της κοινής καθέτου).



(I) Ευκλείδεια Γεωμετρία:

$\Downarrow$

"Κατασκευή" κοινής καθέτου.

(II) Αναλυτική Γεωμετρία:

$(\varepsilon_2): \vec{r_1} = \vec{r_A} + t \cdot \vec{u_1}$

$\left.\begin{array}{l}(\Pi) \perp (\varepsilon_2) \Longleftrightarrow \vec{u_1} \perp (\Pi) \\ (\varepsilon_1) \subset (\Pi)\end{array}\right\}$ (Σ) (Λύνω το (Σ) και το βρίσκω)

(Με πράξεις - παραδείγματα:)

Έστω $(\varepsilon_1): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+5}{-1}$

$(\varepsilon_2): x = y = z$

$(\Pi) \perp (\varepsilon_1) \Rightarrow (\Pi): 2x + y - z = c_1$

<u>Άσκηση:</u> Να βρούμε το c_1.
<u>(σπίτι)</u>

Δέσμη Επιπέδων:

$(\Pi_1), (\Pi_2)$ δύο επίπεδα, <u>όχι</u> παράλληλα $\Rightarrow \boxed{k(\Pi_1) + \lambda(\Pi_2) = 0}$
$k, \lambda \in \mathbb{R}$ και $|k| + |\lambda| \neq 0$

$\left.\begin{array}{l}(\Pi_1) \to x + y + z = 1 \\ (\Pi_2) \to x + 2y + 3z = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}k(x+y+z-1) + \lambda(x+2y+3z) = 0 \\ k, \lambda \in \mathbb{R},\ |k| + |\lambda| \neq 0\end{array}}$ (1)

↳ <u>Ξεχωριστό πρόβλημα:</u>

$kx + ky + kz - k + \lambda x + 2\lambda y + 3\lambda z = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{(k+\lambda)x + (k+2\lambda)y + (k+3\lambda)z - k = 0 \quad (2)}$ $k, \lambda \in \mathbb{R},\ |k| + |\lambda| \neq 0$

↳ Θ.ν.α.ο. είναι εξίσωση επιπέδου

$\boxed{\text{Παριστάνει επίπεδο} \Longleftrightarrow |k+\lambda| + |k+2\lambda| + |k+3\lambda| \neq 0}$

Έστω ότι δεν παριστάνει επίπεδο τότε:

$\left.\begin{array}{l}k + \lambda = 0 \\ k + 2\lambda = 0 \\ k + 3\lambda = 0\end{array}\right\} \Rightarrow k = \lambda = 0$ <u>ΑΤΟΠΟ</u>, αφού $|k| + |\lambda| \neq 0$

Άρα η (2) παριστάνει <u>πάντα</u> επίπεδο.

<u>Γεγονός:</u> Όλα αυτά τα επίπεδα τέμνονται κατά ευθεία.
(Δηλαδή έχουν μία κοινή ευθεία)

(2) $\Longleftrightarrow$ (1): Τα <u>κοινά</u> σημεία όλων των επιπέδων από το (2) ικανοποιούν την (1) $\forall\, k, \lambda : |k| + |\lambda| \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ [$\Rightarrow$ άρα η ① είναι πολυώνυμο ταυτοτικά 0 άρα οι συντελεστές των κ, λ πρέπει να είναι 0.]

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Τομή επιπέδων άρα $\boxed{\text{ΕΥΘΕΙΑ}}$

για να τη βρω λύνω το σύστημα:

· <u>Διεύθυνση:</u> εξωτερικό γινόμενο, $\vec{u}=(1,1,1)\times(1,2,3)$

και

· <u>Σημείο:</u> $\begin{cases} y+z=1 \\ 2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=3 \\ z=-2 \end{matrix}} \Rightarrow A(0,3,-2)$

• Με τον ίδιο τρόπο μελετάται η σχέση ευθειών στο επίπεδο!

• <u>Θεωρητικό θέμα:</u>

<u>Συστήματα Συντεταγμένων</u> → ορθοκανονικά Oxy στο επίπεδο

→ γενικά συστήματα (πλαγιογώνια)

(Αλλαγή συντεταγμένων: $Oxy \longrightarrow Ox'y'$)

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \left(+ \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right)$$

← χωρίς κοινή αρχή.

← για να βρούμε τη μορφή

$P \longleftrightarrow P\cdot P^T = \mathbb{I}_2,\ \det(P) = \pm 1 \xrightarrow{\text{περιορίζομαστε}} \det(P)=1$

$$P=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

π.χ. $Oxy \longrightarrow ax+by+\gamma=0,\ |a|+|b|\neq 0$ ($\longleftrightarrow$ ευθεία στο επίπεδο)

$Ox'y' \longrightarrow a'x'+b'y'+\gamma'=0,\ |a'|+|b'|\neq 0$

$\begin{cases} x=\cos\theta x'-\sin\theta y' \\ y=\sin\theta x'-\cos\theta y' \end{cases} \Rightarrow \underbrace{[\quad]}_{a'}x' + \underbrace{[\quad]}_{b'}y' + \underbrace{[\quad]}_{\gamma'}=0$

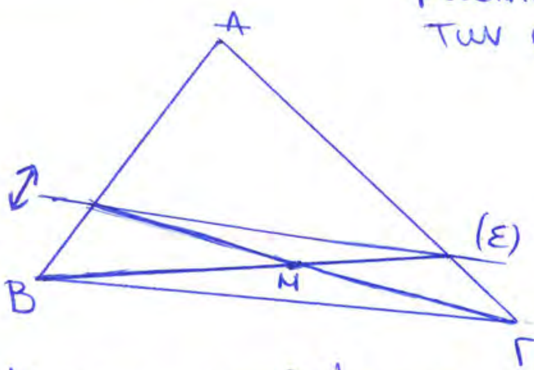
θα πρέπει ν.δ.ο. $|a|+|b|\neq 0 \Leftrightarrow |a'|+|b'|\neq 0$

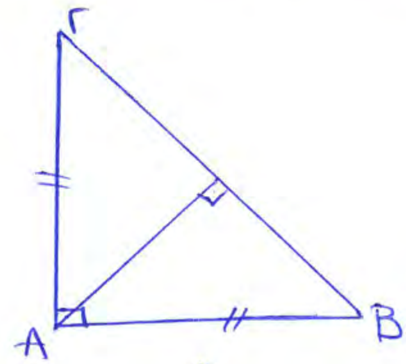
$\begin{cases} a'=a\cos\theta+b\sin\theta \\ b'=-b\sin\theta+a\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \det(a',b')=1 \Rightarrow |a'|+|b'|\neq 0$

ή $(a')^2+(b')^2=a^2+b^2 \Rightarrow |a'|+|b'|\neq 0$

Άσκηση: (σπίτι)   (ε)//(ΒΓ)

μετακινώ την (ε) και ζητείται ο Γεωμετρικός Τόπος των σημείων Μ.





⊛ Λύνω το πρόβλημα σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο και το μεταφέρω στο τυχαίο τρίγωνο και καταλήγουμε πως ο Γ.Τ. των Μ είναι η διάμεσος που διέρχεται από το Α (αφού τα ύψη και οι διχοτόμοι δεν διαιρούνται)

⇓

Ο Γ.Τ. των Μ είναι η μεσοκάθετος του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$ που διέρχεται από το Α.

21/5| Εξισώσεις 2ου βαθμού στο Επίπεδο (και στο Χώρο)

▶ Εισαγωγή:

Γενική Εξίσωση: $\boxed{\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\delta x+2\varepsilon y+\zeta=0}$ (E), $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta\in\mathbb{R})$

Το τι παριστάνει εξαρτάται από τους συντελεστές.

↳ Η απάντηση δίνεται με αλλαγή! → (Τι σημαίνει;)

(E) → Oxy ορθοκανονικό

Δηλαδή πρέπει να αλλάξω σύστημα ώστε στο καινούργιο O'x'y' η (E) να δίνεται η απλούστερη δυνατή.

Για να δω τις "απλούστερες" μορφές αρχίζω τα παραδείγματα, για το τι αναμένεται!

Και αν δω ότι αξίζει αναζητώ ΜΕΘΟΔΟ.

Απλούστερο → Κύκλος

2 ορισμοί $\xrightarrow{\text{γεωμετρικός}}$ Είναι ο Γ.Τ. των σημείων που ισαπέχουν από σταθερό σημείο γνωστό και σταθερή απόσταση. (1ος ορισμός)

⇕

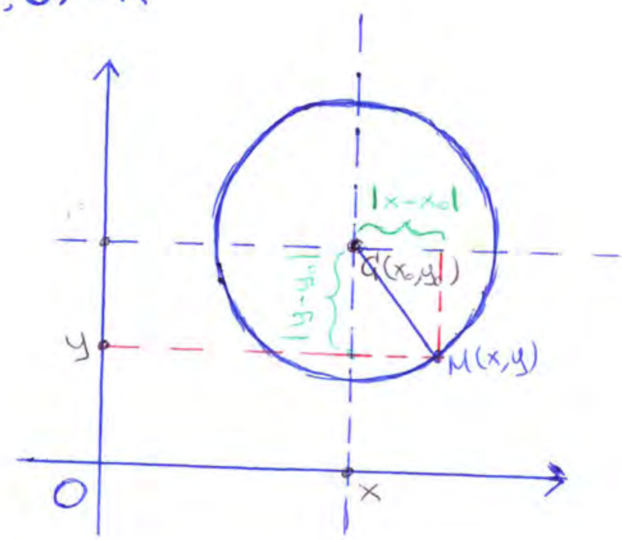
$\xrightarrow{\text{αλγεβρικός}}$ Σε κάποιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy $\Rightarrow x^2+y^2=R^2$, $R>0$ (2ος ορισμός)

