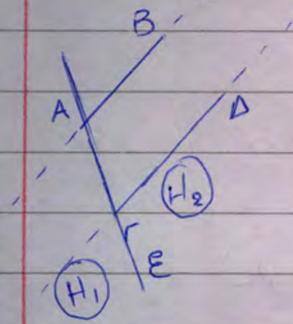
Αναλυτική Γεωμετρία

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (στο χώρο)

- "Διεύθυνση" και "φορά". Δοσμένης μιας ευθείας, αυτή και όλες οι παράλληλές της ορίζουν μια διεύθυνση.



- Τα AB, ΓΔ είναι ομόρροπα όταν η ευθεία ε τα αφήνει στο ίδιο επίπεδο.

Εφαρμοστό διάνυσμα.

$\vec{AB} \equiv (A,B)$. Ευθύγραμμο τμήμα AB με αρχή και τέλος
Χαρακτηριστικά => μέτρο, διεύθυνση, φορά, σημείο εφαρμογής.

→ Δύο εφαρμοστά διανύσματα προστίθενται μόνο όταν έχουν κοινό σημείο εφαρμογής.

→ Το $\lambda\vec{AB}$ έχει ίδια διεύθυνση με το $\vec{AB}$ φορά ίδια με $\vec{AB}$ ($\lambda>0$) και αντίθετη (αν $\lambda<0$) ενώ $|\lambda\vec{AB}|$

Ελεύθερο διάνυσμα

Στο σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων ορίζω μία σχέση ισοδυναμίας ως εξής: $\vec{AB} \sim \vec{\Gamma\Delta} \iff \begin{cases} \text{ίδιο μέτρο} \\ \text{ίδια διεύθυνση} \\ \text{ίδια φορά} \end{cases}$

Αφού έχω μία σχέση ισοδυναμίας δημιουργούνται κλάσεις ισοδυναμίας και το σύνολο πηλίκο θα έχει και αντιπρόσωπο από κάθε κλάση.

$\vec{AB}$ εφαρμοστό διάνυσμα $\Rightarrow [\vec{AB}] = \{\vec{\Gamma\Delta} \mid \vec{AB} \sim \vec{\Gamma\Delta}\} \Rightarrow$ κλάση $\vec{AB}$

(2)

Το ονομάζω ελεύθερο διάνυσμα και το συμβολίζω με $\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega} \ldots$

Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων το λέω $\mathcal{D}$

Για να κατασκευάσω το σύνολο πηλίκο. Επιλέγω ένα σημείο O του χώρου. Από το σημείο O υπάρχει αντιπρόσωπος για κάθε κλάση. Σε κάθε κλάση $\vec{u}$ παίρνω έναν αντιπρόσωπο από το O. Δηλαδή $\overrightarrow{OA}$: Όλα τα διανύσματα από το O (με αρχή το O) είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το $\mathcal{D}$. Αυτά τα διανύσματα τα συμβολίζω με $\mathcal{D}_0$. Αυτό είναι το σύνολο πηλίκο.

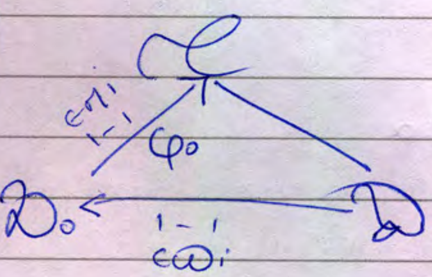
Έστω $\mathcal{E}$ να συμβολίζει το χώρο και O ένα σημείο του χώρου.

<u>Πρόταση</u>: Το $\mathcal{D}_0$ θα ταυτίζεται με το $\mathcal{E}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω Φ_0 μια απεικόνιση από το $\mathcal{E}$ στο $\mathcal{D}_0$ ώστε $\phi_0(\Sigma) = \overrightarrow{O\Sigma}$ $\Sigma \in \mathcal{E}$ και $\phi(\Sigma) \in \mathcal{D}_0$.

Κάθε σημείο του χώρου ορίζεται μέσω του O ένα ελεύθερο διάνυσμα και ένα αντιπρόσωπο του από το O.

<u>Συμπέρασμα</u>



Διανυσμα θα λεμε το ελεύθερο διανυσμα.

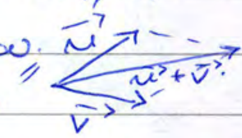
Θεώρημα: Το $\mathcal{D}$ (ελεύθερα διανύσματα) είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 3.

Απόδειξη: Βήμα 1ο: Ορισμός των πράξεων.

~> $+ : \mathcal{D}\times\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ (διανυσματική πρόσθεση). $(\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \vec{u}+\vec{v}$

~> $\cdot : \mathbb{R}\times\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ (Βαθμωτός πολλαπλασιασμός) $(\lambda,\vec{u}) \longmapsto \lambda\vec{u}$

Πρόσθεση: Κανόνας του παραλληλογράμμου.



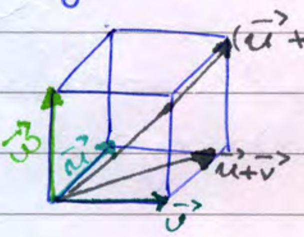
Παίρνω αντιπροσώπους των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ που αρχίζουν από το ίδιο σημείο και προσθέτω με τον κανόνα του παρ/μου, οπότε βρίσκω μια νέα κλάση.
Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος των αντιπροσώπων (απόδειξη με όμοια τρίγωνα).

Πολλαπλασιασμός: Παρόμοια με πρόσθεση.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\to\vec{OA}\\ \lambda\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{OB}=\lambda\vec{OA}\\ \lambda\vec{u}\end{array}$$

Βήμα 2ο: $(\mathcal{D},+,\cdot)$ Είναι διανυσματικός χώρος.

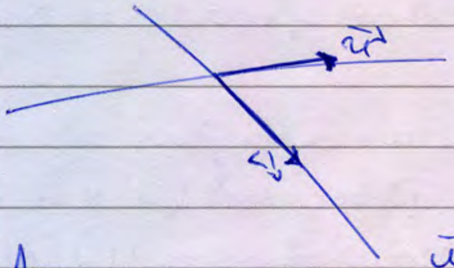
Απόδειξη προσεταιριστικής $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{u}+\vec{w})$



Είναι ίσα ως διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου.

Βήμα 3ο Ποια είναι η διάσταση?
Πρέπει να βρω μια βάση και το πλήθος των στοιχείων της βάσης θα 'ναι η διάσταση.
Πότε $\vec{u}$ και $\vec{v}$ γραμμικά εξαρτημένα?
$\exists\,(r,s)\neq 0$ (όχι και τα 2 0) $: r\vec{u}+s\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}=\left(-\frac{s}{r}\right)\vec{v}=\lambda\vec{v}$
γραμμικά εξαρτημένα = συνευθειακά

$\vec{u}, \vec{v}$ γραμμικά ανεξάρτητα όταν οι φορείς τους είναι τεμνόμενες ευθείες άρα ορίζουν ένα επίπεδο.

