ΤΜΗΜΑ [redacted] ΑΣΚΗΣΗ 2

ΜΕΡΟΣ (Α) Έστω $(V, \langle\,\rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και W υπόχωρος του V, $\dim W$ πεπερασμένο. Τότε, θεωρούμε γνωστό ότι, κάθε στοιχείο x του V παριστάνεται μονοσήμαντα σαν άθροισμα :

$x = w + w^{\perp}$, όπου $w \in W$ και $w^{\perp} \in W^{\perp}$.

(α) Δείξτε ότι $\|x\|^2 = \|w\|^2 + \|w^{\perp}\|^2$

(β) Η διαδικασία $x \longmapsto w$ ορίζει μια αντιστοιχία $P_W : V \to W$. Αποδείξτε ότι, η P_W είναι συνάρτηση (: Δηλ. μονοσήμαντη αντιστοιχία).

(γ) Να αποδειχθεί ότι $\|x - P_W(x)\| \le \|x - y\| \quad \forall y \in W$. Επιπλέον, η ισότητα ισχύει τότε και μόνον τότε αν $y = P_W(x)$.

ΜΕΡΟΣ (Β) Έστω $V = C_{\mathbb{R}}([-1,1])$ οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[-1,1]$. Στον V θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την σχέση $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ και έστω

$S = \{x_0, x_1, x_2\}$ με $x_n(t) = t^n$; $n = 0, 1, 2$.

(1) Με χρήση της μεθόδου Gram-Schmidt να υπολογισθεί μια ορθοκανονική βάση της γραμμικής θήκης $W = \mathcal{L}(S)$, του S.

(2) Έστω $f(x) = \sin \pi x$, $x \in [-1,1]$. Θεωρούμε το f σαν στοιχείο του $(V, \langle,\rangle)$. Να υπολογισθεί η "ορθή προβολή" του f στον υπόχωρο $W = \mathcal{L}(S)$. και να βρεθεί εκείνο το πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2, που βρίσκεται στη μικρότερη δυνατή ($\|\cdot\|$-) απόσταση από την f (: $\|\cdot\|$ = η νόρμα που ορίζεται από το $\langle,\rangle$)
(Υπόδειξη : Να χρησιμοποιήσετε το (Α)(γ).)

(3) Να γίνει το ίδιο για την συνάρτηση $g(x) = e^{x}$ $(x \in [-1,1])$

— * —

ΤΜΗΜΑ [redacted] ΑΣΚΗΣΗ 1

Εστω $V = C_{\mathbb{R}}([0,2\pi])$ οι συνεχεις πραγματικες συναρτησεις με πεδιο ορισμου το $[0,2\pi]$ και $\langle\, ,\rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ με τυπο $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$.

(1) Να αποδειχθει οτι το ζευγαρι $(V,\langle\, ,\rangle)$ ειναι χωρος εσωτερικου γινομενου.

(2) Εστω $S=\{u_0,u_1,u_2,\dots\}$ με $u_0(x)=1$, $u_{2\eta-1}(x)=\cos\eta x$, $u_{2\eta}(x)=\sin\eta x$, $\eta=1,2,\dots$. Να αποδειχθει οτι για $m\neq\eta$ ισχυει η σχεση $\int_0^{2\pi} u_\eta(x)u_m(x)\,dx=0$ και απο αυτο να συμπερανετε οτι για $m\neq\eta$ το u_m ειναι "ορθογωνιο" στο u_η.

(3) Να αποδειχθει οτι $\langle u_{2\eta-1},u_{2\eta-1}\rangle = \langle u_{2\eta},u_{2\eta}\rangle = \pi$ και απο εδω να συμπερανετε οτι το συνολο $\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\dots\}$ οπου $\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_{2\eta-1}(x)=\frac{\cos\eta x}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_{2\eta}(x)=\frac{\sin\eta x}{\sqrt{2\pi}}$, $\eta\geq 1$ αποτελει ενα ορθοκανονικο υποσυνολο του V.

(4) Σταθεροποιουμε ενα $k\in\mathbb{N}$, θεωρουμε $T_k=\{\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{2k}\}$ και $W_k=\mathcal{L}(T_k)$ τη γραμμικη θηκη του T_k στο V. Εστω $f\in C_{\mathbb{R}}([0,2\pi])=V$. Τοτε, οπως ειναι γνωστο, η "προβολη" f_k του f στον W_k δινεται απο τον τυπο:

$$f_k=\sum_{\eta=0}^{2k}\langle f,\varphi_\eta\rangle\varphi_\eta$$

οπου $\langle f,\varphi_\eta\rangle$ ειναι οι "συντελεστες Fourier" του f ως προς T_k.

Να αποδειχθει οτι: $f_k(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\eta=1}^{k}(a_\eta\cos\eta x+b_\eta\sin\eta x)$

οπου $a_\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos\eta x\,dx$ και $b_\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin\eta x\,dx$

$\eta=1,2,\dots,k$.