$\iff \|\vec{OM}\|=R$

$\iff d(M,O)=R$

- 1ος ορισμός ⟹ 2ος ορισμός
- 2ος —//— ⟹ 1ος —//—

▶ Απόδειξη:



M ∈ Γεωμετρικό Τόπο (Γ.Τ.) ⟺

$\iff |GM|^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

$\iff R^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

Αν επιλέξω σύστημα GXY και παράλληλη μεταφορά στο G $\iff X^2+Y^2=R^2$

Στο τυχαίο σύστημα:

$\boxed{x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-R^2)} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+fx+g\cdot y+h=0}$ (1), $f,g,h\in\mathbb{R}$

Ειδική μορφή της (E)

• Να βρεθούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο.

$$(1) \Rightarrow x^2 + 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}f\right)x + \left(\tfrac{f}{2}\right)^2 + y^2 + 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}g\right)\cdot y + \left(\tfrac{g}{2}\right)^2 + h - \frac{f^2}{4} - \frac{g^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x+\tfrac{1}{2}f\right)^2 + \left(y+\tfrac{1}{2}g\right)^2 = \left(\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} - h\right)$$

$\Rightarrow$ Κύκλος "κέντρου" $(-f/2, -g/2)$ και "ακτίνας" $\sqrt{f^2/4 + g^2/4 - h}$

$\Longleftrightarrow$ (Παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν) $\boxed{f^2+g^2-4h>0}$

• Εφαπτόμενη στο (x_0, y_0) στην (1):

$$2x\,dx + 2y\,dy + f\,dx + g\,dy = 0$$

$$\Rightarrow (2x+f)dx + (2y+g)dy = 0$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = -\left.\frac{2x+f}{2y+g}\right|_{(x_0,y_0)}}$$

= η κλίση (συντελεστής διεύθυνσης) της εφαπτομένης.

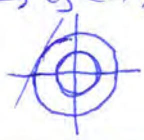
π.χ. Αντίστοιχα στη Φυσική:

$F(x,y)=0$

$1^{\text{ο}}$ κινητό : $x \to x(t)$, $x'(t) = \upsilon_1$

$2^{\text{ο}}$ —"— : $y \to y(t)$, $y'(t) = \upsilon_2$

$M(x,y)$



• Ειδική περίπτωση:

$$x^2+y^2=R^2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{x_0}{y_0}$$

• Γεωμετρικός Τρόπος:

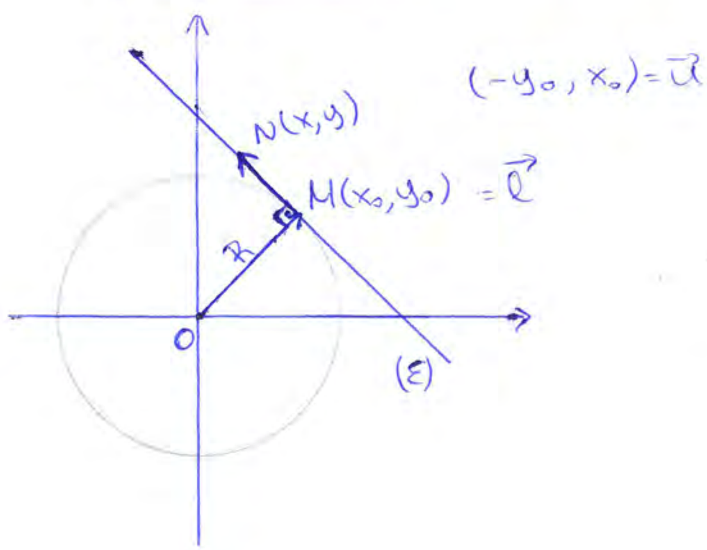
$\vec{MN} \perp \vec{OM}$

$$\Leftrightarrow \langle (x-x_0, y-y_0), (x_0, y_0)\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot x_0 - x_0^2 + y\cdot y_0 - y_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0\cdot x + y_0\cdot y = R^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{x_0}{y_0}}$$



• Κύκλος που διέρχεται από 3 σημεία:

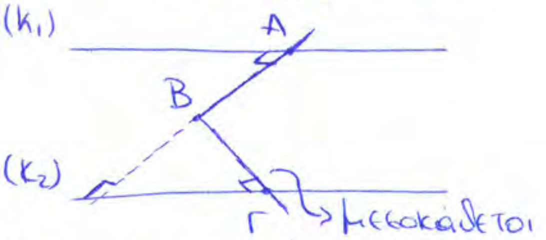
(1) Γεωμετρική Λύση:

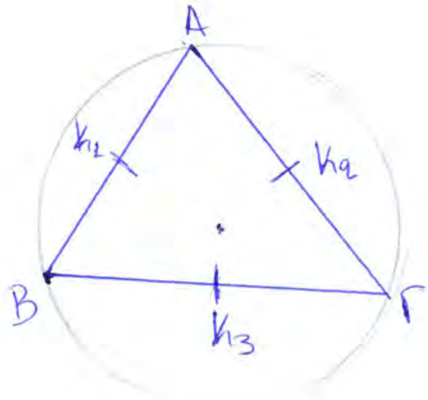
A, B, Γ όχι στην ίδια ευθεία

Οι $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο O.

((γιατί;;)

Αν $\kappa_1 // \kappa_2$ τότε:





όπου παρατηρούμε ότι εσωτερική = απέναντι

↳ ΑΤΟΠΟ από 5ο Αίτημα

(2) Αναλυτική Λύση:

$A_i:(x_i, y_i)$, $i=1,2,3$ (μη συνευθειακά)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Ζητείται κύκλος από A_i
- Ζητούνται f, g, h

$$x_i^2 + y_i^2 + f x_i + g y_i + h = 0 \quad , \quad i=1,2,3$$

Λύση:

Ξαναγράφω το σύστημα ως σύστημα 4-εξισώσεων!

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot(x^2+y^2) + f\cdot x + g\cdot y + h\cdot 1 &= 0 \\ 1\cdot(x_1^2+y_1^2) + f x_1 + g y_1 + h\cdot 1 &= 0 \\ 1\cdot(x_2^2+y_2^2) + f x_2 + g y_2 + h\cdot 1 &= 0 \\ 1\cdot(x_3^2+y_3^2) + f x_3 + g y_3 + h\cdot 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(συντελεστές)

Εξίσωση κύκλου

- Γωνία δύο κύκλων, ορθογώνιοι κύκλοι:

$\left((C_1)\hat{,}(C_2)\right) = \left(\vec{O_1M}\hat{,}\vec{O_2M}\right)$

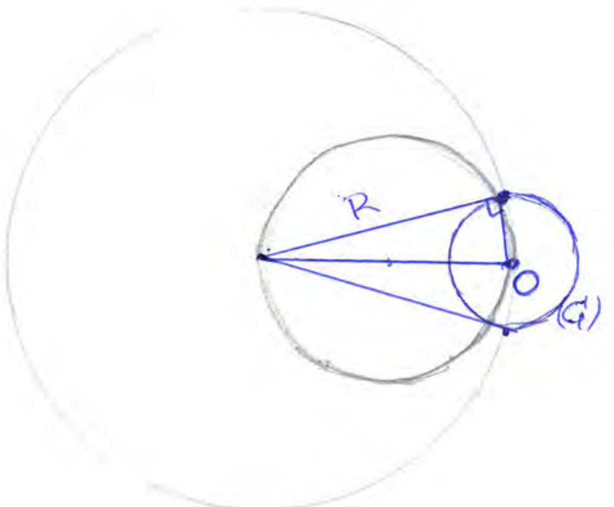
Τέμνονται ορθογώνια $\Longleftrightarrow \vec{O_1M} \perp \vec{O_2M}$

$\exists$ ορθογώνιοι κύκλοι;

↳ Απάντηση:

ΝΑΙ! Πώς όμως τους κατασκευάζουμε;

Να γραφεί κύκλος κέντρου Α, ορθογώνιος στο (C) } ⟹ Με διάκεντρο το ΑΟ γράφω περιφέρεια. Με κέντρο το Α και ακτίνα την εφαπτόμενη
⇓
ο ζητούμενος κύκλος



- Αναλυτική Προσέγγιση:

1º βήμα: $x^2+y^2+f_1x+g_1y+h_1=0 \ (C_1)$
$x^2+y^2+f_2x+g_2y+h_2=0 \ (C_2)$

(C_1) ορθογώνιος $(C_2) \Longleftrightarrow \boxed{f_1f_2+g_1g_2=2(h_1+h_2)}$

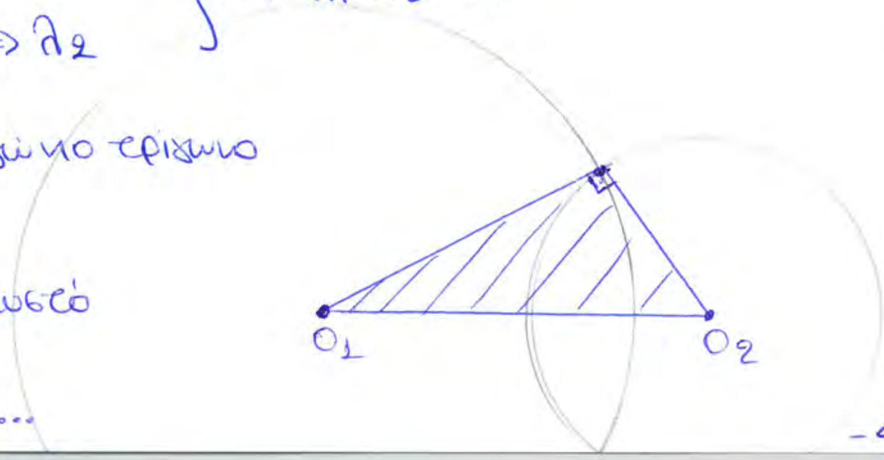
1η Λύση: $(C_1) \longleftrightarrow (dx, dy) \Rightarrow \lambda_1$
$(C_2) \longleftrightarrow (dx, dy) \Rightarrow \lambda_2$
} $\Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