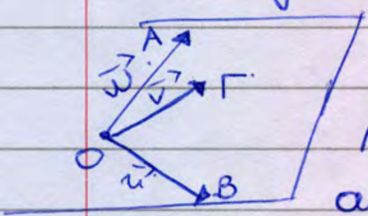


Έστω P το επίπεδο και $\vec{w} \in P$.
Από κανόνα παραλ/μου το $\vec{w} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$
Αλλά $\vec{OM_1} = r\vec{u}$ και $\vec{OM_2} = s \cdot \vec{v}$. Άρα το $\vec{w}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Άρα το P έχει διάσταση 2.

Στο χώρο υπάρχουν τρία διανύσματα που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

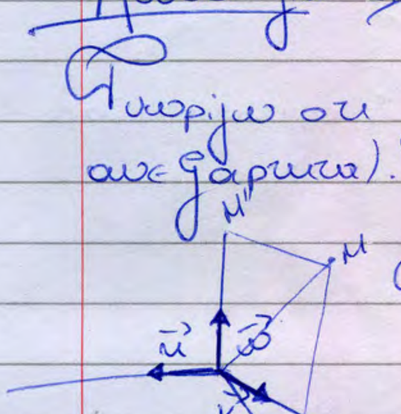
Απόδειξη $O \in \mathcal{C}$ (Π) επίπεδο από το O και $A \notin \Pi$.



O, B, Γ είναι όχι συγγραμμικά
$\vec{w} = \vec{OA}$. Θεωρώ $\vec{u} = \vec{OB}$, $\vec{v} = \vec{O\Gamma}$
Αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ισχυρισμός)
απόδειξη: $t\vec{w} + r\vec{u} + s\vec{v} = 0$.
αν π.χ. $t \neq 0 \Rightarrow \vec{w} = (-\frac{r}{t})\vec{u} + (-\frac{s}{t})\vec{v}$, $w = \lambda\vec{u} + t\vec{v}$
$\vec{w}$ στο επίπεδο των $\vec{v}, \vec{u}$ Άτοπο!

Απόδειξη: (Διάσταση 3).

Γνωρίζω ότι υπάρχουν $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ μη συνεπίπεδα (γραμμικά ανεξάρτητα). Θα αποδείξω ότι παράγουν το χώρο.



$\vec{\sigma} = t\vec{w} + r\vec{u} + s\vec{v}$??
Προβάλλω το M στο επίπεδο των $(\vec{u}, \vec{v})$ παράλληλα με το $\vec{w}$
Οπότε $\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{OM''}$
Αλλά $\vec{OM'} = r\vec{u} + s\vec{v}$ και $\vec{OM''} = t\vec{w}$
Άρα $\vec{\sigma} = \vec{OM} = t\vec{w} + r\vec{u} + s\vec{v}$

30/4/2014

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Εισαγωγή:

O A M (ε)

• Η ευθεία ως άξονας.

$\vec{i}=\vec{OA}$

$(\varepsilon,\vec{i})\equiv(O,\vec{OA})$

$\left(\lambda\vec{OA}=\vec{OM},\ \lambda\in\mathbb{R}\right)$ $\quad M \to \lambda\in\mathbb{R}$.

(ε) 1-1 και επί

Γλώσσα διανυσμάτων: (ε) → μονοδιάστατος γραμμικός χώρος αφού $\vec{OA}$ η βάση του, και το $\mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 1. (ισομορφισμός).

→ Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να το κάνω αυτό?

άξονας.
- επιλέγω αρχή (O A)
- επιλέγω διάνυσμα ($\vec{OA}$).

Για κάθε τέτοια επιλογή έχω και μια ταύτιση με το $\mathbb{R}$.

O A A′

$\mathbb{R}$: $\vec{OM}=x\vec{OA}$, $M\to x\in\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$. $\vec{OM}=x'\vec{OA'}$, $M\to x'\in\mathbb{R}$.

$\vec{OA'}=\rho\vec{OA}$

$x'\vec{OA'}=(x'\rho)\vec{OA}=x\vec{OA}$

$|x'=\rho x.|$

αλλαγή συντεταγμένων.

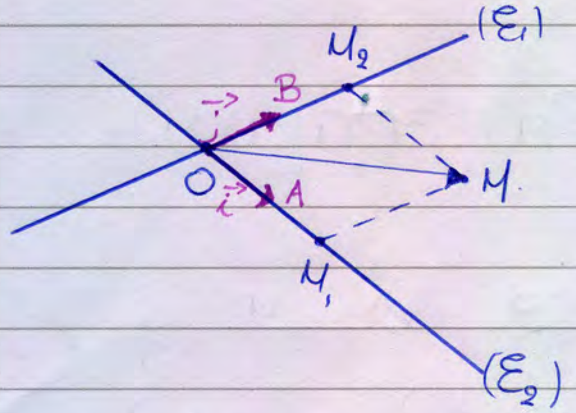
x: συντεταγμένη.

Συντεταγμένες στο επίπεδο:

Ε επίπεδο

Βήμα: 1ο Επιλέγω αρχή, δηλ. σημείο Ο∈Ε.

Βήμα: 2ο Θεωρώ δύο τεμνόμενες ευθείες (όχι απαραίτητα κάθετες μεταξύ τους) και τους καθιστώ άξονες



Ισχυρίζομαι ότι υπάρχει μία απεικόνιση $\varphi : E \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{R}^2$. $\{O, (\vec{i}, \vec{j})\}$.

$M \to (x,y)$

Κατασκευάζω παρ/μο με διαγώνιο $\vec{OM}$ και M_1, M_2 στους άξονες. $x, y \in \mathbb{R}$, $\vec{OM_1} = x\vec{OA}$, $\vec{OM_2} = y\vec{OB}$

$E \to M \longrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (απόδειξη). 1-1 και επί

* αναφερόμαστε πάντα στο ίδιο επίπεδο!

Αυτό λέγεται σύστημα συντεταγμένων και (x,y) συντεταγμ.

Θεώρημα: Έστω $\mathcal{D}$ το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων του επιπέδου. Γνωρίζω ότι το $\mathcal{D}$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 2.* Επιλέγοντας το O έχω μία παράσταση του $\mathcal{D}$, την $\mathcal{D}_0$ ως διανύσματα με αρχή το O. Κάθε επιλογή αξόνων από το O ορίζει ισομορφισμό φ του $\mathcal{D}_0$ και του $\mathbb{R}^2$ ως διανυσματικών χώρων.