— * —

*

$x = x_1 + x_2 \;,\; x_1 \in W ,\; x_2 \in W^{\perp}$

$x \mapsto f(x) = x_1 - x_2$

Να αποδειχθεί ότι:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

2) $f^2(x) = x$

3) $\|f(x)\| = \|x\|$

4) $\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$

Απόδειξη

1) $\left. \begin{array}{l} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$

$f(x+y) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)$

$= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = f(x) + f(y)$

$\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2$

$f(\lambda x) = (\lambda x_1) - (\lambda x_2) = \lambda [x_1 - x_2] = \lambda f(x)$

2) $x = x_1 + x_2$

$f(x) = x_1 - x_2 = x_1 + (-x_2)$

$\Rightarrow f^2(x) = f(x_1 + (-x_2)) = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = x.$

3) $\|f(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2.$

4) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle$

$\langle x, y \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle$

$\Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

Αποδ.

$\|f(x) - f(y)\|^2 = \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle =$

$= \langle f(x), f(x) \rangle - 2 \langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle$

$= \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x - y, x - y \rangle = \|x-y\|$

3) Έστω το σύνολο $S^2 \subset \mathbf{R}^3 = \{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3 / u^2+v^2+w^2=1\}$ (Μοναδιαία σφαίρα).

Αν $U=\{(u,v)\in \mathbf{R}^2/\ u^2+v^2<1\}$ τότε η απεικόνιση $\mathbf{x_1}=\mathbf{x_1}(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$, $(u,v)\in U$, είναι ένα σύστημα συν/νων του οποίου η εικόνα $\mathbf{x_1}(U)$ είναι ένα ανοικτό (υπο)σύνολο της S^2 πάνω από το uv-επίπεδο (το άνω ημισφαίριο της σφαίρας S^2 χωρίς τον ισημερινό του).

■ Ισχύει η συνθήκη I, μια και με $(u,v)\in U$ και $u^2+v^2<1$ οι συναρτήσεις u,v, $\sqrt{1-u^2-v^2}$ είναι διαφορίσιμη κλάσεως C^m $(m\geq 1)$.

■ Ισχύει η συνθήκη II, μια και $\det\dfrac{\theta(u,v)}{\theta(u,v)}=1\neq 0$, για κάθε σημείο του U.

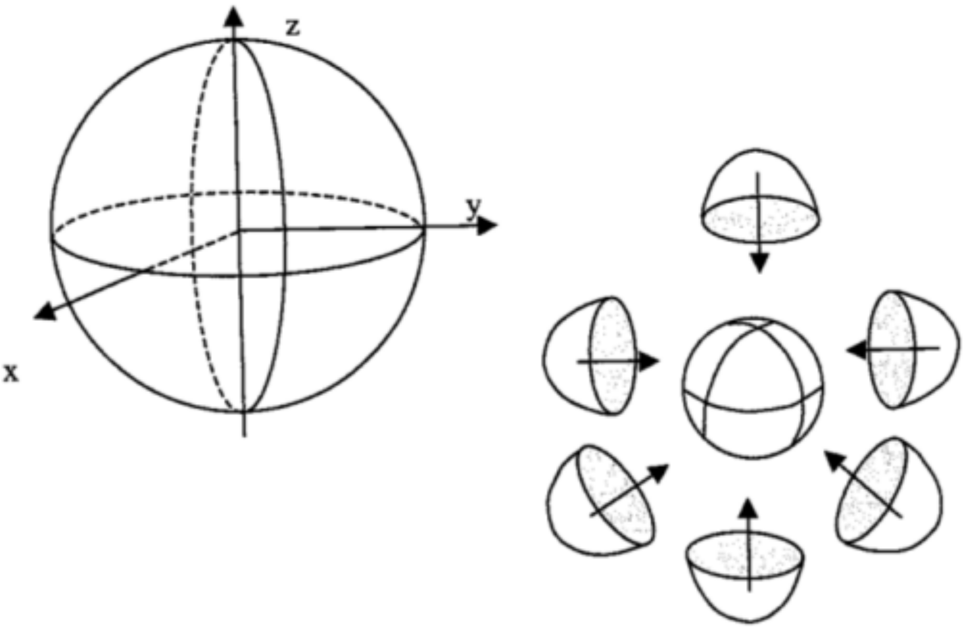
■ Ισχύει η συνθήκη III, μια και η $\mathbf{x_1}$ είναι προφανώς 1-1 και η αντίστροφή της $\mathbf{x_1}^{-1}$: $\mathbf{x_1}(U)\subset \mathbf{R}^3 \to U \subset \mathbf{R}^2$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x_1}(U)$. Η $\mathbf{x_1}(U)$ είναι συνεχής γιατί είναι ίση με τη συνάρτηση προβολή $\boldsymbol{\pi}_3$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$.του $\mathbf{x_1}(U)$ πάνω στο uv-επίπεδο:

$$\mathbf{x_1}^{-1}(u,v,w)=\boldsymbol{\pi}_3(u,v,w)=(u,v).$$

Άρα το $\mathbf{x_1}$ είναι ένα σύστημα συν/νων της S^2.