2η Λύση: Ν.α.ο. $O_1\hat{M}O_2$: ορθογώνιο τρίγωνο

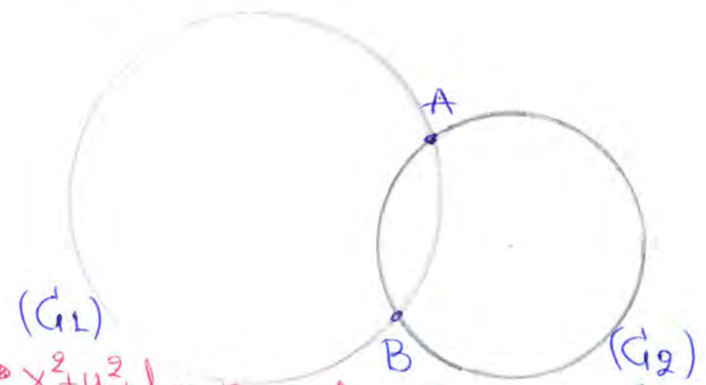
$\Rightarrow (O_1M)^2+(O_2M)^2 = (O_1O_2)^2$

$O_1\left(-\frac{f_1}{2}, -\frac{g_1}{2}\right)$
$O_2\left(-\frac{f_2}{2}, -\frac{g_2}{2}\right)$
} $\Rightarrow (O_1O_2) =$ γνωστό

$|O_1M| = R_1 = \sqrt{\frac{f_1^2}{4}+\frac{g_1^2}{4}-h_1}$, $R_2 = \ldots$



Δέσμες κύκλων:



$C: x^2+y^2+f_1x+g_1y+h_1=0$

$C: x^2+y^2+f_2x+g_2y+h_2=0$

$(C_1)+k(C_2)=0,\ k\in\mathbb{R}$

Ερώτημα: Τι παριστάνει αυτό?

$k\neq -1$ → ΚΥΚΛΟΣ

$k=1$ → ΕΥΘΕΙΑ

Ποιος κύκλος;
$\forall$ τιμή του k παριστάνει και διαφορετικό κύκλο $\Rightarrow$ άπειροι κύκλοι

$A,B\in(C_1)$ και (C_2) $\Rightarrow$ $A,B\in(C_1)+k(C_2)$
Αν $\exists$ κοινά σημεία, κάθε τέτοιος κύκλος διέρχεται από τα σημεία τομής των (C_1) και (C_2)
Ισχύει και το αντίστροφο.

Άσκηση-Εφαρμογή: Δίνονται οι κύκλοι: $x^2+y^2-3x+4y-1=0\ (C_1)$
$x^2+y^2+\frac{5}{2}x-3y+1=0\ (C_2)$
Να βρεθεί ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία τομής των (C_1) και (C_2) καθώς και από το $(1,2)$.

Λύση: Όλοι οι κύκλοι που διέρχονται από τα σημεία τομής είναι:
$(C_1)+k(C_2)=0,\ \boxed{k\neq -1}$
Το $(1,2)$ ικανοποιεί τη σχέση $\Rightarrow k=\ldots$ (αντικατάσταση)

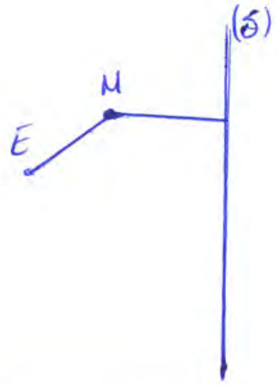
Άσκηση (σπίτι): Να βρεθεί η ευθεία που ορίζουν τα σημεία τομής.

Άσκηση (σπίτι): Ν.Β. ο Γ.Τ. των σημείων που οι κύκλοι που γράφονται με κέντρο αυτά τα σημεία τέμνουν ορθογώνια δύο άλλους (γνωστούς) κύκλους
[Υπόδειξη: ο Γ.Τ. που ζητείται είναι ο ριζικός άξονας
$\mathcal{D}(M,C_1)=\mathcal{D}(M,C_2)$ (→ Δύναμη)]

22/5

• **Πρόβλημα:** Στο επίπεδο δίδονται σημείο Ε και ευθεία (δ). Ζητείται ο Γ.Τ. των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\boxed{\frac{d(M,E)}{d(M,\delta)} = e}$$ όπου e: θετική σταθερά



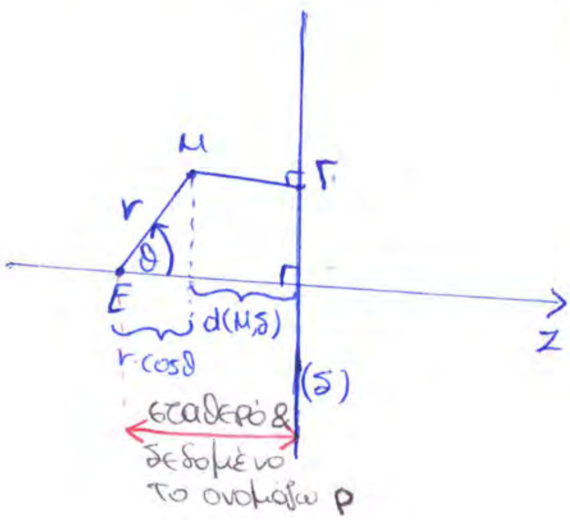
Ορολογία: Το Ε ονομάζεται εστία και το
δ — // — διευθετούσα

Ιστορική Αναφορά: Το πρόβλημα και η ορολογία οφείλονται στον Πάππο (~4ος αι. μΧ) και αναδιατύπωση ενός προβλήματος του Απολλωνίου από τις κωνικές τομές.

• Απάντηση στα πλαίσια της Αναλυτικής Γεωμετρίας:
(Το πρόβλημα οδηγεί σε μία πολυωνυμική εξίσωση 2ου βαθμού, 2 μεταβλητών)

Αναζητώ κατάλληλες συντεταγμένες για να απλουστεύσω το πρόβλημα

1η Απάντηση: Θεωρώ πολικές συντεταγμένες με πόλο την εστία Ε και άξονα κάθετο από την Ε στο (δ).



Οπότε $M(r,\theta)$ όπου:

$r =$ η απόσταση (ΕΜ)

$\theta =$ η γωνία $(\vec{EM}, \widehat{\ } \vec{Ez})$

$r^2 = (ME)^2 = (d(M,E))^2$

$(M\Gamma)^2 = (p - r\cos\theta)^2$

η συνθήκη που δόθηκε μετασχηματίζεται ως εξής:

$$e^2 = \frac{d^2(M,E)}{d^2(M,\delta)} = \frac{r^2}{(p-r\cos\theta)^2}$$

$\Leftrightarrow \boxed{r^2 = e^2(p - r\cos\theta)^2}$ (γενικός τύπος)

↳ πεπλεγμένη μορφή $(\phi(r,\theta))$

• Πώς μελετάμε τον γενικό τύπο
Σε λυμένη μορφή:

1η Περίπτωση: $p > r\cos\theta$ (=> όλα τα σημεία προς το ίδιο μέρος της δ με το Ε)

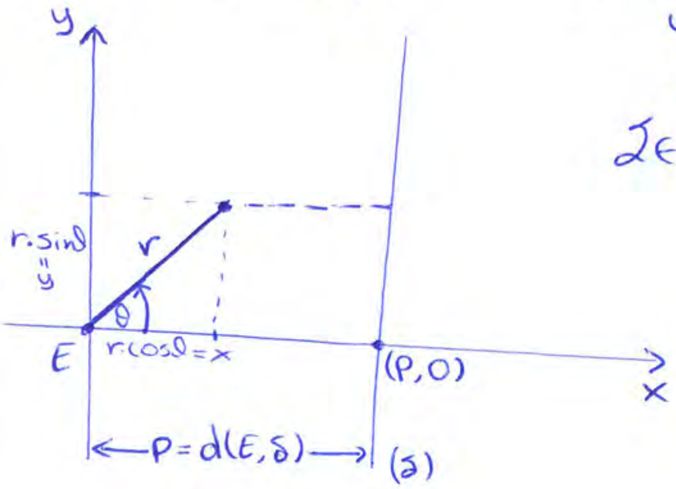
$$\frac{r}{p - r\cos\theta}\ e(=\text{σταθ}) \Rightarrow r = \ldots \Rightarrow \boxed{r = \frac{e\cdot p}{1 + e\cos\theta}}$$

2η Περίπτωση: Να υπάρχουν σημεία και στα δύο ημιεπίπεδα ως προς τη (δ)

$$\boxed{r = \frac{\pm e\cdot p}{1 \pm e\cos\theta}}$$

2) Μετάβαση σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$(E,\delta) \rightsquigarrow (Oxy)$



Αρχίζω με καρτεσιανό σύστημα αρχής E, στα
$y \to \parallel \delta$, από το E
$x \to \perp \delta$, — // —

Σε αυτό το σύστημα:

$$\boxed{r^2 = e^2 (p - r\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = e^2 (p-x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = e^2 p^2 + e^2 x^2 - 2e^2 p\cdot x$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-e^2)x^2 + y^2 + 2e^2 px - e^2 p^2 = 0}$$

→ Πολυωνυμική 2 μεταβλητών, $2^{ου}$ βαθμού (αφού ο συντελεστής του y^2 είναι το $1 \neq 0$)

Μελέτη (?) ⤳ Τι παριστάνει;