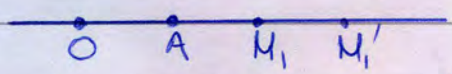
Απόδειξη:
Γνωρίζω ότι το φ που κατασκεύασα πριν είναι 1-1 και επί. $\mathcal{D}_0 \to \vec{u} = \vec{OM} \longrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Πρέπει να είναι γραμμική δηλ. να διατηρεί τις πράξεις.

$\mathcal{D}_0 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0 \arrow[r, "\oplus"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] \arrow[dr] & \mathcal{D}_0 \arrow[d] \\
\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\oplus\ \text{Ιευγμ}"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

$(\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} + \vec{v}$, $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.
Οι συντεταγμένες του αθροίσματος είναι το άθροισμα των συντεταγμένων.

Αυτό ισχύει γιατί ισχύει σε κάθε άξονα



$\vec{OM_1} = x_1\vec{OA}$, $\vec{OM_1'} = x_2\vec{OA}$

$\left(\vec{M_1M_1''} = (x_1 + x_2)\vec{OA} = x_1\vec{OA} + x_2\vec{OA} \right)$, $\vec{OM_1'} = x_2\vec{OA}$

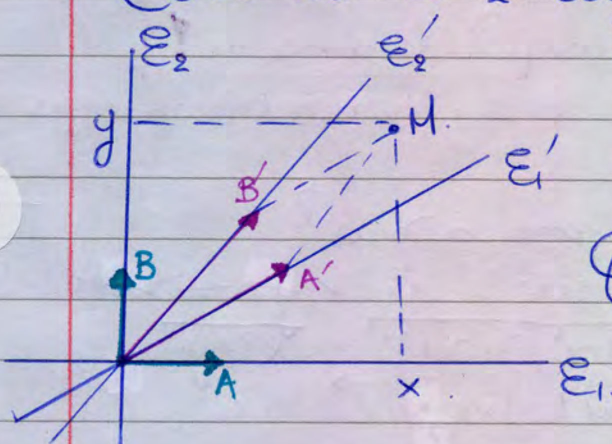
σχέση του Chasles.

Η εισαγωγή των συντεταγμένων στο επίπεδο κάνει δύο πράγματα. $1^{ον}$ $M(x,y)$.
$2^{ον}$ $\vec{u}(\alpha,\beta)$.

Για να γίνει αυτό θέλει επιλογή αρχής και αξόνων

- Άρα πολλά συστήματα συντεταγμένων πώς σχετίζονται μεταξύ τους?

Έστω ότι τα 2 συστήματα έχουν κοινή αρχή
$\{O,(\vec{OA},\vec{OB})\}$.
$\{O,(\vec{OA'},\vec{OB'})\}$.



$M \to M(x,y)$
$M \to M(x',y')$.

Θέλω τα x', y' ως συνάρτηση των x,y και αντίστροφα.
((Οι σχέσεις που θα προκύψουν είναι η αλλαγή των συντεταγμένων)

Λύση: $\vec{OA} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ (*).
$\vec{OM} = x'\vec{OA'} + y'\vec{OB'}$

Όμως $\vec{OA'} = \kappa\vec{OA} + \lambda\vec{OB}$
$\vec{OB} = \mu\vec{OA} + \nu\vec{OB}$

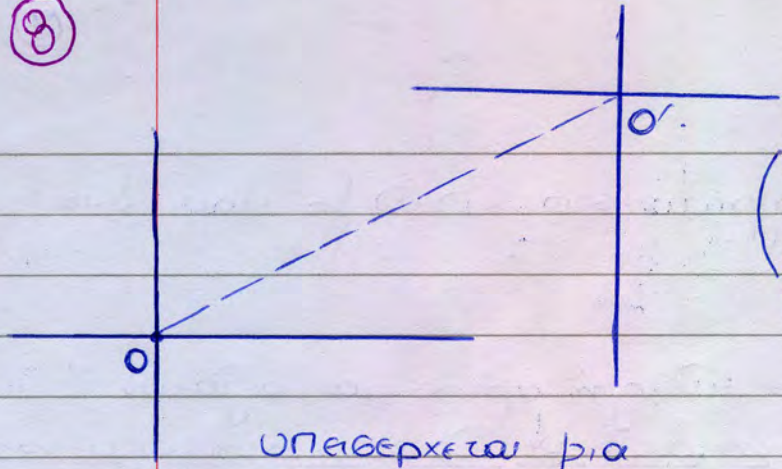
$\vec{OM} = x(\kappa\vec{OA} + \lambda\vec{OB}) + y'(\mu\vec{OA} + \nu\vec{OB})$.
$\vec{M} = (x'\kappa + y'\mu)\vec{OA} + (x'\lambda + y'\nu)\vec{OB}$ (**)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \mu \\ \lambda & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$ → Πίνακας αλλαγής συντεταγμένων.

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' = \kappa\vec{i} + \lambda\vec{j} \\ \vec{j}' = \mu\vec{i} + \nu\vec{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας που προκύπτει είναι αντιστρέψιμος. Άρα
$\det\begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \neq 0$ επειδή $(\varepsilon_1', \varepsilon_2')$ άξονες.

(8)



αντίστροφο

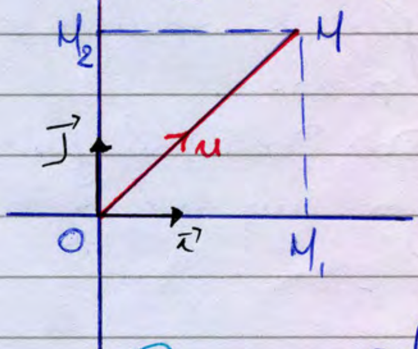
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\kappa & \mu\\ \lambda & \nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$$

υπεισέρχεται μια μεταφορά

Ειδικά συστήματα συντεταγμένων. $\boxed{\text{Ορθοκανονικά!}}$

Οι άξονες είναι κάθετοι και τα διανύσματα αρχής έχουν μήκος 1

$\vec{i} \perp \vec{j}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ Γιατί τα χρησιμοποιούμε?

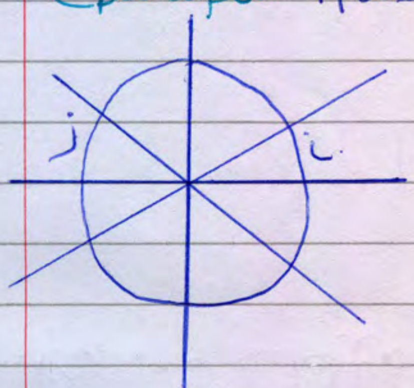


$\vec{u} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ $\quad \vec{u}(x,y) \Longrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|\vec{u}| = |\vec{OM}| = \sqrt{(OM_1)^2+(OM_2)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{OM_1} = x\vec{i}$, $|\vec{OM_1}| = |x| \cdot |\vec{i}| = |x|$

Ερώτημα: Πώς σχετίζονται δύο ορθοκανονικά συστήματα?



$\{\vec{i}, \vec{j}\}$
$\{\vec{i}', \vec{j}'\}$
(Διατεταγμένα)

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{i}'| = |\vec{j}'| = 1$. Τα πάντα καθορίζονται μια γωνία φ.

$\vec{i}' = \cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j}$

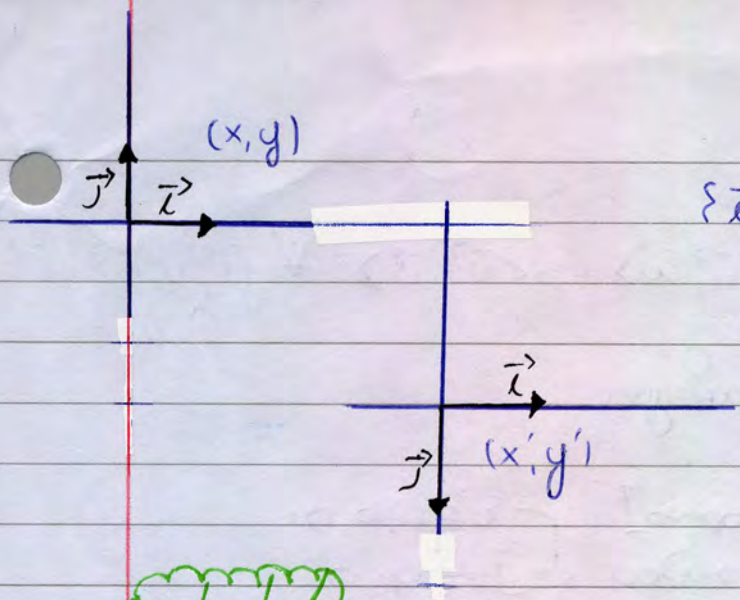
$\vec{j}' = \cos(\pi/2+\varphi)\vec{i} + \sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)\vec{j}$

$\vec{j}' = -\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j}$

$$\begin{Bmatrix}\vec{i}'\\ \vec{j}'\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$ στροφή κατά γωνία φ.

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



$\{\vec{i}, \vec{j}\}$ $\{\vec{i}' = \vec{i}, \vec{j}' = -\vec{j}\}$

$\vec{i}' = 1i + 0j$

$\vec{j}' = 0i + 1j$

$\det(\ ) = -1$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

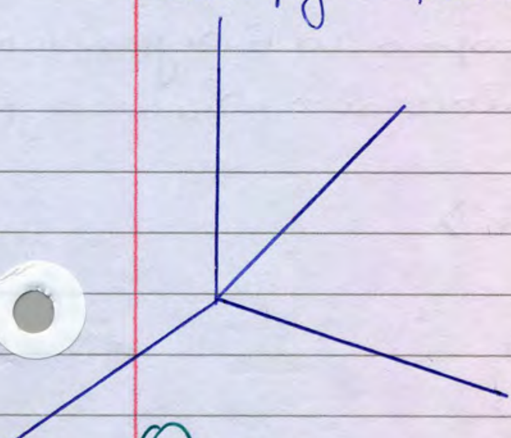
2/5/14

Αναλυτική Γεωμετρία.

Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

Σύστημα αναφοράς: $\mathcal{E}$ = ο χώρος

Επιλέγω ορθοκανονικό σύστημα $(O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$



$\vec{OY} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\mathcal{E} \cong \mathcal{D}_O \cong \mathbb{R}^3$

$|\vec{OY}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^3$

$\vec{i} = (1, 0, 0)$ $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$\vec{j} = (0, 1, 0)$

Ορισμός:

Ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$, είναι μια απεικόνιση $<,> : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Με τις εξής ιδιότητες.

1) Είναι διγραμμική (γραμμική και ως προς τις 2 μεταβλητές)
2) Είναι συμμετρική ($\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$)
3) Είναι θετικά ορισμένη ($\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$).

Έχω την ταύτιση το $\mathbb{R}^3$ με διανύσματα αφού αφού $(x, y, z) =$
$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Σχόλιο Το ① επιφαίνει

$$<\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w}> = \lambda<\vec{u},\vec{w}>+\mu<\vec{v},\vec{w}> \quad \forall\, \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Παράδειγμα-Κύριο παράδειγμα

[Συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο]
Θεωρώ το $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ όπου $\begin{cases}\vec{i}\equiv(1,0,0)\\ \vec{j}\equiv(0,1,0)\\ \vec{k}\equiv(0,0,1)\end{cases}$
και ορίζω το ε.γ. ως εξής:
$<\vec{i},\vec{i}> = <\vec{j},\vec{j}> = <\vec{k},\vec{k}> = 1$ και $<,>$ συμμετρικό
Δηλ. $<\vec{j},\vec{i}> = <\vec{i},\vec{j}>$, $<\vec{k},\vec{j}> = <\vec{j},\vec{k}>$, $<\vec{k},\vec{i}> = <\vec{i},\vec{k}>$

$$<\vec{w}_i,\vec{w}_j> = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$w_i\in\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ $i=1,2,3$

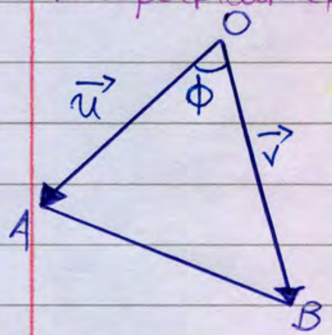
απόδειξη: Αφού θέλω εσωτερικό γινόμενο να είναι γραμμικό και ως προς δύο μεταβλητές. Χρησιμοποιώ αυτό, επειδή είναι γραμμικό και βρίσκω τον τύπο ΔΓΣ.

$$<\vec{u},\vec{v}> = <x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}>$$
$$= x_1x_2<\vec{i},\vec{i}>+y_2x_1<\vec{i},\vec{j}>+x_1z_2<\vec{i},\vec{k}>$$
$$+\ y_1x_2<j,i>+y_1y_2<j,j>+y_1z_2<j,k>+$$
$$+\ z_1x_1<k,i>+z_1y_2<k,j>+z_1z_2<k,k>.$$

Τελικά $<\vec{u},\vec{v}> = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.
$<\,,\,>\ \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $<(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)> = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.
Η απεικόνιση αυτή έχει όλες τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου: διγραμμική, συμμετρική, θετικά ορισμένη

Αυτό λέγεται συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.