Αναζητώ ένα ορθοκανονικό σύστημα που η εξίσωση να παίρνει την απλούστερη δυνατή μορφή! (εδώ γίνεται εύκολα)

$1^η$ περίπτωση: $1 - e^2 = 0$, οπότε $e^2 = 1$ $(e>0, e=1)$

$$y^2 + 2px - p^2 = 0$$

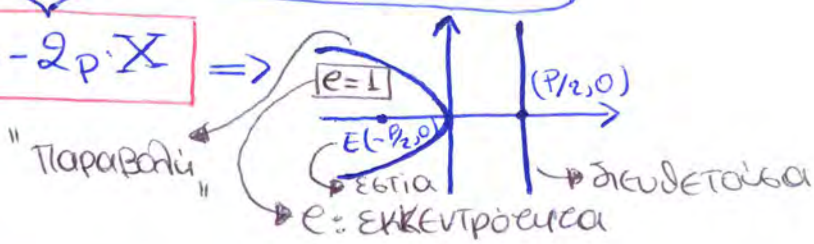
$$\Leftrightarrow y^2 = p^2 - 2px$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2p\left(\tfrac{p}{2} - x\right) \text{ ή } y^2 = -2p\left(x - \tfrac{p}{2}\right)$$

Αλλάζω άλλη μια φορά σύστημα:

Θέτω $\underbrace{Y = y,\ X = x - \tfrac{p}{2} \Rightarrow \text{η αρχή θα είναι } O(1/2, 0)}$

$$\boxed{Y^2 = -2p\cdot X} \Rightarrow$$



Άλλη αλλαγή:

$$\left.\begin{array}{l} Y^* = Y \\ X^* = -X \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(Y^*)^2 = 2p\cdot X^*} \rightsquigarrow \text{αλλάζουν: - διευθετούσα, - εστία}$$

$2^η$ περίπτωση: $1 - e^2 \neq 0$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2e^2 px - e^2 p^2 = 0 \xrightarrow[\text{κάνω τέλεια τετράγωνα}]{\text{προσπαθώ να}} (1-e^2)\left(x + \frac{p\cdot e^2}{1-e^2}\right)^2 + y^2 - \frac{p^2 e^2}{1-e^2} = 0$$

Αλλαγή Αξόνων:

$$\underbrace{X = \frac{p\cdot e^2}{1-e^2} + x,\ Y = y}_{OXY} \Rightarrow \text{Αρχή } \left(-\frac{pe^2}{1-e^2}, 0\right) \text{ στο } Oxy$$

$$(1-e^2)X^2 + Y^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)} \Longrightarrow \frac{X^2}{\left[\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}\right]} + \frac{Y^2}{\left[\frac{e^2p^2}{(1-e^2)}\right]} = 1,\ e>0,\ e \neq 1$$

Έχω σαφώς 2 περιπτώσεις:

1^{η} περίπτωση: $e<1$, $1-e^2>0 \rightsquigarrow$ Έλλειψη

Θέτω $a^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$, $b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1}$

Ανάγνωση στον Γ.Τ.:

$$\frac{d(M,E)}{d(M,\delta)}=p>0$$

$e=1 \Rightarrow$ παραβολή

$e>1 \Rightarrow$ υπερβολή

$e<1 \Rightarrow$ έλλειψη

2^{η} περίπτωση: $e>1$, $1-e^2<0 \rightsquigarrow$ Υπερβολή

Θέτω $a^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$, $-b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1}$

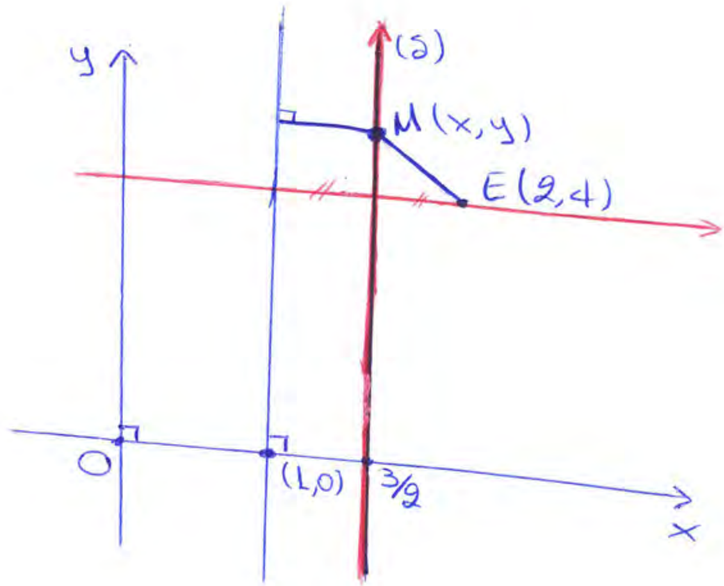
Παράδειγμα (Απλό):

Oxy ορθοκανονικό

$\delta \longrightarrow x=1$

$E \longrightarrow (2,4)$

$e = \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow 1}{\searrow 2}$



$$\frac{d(M,E)}{d(M,\delta)}=e$$

$d^2(M,E)=(x-2)^2+(y-4)^2$

$d^2(M,\delta)=(x-1)^2$

$$\frac{(x-2)^2+(y-4)^2}{(x-1)^2}=e^2$$

$\boxed{e=1}$: $(x-2)^2+(y-4)^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+4+y^2-8y+16=x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow \boxed{y^2-8y-2x+19=0}$ (E)

$(y-4)^2=(x-1)^2-(x-2)^2=x^2-2x+1-x^2+4x-4=2x-3=2\cdot 1\cdot(x-3/2)$

$\Downarrow$

$Y=y-4$

$X=x-3/2$

$\boxed{e=2}$: $e^2=4$

$(x-2)^2+(y-4)^2=4(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+\cancel{4}+y^2-8y+16=4x^2-8x+\cancel{4}$

$\Leftrightarrow 3x^2-y^2-4x+8y-16=0$

$\Leftrightarrow 3(x^2-4/3\,x)-(y^2-8y+16)=0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)-(y-4)^2-3\left(\frac{2}{3}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-(y-4)^2=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$

· Άσκηση:

$E(1,0)$

$\delta \longrightarrow x-y=0$

$e=1$ (ή 2)

$d(M,E)=d(M,\delta)$

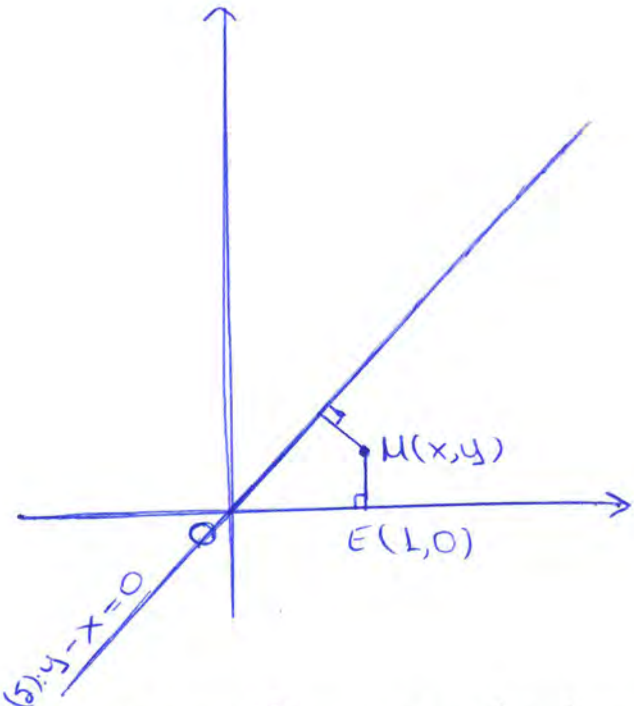
$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$

$(x-1)^2+y^2=\frac{(x-y)^2}{2}$

$x^2-2x+1+y^2=\frac{x^2-2xy+y^2}{2}$

$2x^2-4x+2+2y^2=x^2-2xy+y^2$

$\boxed{x^2+2xy+y^2-4x+2=0}$ ⤳ Απαλοιφή του xy; ⇒ Δεν γίνεται με μεταφορά! Απαιτείται Στροφή.



"Αλγεβρικό" Πρόβλημα:

(Ε): $\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\delta x+2\varepsilon y+\zeta=0$

Τι "παριστάνει"? ⤳ Ανάλογα με τους συντελεστές

⇑ (μαθηματική ορολογία)

Πώς ανάγεται? ⇒ (Oxy ⤳ $O'x'y'$ απλούστερη δυνατή)

1ος τρόπος: Καθώς δίνεται βλέπουμε τι παριστάνει

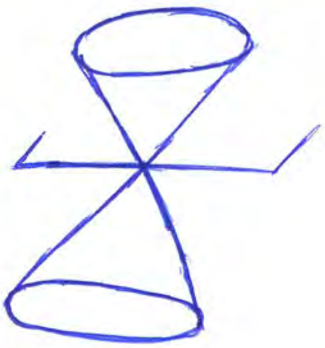
2ος τρόπος: ∃ "αλγόριθμος που να απαντά;"

(Ε) ⟶ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$ ⤳ 6-άδα συντελεστών

↓

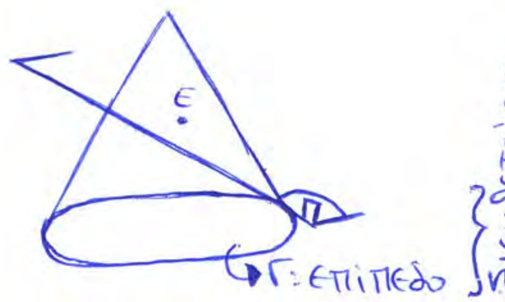
(εξίσωση)

Κωνικές Τομές: Τομές επιπέδου και κώνου $\Rightarrow$ καμπύλες επιπέδου
(Απολλώνιος)



Θεώρημα: Οι (μη εκφυλισμένες: ευθεία, σημείο) κωνικές τομές υπακούουν στο Γεωμετρικό Τόπο (Γ.Τ.) του $\dfrac{d(M,E)}{d(M,\delta)} = e$, για κατάλληλα Ε και δ [Πάππος]

Απόδειξη (Εκτός Εξέτασης):



Εγγράφω σφαίρα που να εφάπτεται στον κώνο και στο επίπεδο.
Ε: σημείο επαφής
η σφαίρα εφάπτεται στον κώνο $\Rightarrow$ ορίζει (Γ): επίπεδο
(Θεώρημα του Dadelin)

23/5 Η αναγωγή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στο επίπεδο.