Γεωμετρική ερμηνεία του συνήθους εσωτερικού γινομένου



Γενίκευση $\varphi = (\vec{u}, \vec{v})$

$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)(OB)\text{συν}\phi$

$(OA)^2 = |\vec{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$

$(OB)^2 = |\vec{u}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$

$(AB)^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$

$(AB)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + z_1^2 + z_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2.$

$(OA)^2 + (OB)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(OA)(OB)\text{συν}\phi =$

$= -2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\,\text{συν}\phi.$

$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\,\text{συν}\phi$

$\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|\,\text{συν}(\vec{OA}, \vec{OB})$ $\qquad |\vec{u}|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Πρόταση: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$

(Πυθαγόρειο Θεώρημα).

$\iff \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle.$

$\iff \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle.$

$\iff \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle.$

$\iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \iff 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

$\iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

Ορολογία: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, $\vec{u}, \vec{v}$ ορθογώνια (ή κάθετα) $\vec{u} \perp \vec{v}$

Πρόταση (πάντοτε ισχύει)

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2]$ (κανόνας παρ/μου)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$

απόδειξη:

$(+)\ \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2.$

$(-)\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\| - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|v\|^2.$

Πόρισμα Αν ένα παρ/μο έχει δύο ίσες διαγωνίους είναι ρόμβος.

Ίσοι διαγώνιοι: $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle \vec{u},\vec{u}\rangle + 2\langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \langle \vec{v},\vec{v}\rangle$

$= \langle \vec{u},\vec{u}\rangle - 2\langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \langle \vec{v},\vec{v}\rangle$

$= 4\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

Αν έχει κάθετες? $\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}\rangle = 0$

$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle - \langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \langle \vec{v},\vec{u}\rangle - \langle \vec{v},\vec{v}\rangle$

Πρόταση $|\langle \vec{u},\vec{v}\rangle| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ (και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\vec{u},\vec{v}$ συγγραμμικά).

Εποπτική Ερμηνεία: (Cauchy-Schwartz)

Ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου οδηγεί στο $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\,\text{συν}(\vec{u},\vec{v})$.

αφού $|\text{συν}\varphi| \leq 1$ η σχέση ισχύει (• για μη μηδενικά • για μηδενικά ως ισότητα)

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{u}+\lambda\vec{v}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $\varphi(\lambda) = \|\vec{u}+\lambda\vec{v}\|^2$. Προφ. $\varphi(\lambda)\geq 0\ \forall\lambda$

$\varphi(\lambda)$

5/5/14

Σύντομη Επανάληψη

- Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

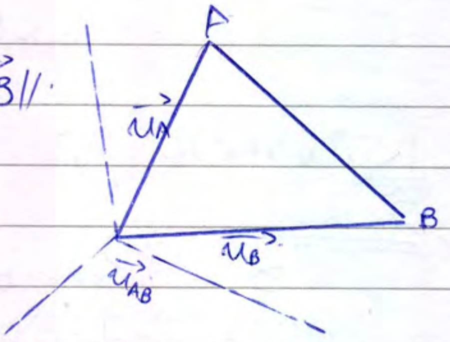
$\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Είναι → Συμμετρικό
→ Διγραμμικό
→ Θετικά ορισμένο.

→ Ανισότητα C-S $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$

Απόσταση στον $\mathcal{E} \cong \mathbb{R}^3$



$A \equiv A(\vec{u}_A)$.

$B \equiv B(\vec{u}_A)$ $\quad d(AB) = \|\vec{u}_A - \vec{u}_B\| = \|\vec{AB}\|$.

$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- $d(A,B) \geq 0$, $\quad d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$.
- $d(A,B) = d(B,A)$.

⊛ $d(A,B) \leq d(A,\Gamma) + d(\Gamma,B)$

$\|\vec{AB}\| \leq \|\vec{A\Gamma}\| + \|\vec{\Gamma B}\| \Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 \leq (\|A\Gamma\|^2 + \|\Gamma B\|^2)$.

$\Leftrightarrow \|\vec{u}_A - \vec{u}_B\|^2 \leq \|\vec{u}_A - \vec{u}_\Gamma\|^2 + \|\vec{u}_\Gamma - u_B\|^2$.

$\Rightarrow \|\vec{u}_A - \vec{u}_B\|^2 = \langle \vec{u}_A - \vec{u}_B, \vec{u}_A - \vec{u}_B \rangle = \langle \vec{u}_A, \vec{u}_A \rangle - 2\langle u_A, u_B \rangle + \langle \vec{u}_B, \vec{u}_B \rangle$.

$\overset{⊛}{\Leftrightarrow} \cancel{\|u_A\|^2} - 2\langle \vec{u}_A, \vec{u}_B \rangle + \cancel{\|u_B\|^2} \leq \cancel{\|u_A\|^2} - 2\langle u_A, u_\Gamma \rangle + \|u_\Gamma\|^2 + \cancel{\|u_B\|^2} - 2\langle u_\Gamma, u_B \rangle + \|u_B\|^2$
$+ 2\|u_A - u_\Gamma\| \cdot \|u_B - u_\Gamma\|$.

$\Leftrightarrow -2\langle u_A, u_B \rangle \leq 2\|u_\Gamma\|^2 - 2\langle u_A, u_\Gamma \rangle - 2\langle u_B, u_\Gamma \rangle + 2\|u_A - u_\Gamma\|\|u_B - u_\Gamma\|$

$\Leftrightarrow \underbrace{-2\langle u_A, u_B \rangle + \langle u_A, u_\Gamma \rangle + \langle u_B, u_\Gamma \rangle - \|u_\Gamma\|^2}_{\|} \leq \|u_A - u_\Gamma\|\|u_B - u_\Gamma\|$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ $\qquad |x| \geq -x$.

$\langle u_A - u_\Gamma, u_B - u_\Gamma \rangle = \langle u_A, u_B \rangle - \langle u_A, u_\Gamma \rangle - \langle u_\Gamma, u_B \rangle + \langle u_\Gamma, u_\Gamma \rangle$.

$|\langle u_A - u_\Gamma, u_B - u_\Gamma \rangle| \leq \|u_A - u_\Gamma\|\|u_B - u_\Gamma\|$ ~~ισχύει~~

Σειρά Εννοιών

1ο βήμα

$\mathcal{E}$ συνήθης χώρος

$(O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$ ορθοκανονικό σύστημα

$\mathcal{E} \cong \mathbb{R}^3$ / $A \equiv A(\vec{u}_A)$ / $\vec{u}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

2ο βήμα

$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \begin{cases} 0, & \vec{u} \neq \vec{w} \\ 1, & \vec{u} = \vec{w} \end{cases}$, $\vec{u}, \vec{w} \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

Γραμμική Επέκταση. $\langle \vec{u}_A, \vec{u}_B \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

3ο βήμα

Γεωμετρική Μετάφραση

$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x^2 + y^2 + z^2$

$\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

και

$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ C-S.