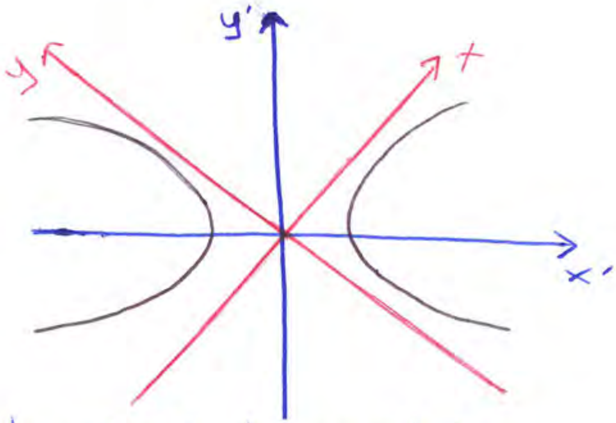
Εισαγωγή:

$\boxed{x\cdot y=1}$ (Ε) σ'ένα ορθοκανονικό Oxy

Αλλάζω το σύστημα ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$Ox'y' \xleftrightarrow[45^\circ]{\text{στροφή}} Oxy$



$$(E) \Longrightarrow \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1} \quad (E')$$

Διαφορετική Περιγραφή του ίδιου Γεωμετρικού Αντικειμένου

↕

"Υπερβολή"

Το Γεωμετρικό Αντικείμενο είναι Ανεξάρτητο των Oxy, $Ox'y'$

Γενική Μορφή: (και οι 2 περιπτώσεις εμπίπτουν εδώ)

$$\underbrace{aX^2}_{=0} + \underbrace{BX\cdot Y}_{=0} + \underbrace{\gamma\cdot Y^2}_{=0} + \delta X + \varepsilon Y + \underbrace{\underbrace{\zeta}_{=0}}_{=0} = 0$$

↳ στην 2η περίπτωση (E')

↳ στην 1η περίπτωση (E)

Μαθηματικό Ερώτημα:

Τι παριστάνει η γενική εξίσωση; Ποια γεωμετρικά αντικείμενα περιγράφει;

(1ον) Η (Ε) είναι αντικείμενο μελέτης της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Δηλαδή: Κατά την αλλαγή ορθοκανονικών συστημάτων δεν αλλάζει μορφή.

Απόδειξη: $(X,Y) \longleftrightarrow (x,y)$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}}_{\text{Μεταφορά}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix}}_{\text{Στροφή}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$X = x_0 + x\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - y\cdot\eta\mu\theta$$
$$Y = y_0 + x\cdot\eta\mu\theta + y\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

$\alpha \rightsquigarrow \alpha' = \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\vartheta + \beta\cdot\eta\mu\vartheta\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta + \gamma\cdot\eta\mu^2\vartheta$

$\beta \rightsquigarrow \beta' = -2\alpha\cdot\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta + \beta(\sigma\upsilon\nu^2\vartheta - \eta\mu^2\vartheta) + 2\gamma\eta\mu\vartheta\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta$

$\gamma \rightsquigarrow \gamma' = \alpha\eta\mu^2\vartheta - \beta\cdot\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta + \gamma\cdot\sigma\upsilon\nu^2\vartheta$

$\delta \rightsquigarrow \delta' = (2\alpha x_0 + \beta y_0 + \delta)\sigma\upsilon\nu\vartheta + \beta(x_0 + 2\gamma y_0 + \varepsilon)\eta\mu\vartheta$

$\varepsilon \rightsquigarrow \varepsilon' = -(2\alpha x_0 + \beta y_0 + \delta)\eta\mu\vartheta + (\beta x_0 + 2\gamma y_0 + \varepsilon)\sigma\upsilon\nu\vartheta$

$\zeta \rightsquigarrow \zeta' = \ldots$ (2-γραμμές πράξεις)

$$\underbrace{\alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2}_{\text{2-βάθμιο μέρος}} + \delta' x + \varepsilon' y + \zeta' = 0$$

($2^{ον}$) Πώς απλουστεύεται; [Υπάρχει αλλαγή που να την απλουστεύει;]

Παρατηρούμε ότι: Οι μεταφορές δεν επηρεάζουν το 2-βάθμιο μέρος.
Άρα αναζητώ γωνία στροφής που να απλοποιεί το 2-βάθμιο μέρος.
Μπορώ να αντιαλλάξω αυτό το x·y. Δηλαδή να μηδενίσω το β'.

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma\upsilon\nu^2\vartheta - \eta\mu^2\vartheta = \sigma\upsilon\nu 2\vartheta\\ &2\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta = \eta\mu 2\vartheta\end{aligned}}$$

Αν επιλέξω γωνία ώστε: $\varepsilon\varphi 2\vartheta = \dfrac{\beta}{-(\gamma-\alpha)}$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu 2\vartheta}{\sigma\upsilon\nu 2\vartheta} = \frac{\beta}{-\gamma+\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\eta\mu 2\vartheta - \gamma\eta\mu 2\vartheta = \beta\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-\alpha\eta\mu 2\vartheta + \beta\sigma\upsilon\nu 2\vartheta + \gamma\eta\mu 2\vartheta = 0} = \beta'$$

Συμπέρασμα: Αν στρέψω το σύστημα κατά γωνία $\hat{\vartheta}$, ώστε: $\boxed{\varepsilon\varphi 2\vartheta = \frac{\beta}{\alpha-\gamma}}$
τότε η εξίσωση που θα προκύψει δεν θα έχει x·y.

Επανερχόμαστε στο Παράδειγμα:

$x\cdot y = 1 \Leftrightarrow x\cdot y - 1 = 0$, όλα είναι μηδέν εκτός β, ζ

Ποια γωνία προκύπτει;

$\vartheta \to \pi/4 \rightsquigarrow$ (Αρκεί η μία), $\vartheta \to \frac{3\pi}{4}$ $\varepsilon\varphi 2\vartheta = \left(\frac{1}{0} = \infty\right)$ $\Downarrow$ $2\vartheta \to 90°,\ 270°$

• για $\vartheta = \pi/4$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$x\cdot y = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} = \frac{(x')^2-(y')^2}{2}$$

για $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Έστω ότι έχω κάνει τη στροφή. (που γίνεται πάντοτε)

$$\boxed{\alpha x^2 + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0}$$

1η περίπτωση | 2η περίπτωση

1η περίπτωση: Κάποιο από τα α, γ μηδενίζεται.

- Και τα δύο μηδέν ⇓ "ευθεία"
- Ένα από τα 2 μηδέν. π.χ. $\boxed{\gamma = 0}$: εν γένει δεν μπορώ να απαλλαγώ από το y. ⇓ "παραβολή"

2η περίπτωση: Κανένα από τα α, γ δεν μηδενίζεται

Μπορώ να κάνω τέλεια τετράγωνα! άρα θα είναι της μορφής:

$$\alpha^* X^2 + \gamma^* Y^2 + \zeta^* = 0$$

Αν $\zeta^* \neq 0 \iff \dfrac{X^2}{-\left(\frac{\zeta^*}{\alpha^*}\right)} + \dfrac{Y^2}{-\left(\frac{\zeta^*}{\gamma^*}\right)} = 1$

Εξαρτάται από τα πρόσημα

• Πρακτικά: Αν $\zeta^* = 0$ μπορεί να παριστάνει τεμνόμενες ευθείες (πραγματικές ή φανταστικές)

• Θεωρητικά: Το x προκύπτει από μία μεταφορά. (Ποιά;)

Το (x_0, y_0) βρίσκεται από τη λύση του συστήματος

$$(\Sigma) \begin{cases} 2\alpha x_0 + \beta y_0 + \delta = 0 \\ \beta x_0 + 2\gamma y_0 + \varepsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{έχει λύση} \iff \begin{vmatrix} 2\alpha & \beta \\ \beta & 2\gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\iff \boxed{\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0}$$

Αν λοιπόν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$ (όπου $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$: 2-βάθμιο μέρος) με κέντρο αξόνων (x_0, y_0) λύση του (2) πηγαίνω πάντα στην $\alpha^* X + \gamma^* Y + \zeta^* = 0$

$\underbrace{\text{Αν } (x, y) \text{ ικανοποιεί την εξίσωση} \Rightarrow (-x, -y) \text{ είναι στην καμπύλη,}}$

⇒ Το κέντρο αξόνων ⟹ κέντρο συμμετρίας.

"Η καμπύλη έχει κέντρο"

Αν δεν έχει κέντρο αξόνων ⟹ παραβολή ⟹ δεν έχει κέντρο συμμετρίας αλλά ευθεία —//—.