$\boxed{\text{Σχόλιο}}$

Η C-S επιδέχεται μιας ανεξάρτητης αλγεβρικής απόδειξης. $\varphi(\lambda) = \|\vec{u} + \lambda\vec{v}\|^2 \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ C-S

άρα $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$ τότε $\left| \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right| \leq 1$

Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία? Είναι η "γωνία" των 2 διανυσμάτων

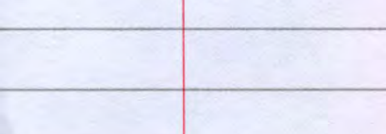
Εφαρμογές

Η έννοια της προβολής

Πρόβλημα: Δίδονται: $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b}$

Ζητούνται: $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ώστε $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$

με $\vec{b}_1 \parallel \vec{a}$ και $\vec{b}_2 \perp \vec{a}$.



Αποσυνθέτοντας τον εσωτερικό φορέα:

- $\vec{b}_2 \perp \vec{a} \Rightarrow \langle \vec{b}_2, \vec{a} \rangle = 0$
- $\vec{b}_1 \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{b}_1 = \lambda \vec{a}$

Άρα $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \Rightarrow \vec{b}_2 = \vec{b} - \vec{b}_1 = \vec{b} - \lambda \vec{a}$

Άλλο $\langle \vec{b} - \lambda \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$, $a \neq 0$

Άρα $\lambda = \dfrac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ μοναδικό.

Άρα $pr_{\vec{a}} \vec{b} = \lambda a = \dfrac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\langle a, a \rangle} \vec{a} = \vec{b}_1$

και

$\vec{b}_2 = \vec{b} - \vec{b}_1$

αριθμός (λ)

$$\|\vec{b}_1\| = \left\| \frac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a} \right\| = \left| \frac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{\|\vec{a}\|^2}} \right| \|\vec{a}\| = \left| \frac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|} \right| = \left| \left\langle \vec{b}, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \right\rangle \right|$$

Γεωμετρική Ερμηνεία $\|\vec{b}\| \cdot \text{συν}(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$.

$\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$: Διανυσματική μονάδα που ορίζει το α.

Αν λοιπόν σταθεροποιήσαμε το $\vec{a} \neq 0$, $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

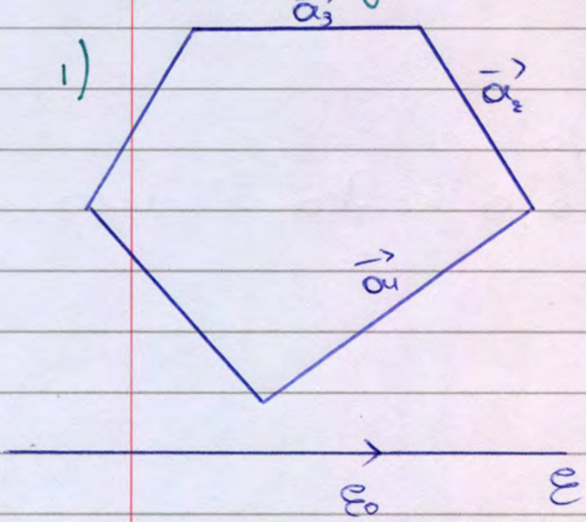
$prob_{\vec{a}} \vec{b} = \langle \vec{b}, \vec{a}_0 \rangle \vec{a}_0 = \dfrac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a}$

Ισχύουν τα εξής:

- $prob_{\vec{a}} (\vec{b} + \vec{c}) = prob_{\vec{a}} \vec{b} + prob_{\vec{a}} \vec{c}$
- $prob_{\vec{a}} (\rho \vec{b} + \vec{c}) = \rho \, prob_{\vec{a}} \vec{b} + prob_{\vec{a}} \vec{c}$.

Εφαρμογή

1)



$$pr_\varepsilon \vec{a}_1 + pr_\varepsilon \vec{a}_2 + \dots + pr_\varepsilon \vec{a}_\nu = 0$$

2) Έστω $c \in \mathbb{R}^3$ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ και η βάση.

$$\vec{c} = prob_{\vec{i}}\, \vec{c} + prob_{\vec{j}}\, \vec{c} + prob_{\vec{k}}\, \vec{c}$$
$$= \boxed{\langle \vec{c}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \vec{c}, \vec{j} \rangle \vec{j} + \langle \vec{c}, \vec{k} \rangle \vec{k}} \quad \text{o.k.}$$

απόδειξη:

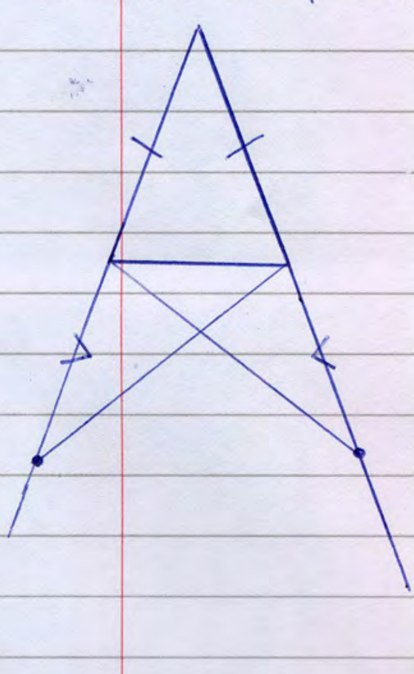
$$c = (c_1, c_2, c_3) = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

με $\vec{i} = (1,0,0)$ / $\vec{j} = (0,1,0)$ / $\vec{k} = (0,0,1)$

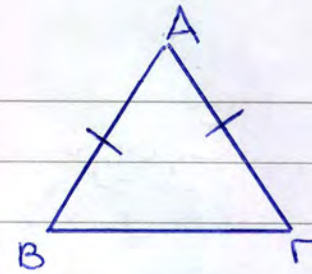
και $\langle \vec{c}, \vec{i} \rangle = \langle \vec{c}_1 i + \vec{c}_2 j + \vec{c}_3 k, \vec{i} \rangle$

$$= c_1 \langle \vec{i}, \vec{i} \rangle + c_2 \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle + c_3 \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = c_1.$$

3) Οι ωραία των βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

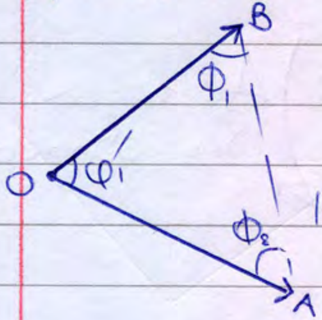


απόδειξη: (από τα στοιχεία! χρησ. ισοσκε-τρίγωνα και μεταφορά ευθ. τμήματος.