Παράδειγμα: $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 + 2(3\sqrt{3}+8)x + 2(3 - 8\sqrt{3})y + 36 = 0$

$$\sigma\varphi 2\vartheta = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} = \frac{-6}{-6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2\vartheta \to \pi/3,\ 4\pi/3 \Rightarrow \vartheta \to \pi/6,\ 2\pi/3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu \pi/6 & -\eta\mu \pi/6 \\ \eta\mu \pi/6 & \sigma\upsilon\nu \pi/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{\sqrt{2}}}$$

2° Βήμα: (αντικατάσταση, απαλοιφή $x \cdot y$)

$4x'^2 + 16y'^2 + 12x' - 32y' + 36 = 0$

$\Leftrightarrow x'^2 + 4y'^2 + 3x' - 8y' + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x'^2 + 2\cdot\frac{3}{2}x' + \frac{9}{4}\right) + 4\cdot\left(y'^2 - 2y' + 1\right) + 9 - 4 - 9/4 = 0$

$\Rightarrow \left(x' + \frac{3}{2}\right)^2 + 4(y'-1)^2 = -\frac{11}{4} \Rightarrow$ φανταστική έλλειψη

$K(-3/2, 1)$

Παράδειγμα: $x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 4y - 3 = 0$

$\sigma\upsilon\nu 2\theta = \frac{a-\gamma}{b} = \frac{1-1}{-6} = 0 \Rightarrow 2\theta \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases} \Rightarrow \theta \begin{cases} \pi/4 \\ 3\pi/4 \end{cases}$

$\theta = \pi/4 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow x'^2 - 2y'^2 - 2\sqrt{2}x' + \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow (x'^2 - 2\sqrt{2}x' + 2) - 2y'^2 - 2 + \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow (x' - \sqrt{2})^2 - 2y'^2 = 1/2 \Rightarrow$ Υπερβολή

Με κέντρο $(\sqrt{2}, 0)$:

$$\boxed{\frac{(x'-\sqrt{2})^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{y'^2}{(1/2)^2} = 1}$$

• Γενική Μελέτη:

$ax^2 + bxy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$

Τη γράφω σε μορφή πίνακα:

$$(x,y)\underbrace{\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & a \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{(\delta, \varepsilon)}_{B}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\zeta}_{\Gamma} = 0$$

$$(x,y,1)\begin{pmatrix} a & B/2 & \delta/2 \\ B/2 & a & \varepsilon/2 \\ \delta/2 & \varepsilon/2 & \zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Η (E) καθορίζει κάποιους πίνακες.

$X^T A X + BX + \Gamma = 0$

$(X, 1)^T \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad A^T = A$

Τι σημαίνει αλλαγή αξόνων?

$X \rightarrow X^* = PX + H$, P: πίνακας στροφής $\boxed{\text{και}}$ H: πίνακας μεταφοράς

$A \rightarrow A^* = P^T \cdot A \cdot P$

$B \rightarrow B^* = (H \cdot A + B) \cdot P$

$\Gamma \rightarrow \Gamma^* = \ldots$

[Πρόβλημα:
∃P: A^* να γίνεται διαγώνιος
∃H: B^* — // — μηδενικός]

28/5 | **Μελέτη Μέσω Αναλλοιώτων**

Αναλυτική Γεωμετρία ⟶ Σύστημα Συντεταγμένων (Oxy)
Γεωμετρικά Αντικείμενα ⟷ Εξισώσεις

Ευθεία: $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ } Οι συντελεστές εξαρτώνται
β'-βαθμού: $\alpha x^2+\beta xy+\dots+\zeta=0$ } από Oxy

Αλλάζω σύστημα, αλλάζουν συντελεστές
Το γεωμετρικό αντικείμενο μένει "ίδιο"

• Μια παράσταση $\Delta(\alpha,\beta,\gamma,\dots)$ ονομάζεται αναλλοίωτη, αν παραμένει ίδια για όλα τα συστήματα συντεταγμένων. Ειδικά τα ορθοκανονικά

• Αν βρω αναλλοίωτα, πού θα χρησιμεύσουν?

↳ Απάντηση: Θα χαρακτηρίσουν την εξίσωση.

π.χ. Μέχρι στιγμής ξέρουμε μόνο μια αναλλοίωτη παράσταση: διακρίνουσα.

Ένα πολύ απλό παράδειγμα: $\mathbb{R}$: 1-διάστατο

-1 0 1 Ox

(E) $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $\quad Ox, O'x' \iff \boxed{x=\pm x'+\kappa}$ (αλλαγή ορθοκανονικού συστήματος)

(E) $\alpha(\pm x'+\kappa)^2+\beta(\pm x'+\kappa)+\gamma=0$

$\iff \alpha[x'^2\pm 2x'\kappa+\kappa^2]\pm\beta x'+\beta\kappa+\gamma=0$

$\iff \alpha x'^2 \pm \underbrace{(2\alpha\cdot\kappa+\beta)}x' + \underbrace{(\alpha\kappa^2+\beta\kappa+\gamma)}=0$

$\alpha'=\alpha$
$\beta'=2\alpha\kappa+\beta$
$\gamma'=\alpha\kappa^2+\beta\kappa+\gamma$ } Υπάρχουν αναλλοίωτα?

$\Delta(\alpha,\beta,\gamma)=\beta^2-4\alpha\gamma$
$\Delta(\alpha',\beta',\gamma')=\beta'^2-4\alpha'\gamma'$ } ⟹ Είναι ίδια στα 2 συστήματα

↳ Απόδειξη: κάνω πράξεις στην $\Delta(\alpha',\beta',\gamma')$

Υπάρχει θεωρητικός τρόπος απόδειξης;

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=(x,1)\boxed{\begin{pmatrix}\alpha & \beta/2\\ \beta/2 & \gamma\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$$

↳ $\det(\,)=\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4}=-\frac{\Delta}{4}$

Τα αναλλοίωτα θα τα χρησιμοποιήσουμε στην μελέτη δευτεροβάθμιας

Στο $\mathbb{R}^2$: Αλλαγή συντεταγμένων? $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(P)\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, $P^TP=I$, $\det(P)=1$
↳ πίνακας στροφής

(E) $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0 \to (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$
ψάχνουμε αναλλοίωτα

$\Delta(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)=\Delta(\alpha',\beta',\gamma',\delta',\varepsilon',\zeta')$ / και μετά να μελετήσω την εξίσωση

(E) $\iff (x,y,1)\begin{pmatrix}\alpha & \beta/2 & \delta/2\\ \beta/2 & \gamma & \delta/2\\ \delta/2 & \varepsilon/2 & \zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$

Ισχυρισμός αυτά είναι αναλλοίωτα. $J_1=\alpha+\gamma$
$J_2=4\alpha\gamma-\beta^2$
$J_3=\det\begin{pmatrix}\alpha & \dots\\ \dots & \zeta\end{pmatrix}$

Πως έφτασα στα J_1, J_2, J_3;

(Ε) $(x,y)\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{(\delta,\varepsilon)}_{B}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\zeta}_{\Gamma} = 0$

$A^T = A$

$\boxed{X^T \cdot A X + B\cdot X + \Gamma = 0}$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$

$X = P\cdot X^* + H$

$X \to X^*$

$A \to A^* = P^T A P$

$B \to B^* = (AH + B^T)^T$

$\Gamma \to \Gamma^* = \dots$

Άρα (Ε) $\boxed{(X^*)^T A^* (X^*) + B^* X^* + \Gamma^* = 0}$ Oxy O'x'y' $\longrightarrow (\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \zeta')$

$(A^*)^T = (P^TAP)^T = P^T A^T P \overset{A^T=A}{=\!=} P^T A P = A^*$

$tr(A) = tr(A^*)$ $(= J_1)$

απόδειξη $\det(A) = \det(A^*)$ $(= J_2 = 4\alpha\gamma - \beta^2)$ $\xrightarrow{\text{Απόδειξη}}$ $\det(A^*) = \det(P^TAP) = \det(P^T)\det(A)\det(P) = \det(P^T)\det(P)\det(A) = \det(P^TP)\cdot\det(A) = 1\cdot\det(A) = \det(A)$

$\det(3\times3) = \det(3\times3)^*$ (Παράγεται, χωρίς απόδειξη $= J_3$)

$tr(A^*) = tr(P^TAP) = tr(APP^T) = tr(AI) = tr(A)$

Συμπέρασμα: Τα $J_1 = \alpha+\gamma$, $J_2 = 4\alpha\gamma - \beta^2$, $J_3 = \frac{1}{8}\det\begin{pmatrix} 2\alpha & \beta & \delta \\ \beta & 2\gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & 2\zeta \end{pmatrix}$
ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ.

Χρήση αναλλοιώτων στη μελέτη της (Ε)
Τι αναμένω ανάλογα με τις τιμές των $J_1, J_2, J_3 \Rightarrow$ να γνωρίζω τι παριστάνει η εξίσωση

Παραδείγματα: $y^2 = 2x$, $J_1 = 1$, $J_2 = 0$, $J_3 \neq 0$
$x^2 + y^2 = 1$, $J_1 = 2$, $J_2 = 4$, $J_3 \neq 0$
$x^2 - y^2 = 1$, $J_1 = 0$, $J_2 = -4$, $J_3 \neq 0$
$x + y = 0$, $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $J_3 = 0$

Συμπέρασμα: Παίζουν ρόλο τα πρόσημα και αν είναι ή όχι μηδενικά.

1η Βασική διάκριση: $J_3 = 0$ Εκφυλισμός (ΔΕΝ παριστάνει 2-βάθμιο αντικείμενο)

2η — // — : $J_2 \to = 0$; $J_2 \to \neq 0$, $\neq 0 \to > 0$ "Έλλειψη", $\neq 0 \to < 0$ "Υπερβολή"

Αν $J_2 \neq 0 \Rightarrow$ θεωρώ το σύστημα $B \to B^*$, $AH + B^T = 0$, 2×2 σύστημα
$AH = -B^T$, $\det(A) \neq 0$, άρα λύνω ως προς $H \Rightarrow H = -(A^{-1}B^T)$

Τι σημαίνει αυτό? $X = PX^* + H$, H: Διανυσματική Μεταφορά.