απόδειξη II: Σύγκριση $A\hat{B}\Gamma$ με $A\hat{\Gamma}B$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ!



$|\vec{OA}|=|\vec{OB}|$

$\text{συν}\phi_1=\text{συν}\phi_2$ αλλά $\text{συν}\phi_1=\frac{\langle \vec{BO},\vec{BA}\rangle}{|\vec{BO}||\vec{BA}|}$

$\text{συν}\phi_2=\frac{\langle\vec{AO},\vec{AB}\rangle}{|\vec{AO}||\vec{AB}|}$

$|\vec{AO}|=|\vec{BO}|$

$\text{συν}\phi_1=\text{συν}\phi_2 \Leftrightarrow \langle\vec{BO},\vec{BA}\rangle=\langle\vec{AO},\vec{AB}\rangle$

$\Leftrightarrow \langle\vec{BO},\vec{BA}\rangle-\langle\vec{AO},\vec{AB}\rangle=0$

$\Leftrightarrow \langle\vec{BO}+\vec{AO},\vec{BA}\rangle=0$

$\Leftrightarrow \cancel{\langle\vec{AO}+\vec{OB},\vec{BA}\rangle \neq \emptyset}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}$

ΠΕΜΠΤΗ
8 Μαΐου
9-11

Εσωτερικό Γινόμενο

1ον Έννοια του προσανατολισμού σε ένα διανυσματικό χώρο

Έστω V δ.χ. B_1, B_2 βάσεις διατεταγμένες

Λέω $B_1\sim B_2 \Leftrightarrow$ η ορίζουσα του πίνακα αλλαγής βάσης είναι θετική

Ισχυρισμός: Η "$\sim$" είναι σχέση ισοδυναμίας

- $B_1\sim B_2$, $|I_n|=1>0$, $B_1 \underset{M}{\sim} B_2 \Rightarrow B_2 \underset{M^{-1}}{\sim} B_1$ / $\det(M)\cdot\det(M^{-1})=1$ ομόσημοι.
- και

αν $B_1 \underset{M_1}{\sim} B_2$ και $B_2 \underset{M_2}{\sim} B_3$ τότε $B_1\sim B_3$

$M_1M_2 \Rightarrow$ ομόσημα.

Πόσες κλάσεις υπάρχουν? 2 ΑΚΡΙΒΩΣ.

Η επιλογή μιας από τις 2 ορίζει ένα προσανατολισμό

(18)

Εφαρμογή: $\mathbb{R}^3(O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$ ορθοκανονικό
$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ Επιλέγω τον προσανατολισμό και ορίζεται ότι η βάση και τον λέω θετικό.

Παράδειγμα • Έστω 2 βάσεις: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
$\{\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k}\}$ Δεν ορίζουν τον ίδιο προσανατολισμό

Ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = -1 < 0$$

• Έστω $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\{\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \quad \det(B) = -1$$

Δεν ορίζουν τον ίδιο προσανατολισμό

• Έστω $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
$\{\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}, \sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}, k\}$.

$$\Gamma = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \det(\Gamma) = 1 > 0$$

Ορίζουν

Πρόβλημα: Δίνονται $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\neq 0$. Ζητείται $\vec{c}$

ώστε $\vec{c} \perp$ στο επίπεδο των $\vec{a}$ και $\vec{b}$
$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ θετικά προσανατολισμένη.

? $\vec{c}$ Αν απαιτήσω και για το μήκος ορίζεται μονοσήμαντα

Συντομη Επαναληψη

$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ εξωτερικό γινόμενο

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ = αναπτυγμα ως προς την 1η γραμμή

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.
- $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.
- $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \eta\mu(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

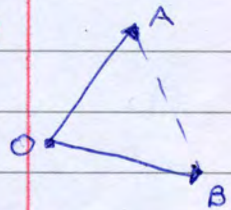
κυκλος $\left(\begin{matrix} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{matrix} \right)$

- $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, c)$

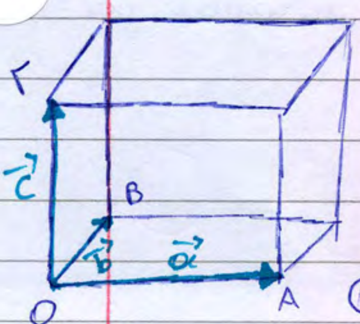
$\vec{a}, \vec{b}$ γραμμικα ανεξαρτητα δηλ. οχι συνεπιπεδα $\Leftrightarrow \langle \vec{a} \times \vec{b}, c \rangle \neq 0$

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$

- $\mathcal{E}(OAB) = \frac{1}{2} \|\vec{OA} \times \vec{OB}\|$



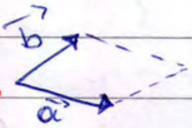
→ Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ οχι συνεπιπεδα ο ογκος του παραλληλεπιπεδου που ορίζουν είναι $|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|$



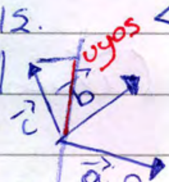
Συμφωνα με το σχημα εχουμε οτι

$V = \mathcal{E}(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma) \times \acute{\upsilon}\psi o\varsigma$.

→ ΕΜΒΑΔΟΝ ΒΑΣΗΣ.



$\mathcal{E}(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$



→ ΥΨΟΣ

Φερνω καθετη στο επιπεδο των $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ και προβαλλω το $\vec{c}$ στην καθετη.

υψος : $\|prob_{(\vec{a} \times \vec{b})} \vec{c}\|$

Υπενθυμιση $prob_{\vec{y}} \vec{x} = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \vec{y}$ Επομενως $prob_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = \frac{\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle}{\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle} (\vec{a} \times \vec{b})$

Άρα $\text{prob}_{(\vec{a}\times\vec{b})}\vec{c} = \left|\frac{\langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle}{\langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\rangle}\right| \|\vec{a}\times\vec{b}\| = \frac{|\langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|$

$$= \underbrace{\boxed{\left|\frac{\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\right|}}_{\text{ύψος}}$$

Άρα τελικά $V=\|\vec{a}\times\vec{b}\|\frac{|\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}$

$$\Leftrightarrow \boxed{V=|\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle|}$$

Αν $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ / $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ / $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

$$|\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle| = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$$

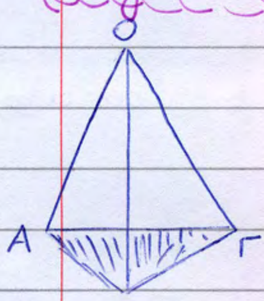
$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = |\det\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}|$$

Πόρισμα Τα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow \langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle=0$

Το $\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle$ / $\langle\vec{b}\times\vec{c},\vec{a}\rangle$ / $\langle\vec{c}\times\vec{a},\vec{b}\rangle$ λέγεται μικτό γινόμενο.