Άρα $J_2 \neq 0 \Rightarrow \exists$ μεταφορά, όπου $\nexists\, x, y \Rightarrow$ αποκλείεται να είναι παραβολή

Έστω $\boxed{J_2 \neq 0}$ θεωρώ το πίνακα A συμμετρικό ($\det(A) \neq 0$)
$\exists P$ ώστε P^TAP διαγώνιος?

Θεώρημα: Ένας συμμετρικός πίνακας διαγωνιοποιείται πάντοτε μέσω ενός ορθογώνιου πίνακα!

$\exists P: P^TAP = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix}$

$J_2 \neq 0$: $\exists$ σύστημα που η (Ε) να παίρνει τη μορφή:

$$\alpha^* x^2 + \gamma^* y^2 + J^* = 0$$

Μελέτη: $\alpha^* x^2 + \gamma^* y^2 + J^* = 0$

$J_1 = \alpha^* + \gamma^*$
$J_2 = 4\alpha^*\gamma^*$
$J_3 = \alpha^*\gamma^* J^*$

$$(x, y, 1)\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^* & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & J^* \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

~ $J_3 = 0 \Leftrightarrow J^* = 0 \Rightarrow \alpha^* x^2 + \gamma^* y^2 = 0 \Rightarrow$ τεμνόμενες ευθείες πραγματικές (ή) φανταστικές
↳ εκφυλισμός, δεν είναι 2ο-βάθμια

~ $J_3 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\left(-\frac{J^*}{\alpha^*}\right)} + \dfrac{y^2}{\left(-\frac{J^*}{\gamma^*}\right)} =$

Εξαρτάται από τα πρόσημα των παρονομαστών

- γινόμενο παρονομαστών: $\dfrac{J^{*2}}{\alpha^*\gamma^*}$ → πρόσημο του J_2 → >0, <0

- άθροισμα — // — : επειδή θέλουμε να βρούμε τα πρόσημα αρκεί να βρούμε το πρόσημο του αθροίσματος των αντιστρόφων:

$$-\frac{\alpha^*}{J^*} - \frac{\gamma^*}{J^*} = -\frac{\alpha^* + \gamma^*}{J^*} = \frac{-(J_1)}{\frac{(J_3)}{\alpha^*\gamma^*}}$$

ίδιο πρόσημο με $-\dfrac{J_1 \cdot J_2}{J_3}$

Αν $J_2 < 0 \Rightarrow$ οι παρονομαστές είναι πάντα ετερόσημοι άρα ΥΠΕΡΒΟΛΗ

$J_2 > 0$
- J_1, J_3: ετερόσημα: ΕΛΛΕΙΨΗ
- $J_1 J_3$: ομόσημα: "φανταστική" ΕΛΛΕΙΨΗ

Για $\boxed{J_2 = 0}$ παίρνει τη μορφή $\alpha^* x^2 + \delta^* x + \varepsilon^* y + \zeta^* = 0$

$\alpha^* = 0$ ή $\gamma^* = 0$ ή $\alpha^* x^2 + \varepsilon^* y + \zeta^* = 0$

και πάντα γίνεται διαγώνιος

Τι παριστάνει; — παραβολή
— παράλληλες ευθείες (αν $\varepsilon^* = 0$)

π.χ. $x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 7 = 0$

$J_1 = 2,\ J_2 = 4 - 16 = -12 < 0$

$J_3 \simeq 18 \neq 0 \longrightarrow$ <u>Υπερβολή</u>!

Ποια υπερβολή; $\alpha' x^2 + \gamma' y^2 + \zeta' = 0$

$J_1 = \boxed{\alpha' + \gamma' = 2}$

$J_2 = 4\alpha'\gamma' = -12 \Leftrightarrow \boxed{\alpha'\gamma' = -3}$

$\Rightarrow \boxed{t^2 - J_1 t + \frac{J_2}{4} = 0}$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$$J_3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2\alpha' & & 0 \\ & 2\gamma' & \\ 0 & & 2\zeta' \end{pmatrix} = \alpha'\gamma'\zeta' \Rightarrow \zeta' = \frac{J_3}{\alpha'\gamma'} = \frac{18}{-3} = -6$$

29/5 Χρήση των αναλλοιώτων

1) Να αναγνωρισθεί η εξίσωση: $x^2+3xy+2y^2=0$ στο επίπεδο Oxy

$(x,y)\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$ ή $(x,y,1)\begin{pmatrix}1 & 3/2 & 0\\ 3/2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0$

$J_1=(\alpha+\gamma)=3$

$J_2=(4\alpha\gamma-\beta^2=-1<0$

$J_3=0$

Συμπεράσματα: $J_3=0 \Rightarrow$ Εκφυλισμός

$J_2<0 \rightsquigarrow$ τεμνόμενες ευθείες <u>ΟΧΙ</u> φανταστικές

Πως παριστάνεται στο επίπεδο?

$J_2\neq 0 \Rightarrow \exists$ κέντρο συμμετρίας

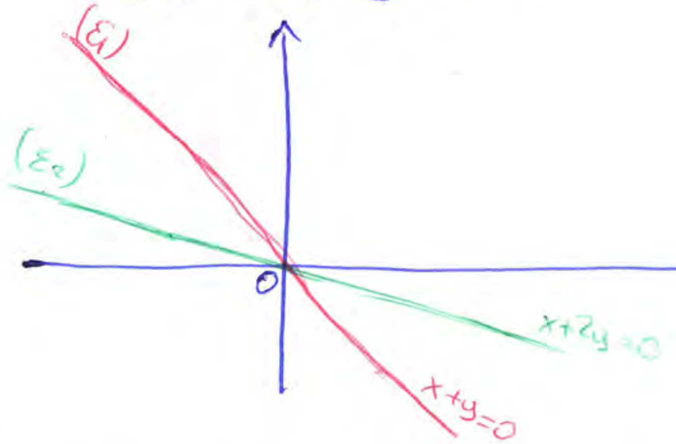
αφού $\nexists$ γραμμικό μέρος το κέντρο είναι το $O(0,0)$

Λύση χωρίς τα αναλλοίωτα ξεκινά από εδώ

$x^2+3xy+2y^2 = x^2+2xy+xy+2y^2=x(x+2y)+y(x+2y)=$
$=(x+y)(x+2y)=0$

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_1): x+y=0\\ (\varepsilon_2): x+2y=0\end{array}\right\}$ τέμνονται στο $O(0,0)$



2) Να αναγνωριστεί η εξίσωση: $x^2+3xy+2y^2=-1$ στο επίπεδο Oxy

$(x,y)\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-1$ ή $(x,y,1)\begin{pmatrix}1 & 3/2 & 0\\ 3/2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0$

$J_1=(\alpha+\gamma)=3$

$J_2=(4\alpha\gamma-\beta^2)=-1<0$

$J_3=-1\neq 0$ (όχι?) ευθείες.

Συμπεράσματα: $J_3\neq 0$

$\underbrace{J_2<0,\ J_3\neq 0}$

$\Downarrow$

Υπερβολή

Πως παριστάνεται στο επίπεδο!

$J_2 \neq 0 \to \exists$ κέντρο συμμετρίας

αφού $\nexists$ γραμμικό μέρος το κέντρο είναι το $O(0,0)$

(x,y) ικανοποιεί την (E)

$(-x,-y)$ — // — — // —

Πως την ζωγραφίζω?

Υπερβολή : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ σε κατάλληλο σύστημα O^*XY.

Το OXY, Oxy διαφέρουν κατά μια στροφή! $\boxed{O^* \equiv O}$

(i) Ποια είναι η στροφή δηλ. η αλλαγή αξόνων

(ii) $a = ?$, $b = ?$

(i) Η γωνία στροφής δίνεται από τον τύπο $\varepsilon\varphi 2\varphi = \frac{\beta}{a-\gamma} = \frac{3}{1-2} = -3$

$$\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 2\varphi} = \sigma\upsilon\nu^2 2\varphi = \frac{1}{1+3^2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu 2\varphi = 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1} \Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}} + 1\right)\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu^2\varphi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{1+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \ldots$$

(ή)

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu 2\varphi = 1 - 2\eta\mu^2\varphi}$$

$$\eta\mu^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \ldots$$

Ο πίνακας στροφής είναι:

$$\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix} = \ldots$$

Θεωρητικά: $x = \sigma\upsilon\nu\varphi X - \eta\mu\varphi Y$

$y = \eta\mu\varphi X + \sigma\upsilon\nu\varphi Y$

$$Oxy \to OXY \to \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

2ος τρόπος: Αναζητώ a^*, γ^*, J^* ώστε (E) $a^*X^2 + \gamma^*Y^2 + J^* = 0$

$$\left.\begin{aligned} a^* + \gamma^* &= J_1 = 3 \\ a^* \cdot \gamma^* &= \frac{J_2}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t^2 - 3t - \frac{1}{4} = 0$$

$$4t^2 - 12t - 1 = 0 \;\Big\}\; t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 16}}{8} = \frac{12 \pm 4\sqrt{10}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$a^*\gamma^* J^* = J_3$

$$J^* = \frac{J_3}{a^*\gamma^*} = \frac{-1}{-\frac{1}{4}} = 4$$

$$\Downarrow$$

$$t_1 = \frac{3+\sqrt{10}}{2} = a^*, \quad t_2 = \frac{3-\sqrt{10}}{2} = \gamma^*$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{10}}{2}\right)X^2 + \left(\frac{3-\sqrt{10}}{2}\right)Y^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\underbrace{\boxed{\frac{-4}{\left(\frac{3+\sqrt{10}}{2}\right)}}}_{<0} = -a^2} + \frac{Y^2}{\underbrace{\boxed{\frac{-4}{\left(\frac{3-\sqrt{10}}{2}\right)}}}_{>0} = b^2} = 1 \quad \Big\} \Rightarrow \boxed{\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1}$$

(Η μορφή της ερώτησης:)
Ποια είναι η απλοποιημένη μορφή και σε ποιο σύστημα συμβαίνει αυτό?