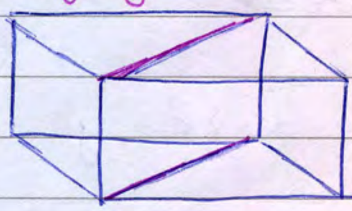
→ και απόλυτο τιμή είναι ίδια γιατί παριστάνουν τον όγκο του ίδιου παραλληλεπιπέδου

Όγκος τετραέδρου (πυραμίδα)



$$V(O.AB\Gamma)=\frac{1}{3}E(AB\Gamma)(\text{ύψος})$$

Εξήγηση του τύπου



Έχω δυο τριγωνικά πρίσματα.

Φέρνω διαγωνίους και φτιάχνω 3 τριγωνικές πυραμίδες με κοινό ύψος (όλα μεταξύ τους) και έχουν και ίσες βάσεις (βάσεις του πρίσματος.

Ισχυρίζομαι ότι έχουν και ίσους όγκους. (οι 3 πυραμίδες που προέκυψαν).

Άρα έχουμε ότι $V(O.AB\Gamma) = \frac{1}{6} V(\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\})$

άρα $\boxed{V = \frac{1}{6} |\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

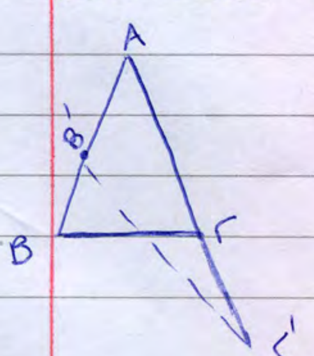
① Αν $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 1$ και $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ και $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$.
Βρίσκω $\|\vec{c} \times \vec{d}\|$ και αποδεικνύω ότι $(\vec{a} \times \vec{b}) \parallel (\vec{c} \times \vec{d})$.

Έχουμε ότι $\vec{c} \times \vec{d} = (3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = 3(\overset{0}{\cancel{\vec{a} \times \vec{a}}}) - 6(\vec{a} \times \vec{b}) + 2(\vec{b} \times \vec{a})$
$- 4(\overset{0}{\cancel{\vec{b} \times \vec{b}}}) = -6(\vec{a} \times \vec{b}) - 2(\vec{a} \times \vec{b}) = (-8)(\vec{a} \times \vec{b}) \parallel (\vec{a} \times \vec{b})$.

Επίσης $\|\vec{c} \times \vec{d}\| = |-8| \|\vec{a} \times \vec{b}\| = 8$.

(Ορίζουσα συντελεστών $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8$)

② Ένα τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ έχει εμβαδόν 2 τ.μ. Στο AB λαμβάνω σημείο B' ώστε $\vec{AB'} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ και στο $\vec{A\Gamma}$ σημείο Γ' ώστε $\vec{A\Gamma'} = 5\vec{A\Gamma}$.
Ζητείται το εμβαδόν του τριγώνου $AB'\Gamma'$.



$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{A\Gamma}\|$

$E(AB'\Gamma') = \frac{1}{2} \|\vec{AB'} \times \vec{A\Gamma'}\| = \frac{1}{2} \|(\frac{1}{2}(\vec{AB})) \times 5(\vec{A\Gamma})\|$

$= \frac{5}{4} \|\vec{AB} \times \vec{A\Gamma}\|$

Τύπος $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \langle \vec{a},\vec{c}\rangle \vec{b} - \langle \vec{b},\vec{c}\rangle \vec{a} = *$

Υπολογισμός του $\langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\times\vec{d}\rangle$.

Παρατήρηση: $\langle \vec{x}\times\vec{y}, \vec{z}\rangle = \det\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\} = -\det\{\vec{x},\vec{z},\vec{y}\}$
$= -\langle \vec{x}\times\vec{z}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{z}\times\vec{x}, \vec{y}\rangle$.

$$\langle \vec{a}\times\underbrace{\boxed{\vec{b}}}_{y}, \underbrace{\boxed{\vec{c}\times\vec{d}}}_{z}\rangle = \langle \underbrace{(\vec{c}\times\vec{d})\times\vec{a}}_{\text{τύπος}}, \vec{b}\rangle = \langle \langle \vec{c},\vec{a}\rangle\vec{d} - \langle \vec{d},\vec{a}\rangle\vec{c}, \vec{b}\rangle$$

$$= \langle \langle \vec{c},\vec{a}\rangle\vec{d}, \vec{b}\rangle - \langle \langle \vec{d},\vec{a}\rangle\vec{c}, \vec{b}\rangle$$

$$= \langle \vec{c},\vec{a}\rangle\langle \vec{d},\vec{b}\rangle - \langle \vec{d},\vec{a}\rangle\langle \vec{c},\vec{b}\rangle =$$

$$\begin{vmatrix} \langle \vec{a},\vec{c}\rangle & \langle \vec{a},\vec{d}\rangle \\ \langle \vec{b},\vec{c}\rangle & \langle \vec{b},\vec{d}\rangle \end{vmatrix} = \langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\times\vec{d}\rangle. *$$

Υπολογισμός του $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a},\vec{a}\rangle & \langle \vec{a},\vec{b}\rangle \\ \langle \vec{b},\vec{a}\rangle & \langle \vec{b},\vec{b}\rangle \end{vmatrix}$

$= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\langle a,b\rangle)^2 \geq 0 \iff |\langle \vec{a},\vec{b}\rangle| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ (C-S)

$= 0 \iff \vec{a}\times\vec{b} = 0 \iff \vec{a},\vec{b}$ συγγραμμικά

Εμβαδόν παρ/μου με πλευρές a, b στο ^{2}.

Να αποδειχτεί ότι

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (εν γένει)

γιατί δεν είναι πάντα ίσα?

$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = \langle \vec{b},\vec{a}\rangle\vec{c} - \langle \vec{c},\vec{a}\rangle\vec{b} \Rightarrow$ των $\{\vec{c},\vec{b}\}$ στο επίπεδο

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \langle \vec{a},\vec{c}\rangle\vec{b} - \langle \vec{b},\vec{c}\rangle\vec{a} \Rightarrow \{\vec{a},\vec{b}\}$ διαφορετικά

Λύσεις απόδειξη με αντιπαράδειγμα.

- $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = 0$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \langle \vec{a},\vec{c}\rangle\vec{b} - \langle \vec{b},\vec{c}\rangle\vec{a}$

$(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = \langle \vec{c},\vec{b}\rangle\vec{a} - \langle \vec{a},\vec{b}\rangle\vec{c}$

$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = \langle \vec{b},\vec{a}\rangle\vec{c} - \langle \vec{c},\vec{a}\rangle\vec{b} = 0$