(Απάντηση) $\Rightarrow -\frac{X^2}{a} + \frac{Y^2}{b} = 1$ και ο XY προκύπτει από το Oxy με στροφή κατά γωνία $\hat{\varphi}$, όπου ημφ=..., συνφ=...

② $5x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$

$J_1 = 5+3 = 8$

$J_2 = 4 \cdot 15 - 4 = 56$

$J_3 = \det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(14) = -14 < 0$

$J_2 > 0$, J_1, J_3 : ετερόσημα $\Rightarrow$ έλλειψη.

Ποια έλλειψη;

$a^* X^2 + \gamma^* Y^2 + J^* = 0$

$a^* + \gamma^* = J_1 = 8$

$a^* \cdot \gamma^* = J_2/4 = 56/4 = 14$

a^*, γ^* : ρίζες της εξίσωσης: $t^2 - 8t + 14 = 0 \Rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{64-56}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}$

$\Downarrow$

$a^* = 4+\sqrt{2}$, $\gamma^* = 4-\sqrt{2}$

$J^* = \frac{J_3}{a^*\gamma^*} = -\frac{14}{14} = -1$

$$(4+\sqrt{2})X^2 + (4-\sqrt{2})Y^2 = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{4+\sqrt{2}}}}_{a}\Big)^2} + \frac{Y^2}{\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{4-\sqrt{2}}}}_{b}\Big)^2} = 1$$

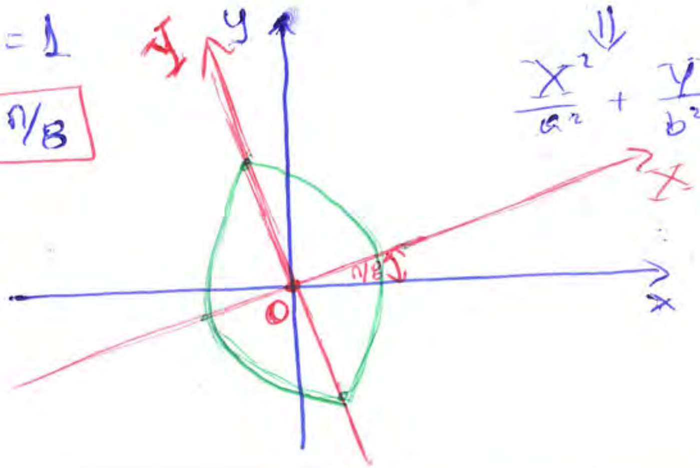
$$\Downarrow$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Σχέση Oxy και OXY:

$\varepsilon\varphi 2\varphi = \frac{\beta}{\alpha - \gamma} = \frac{2}{2} = 1$

$2\varphi = \pi/4 \Rightarrow \boxed{\varphi = \pi/8}$



③ $x^2+2xy+y^2+2x+4y+5=0$

$$(x,\ y,\ 1)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$$

$J_1=2$

$J_2=0$

$J_3=(-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1\neq0$

$\left.\begin{matrix}J_2=0\\J_3\neq0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ Παραβολή

Ποια είναι η απλοποιημένη μορφή!

$\boxed{y^2=\pm2px}$ ή $x^2=\pm2py$

$\Rightarrow J_3=\det\begin{bmatrix}0&0&\pm p\\0&1&0\\\pm p&0&0\end{bmatrix}=(\pm p)(\mp p)=-p^2=J_3$

$J_1=1\neq2$ (που είχαμε βρει στην αρχή)

ΠΡΕΠΕΙ να $J_2=0$

Κάνουμε:
Στροφή κατά 45° (εξαφανίζεται το xy)

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt2}\qquad x^2=\frac{x'^2+y'^2-2x'y'}{2}$$
$$y=\frac{x'+y'}{\sqrt2}\qquad y^2=\frac{x'^2+y'^2+2x'y'}{2}$$
$$2xy=x'^2-y'^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy=\frac{4x'^2}{2}=2x'^2$$

$$\left.\begin{matrix}2x=\dfrac{2x'-2y'}{\sqrt2}\\[2mm]4y=\dfrac{4x'+4y'}{\sqrt2}\end{matrix}\right\}\ 2x+4y=\frac{6x'+2y'}{\sqrt2}=(3\sqrt2)x'+(\sqrt2)y'$$

(Ε) $2(x')^2+(3\sqrt2)x'+\sqrt2y'+5=0$

$$\left[\begin{matrix}\alpha'(x'+k)^2+\varepsilon'y'+J'=0\\\Downarrow\\X^2+\lambda Y=0\end{matrix}\right]$$

$$2\left(x'^2+\frac{3\sqrt2}{2}x'\right)+\sqrt2y'+5=0$$
$$2\left(\underbrace{x'^2+2\cdot\frac{3\sqrt2}{4}x'+\left(\frac{3\sqrt2}{4}\right)^2}-\left(\frac{3\sqrt2}{4}\right)^2\right)+\sqrt2y'+5=0$$
$$2\left(x'+\frac{3\sqrt2}{4}\right)^2+\sqrt2y'+5-2\left(\frac{3\sqrt2}{4}\right)^2=0$$
$$\left(x'+\frac{3\sqrt2}{4}\right)^2+\frac{\sqrt2}{2}y'+\left(5-\frac{\cancel{18}\,9}{\cancel{8}\,4}\right)=0$$
$$\left(x'+\frac{3\sqrt2}{4}\right)^2+\frac{\sqrt2}{2}y'+\frac{11}{4}=0$$
$$\underbrace{\left(x'+\frac{3\sqrt2}{4}\right)^2}_{X}+\underbrace{\frac{\sqrt2}{2}}_{\text{σταθερά: }\lambda}\underbrace{\left(y'+\frac{\cancel{22}\,11}{\cancel{2}4\sqrt2}\right)}_{Y}\Rightarrow$$

$X=x'+\frac{3\sqrt2}{4}$

$Y=y'+\frac{11}{\sqrt2}$

$\Downarrow$

$X^2=-\frac{\sqrt2}{2}Y$

(Τη μετατροπή αυτή την έχουμε βρει στο σύστημα $Ox'y'$ που είναι το σύστημα της στροφής)

2ος τρόπος: Εξ' αρχής: $a^* x^2 + \varepsilon^* y = 0$

$$J_1 = a^*$$

$$J_2 = 0$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} a^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^*/2 \\ 0 & \varepsilon^*/2 & 0 \end{vmatrix} = a^*\left(-\frac{\varepsilon^{*2}}{4}\right) = -\frac{a^*\varepsilon^{*2}}{4}$$

$$J_1 = 2 \Rightarrow \boxed{a^* = 2}$$

$$J_3 = -1 \Rightarrow -\frac{a^*\varepsilon^{*2}}{4} = -1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon^* = \pm\sqrt{2}}$$

Άρα: $2x^{*2} \pm \sqrt{2}y^* = 0$

Επομένως: $(x^*)^2 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} y^*$ (ανοιχτή μορφή)

Σε ποιο σύστημα γίνεται?
$O^*x^*y^*$ που προκύπτει από το Oxy με δύο βήματα

1) στροφή κατά γωνία $2\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

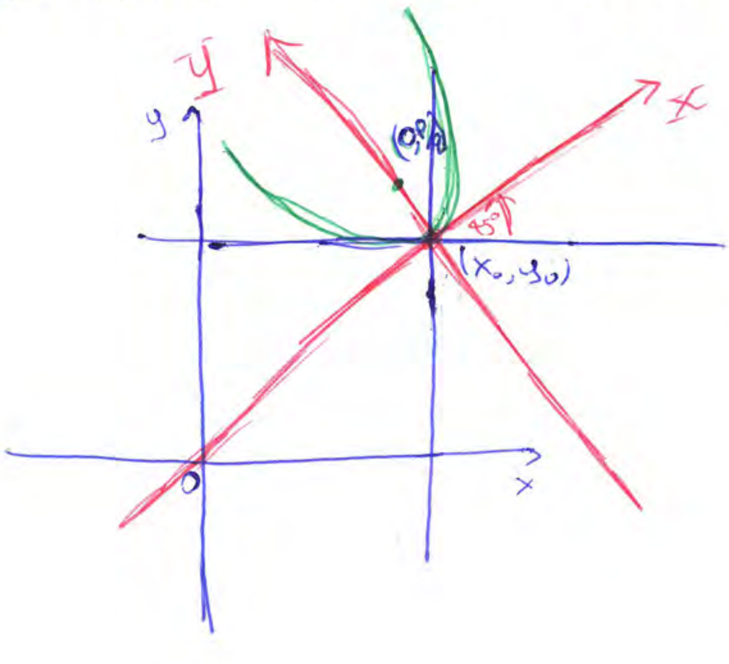
και 2) μεταφορά

Ποιο είναι το αρχικό σημείο μεταφοράς?

$$(2)\ \begin{cases} 2ax_0 + \beta y_0 + \delta = 0 \\ \beta x_0 + 2\gamma y_0 + \varepsilon = 0 \end{cases}$$

(x_0, y_0) Το αρχικό σημείο μεταφοράς

Ποια είναι η εστία κι ποια η διευθετούσα?



$$x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} y = 2\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}_{p} y$$

$E(0, \frac{p}{2})$ ως προς x^*y^*

$$E\left(0, \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$$

$\Downarrow$?

Oxy