Το $\mathbf{x_1}$ όμως δεν καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια της S^2. Για να πετύχουμε κάτι τέτοιο θα θεωρήσουμε άλλα πέντε ανάλογα συστήματα συν/νων, τα:

$$\mathbf{x_2}=\mathbf{x_2}(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2}),\quad \mathbf{x_3}=\mathbf{x_3}(u,w)=(u,\sqrt{1-u^2-w^2},w),$$
$$\mathbf{x_4}=\mathbf{x_4}(u,w)=(u,-\sqrt{1-u^2-w^2},w),\quad \mathbf{x_5}=\mathbf{x_5}(v,w)=(\sqrt{1-v^2-w^2},v,w),$$
$$\mathbf{x_6}=\mathbf{x_6}(v,w)=(-\sqrt{1-v^2-w^2},v,w).$$



Σχήμα 2.6

Παρατηρούμε ότι, οι περιοχές συν/νων $\mathbf{x_1}(U)$, $\mathbf{x_2}(U)$ καλύπτουν όλη την επιφάνεια της S^2, εκτός από τον ισημερινό $\{(u,v,w)\in \mathbf{R}^3/\ u^2+v^2=1,\ w=0\}$. Όλες όμως μαζί καλύπτουν πλήρως την επιφάνεια της S^2 και επομένως η S^2 αποτελεί μια κανονική επιφάνεια (σχήμα 2.6).

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ | Α.Μ.: .... | 25-02-2003

ΘΕΜΑ 1 Ποιες απο τις επομενες προτασεις ειναι σωστες και ποιες λαθος. Αιτιολογειστε κατα συντομο τροπο τις απαντησεις-σας.

α) Αν $\vec{a}, \vec{b}$ ειναι διανυσματα του χωρου με $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, τοτε $\vec{a} = \pm \vec{b}$

β) Τα σημεια $A(1,-1,3)$ και $B(2,4,6)$, βρισκονται σε διαφορετικους ημιχωρους ως προς το επιπεδο $3x-2y+z=5$

γ) Για καθε τιμη του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξισωση $x^2-4xy+2y^2+3x+\lambda=0$ παριστανει υπερβολη.

δ) Εστω $(V, \langle , \rangle)$ διανυσματικος χωρος εσωτερικου γινομενου, $\dim V = 8$. Τοτε στον V υπαρχουν 9, μη μηδενικα, ανα δυο ορθογωνια στοιχεια

ε) Στο συνηθη χωρο θεωρουμε τα, μη συνευθειακα σημεια A, B, Γ και σημειο Δ τετοιο ωστε $\vec{O\Delta} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{6}\vec{O\Gamma}$. Τοτε το σημειο Δ βρισκεται στο εσωτερικο του τριγωνου $AB\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2 (α) Ευθεια μεταβαλλεται στο επιπεδο ωστε να σχηματιζει με τους θετικους ή αρνητικους ημιαξονες ενος ορθοκανονικου συστηματος, ορθογωνιο τριγωνο σταθερου εμβαδου. Να αποδειχθει οτι το μεσον της υποτεινουσας του τριγωνου βρισκεται σε κωνικη τομη, το ειδος της οποιας να προσδιορισθει.

(β) Στο χωρο, θεωρουμε ενα ορθοκανονικο συστημα και τα σημεια $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ και $\Gamma(0,0,1)$. Να αποδειχθει οτι τα σημεια $M(x,y,z)$ για τα οποια ισχυει $|\vec{MA}| = |\vec{MB}| = |\vec{M\Gamma}|$ κεινται επι ευθειας καθετης στο επιπεδο του τριγωνου $AB\Gamma$.

ΘΕΜΑ 3 Στο επιπεδο και ως προς ενα ορθοκανονικο συστημα $O.xy$ δινεται η εξισωση: (E) $x^2-6xy+y^2-8x+8y+12=0$.
Να βρεθει το ειδος της καμπυλης που παριστανει η (E) και η κανονικη της εξισωση. Να βρεθουν επισης οι συντεταγμενες των εστιων της (E) στο συστημα $O.xy$. [Υπενθυμιση: Οι τυποι των στροφων στο επιπεδο: $x = x'\text{συν}\theta - y'\eta\mu\theta$, $y = x'\eta\mu\theta + y'\text{συν}\theta$].

ΘΕΜΑ 4 (α) Εστω το επιπεδο (Π): $3x+2y+z=6$ και η ευθεια (ε): $\frac{x}{3} = y = \frac{z}{4}$. Αν Α ειναι το σημειο τομης των (Π) και (ε), να βρειτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το σημειο Α, βρισκεται πανω στο επιπεδο (Π) και ειναι καθετη στην ευθεια (ε).

(β) Δινονται οι ευθειες ε_i, $i=1,2,3$ με παραμετρικες εξισωσεις

(ε_1) : $\{x=3t-7,\ y=-2t+4,\ z=3t+4\}$

(ε_2) : $\{x=t+1,\ y=2t-9,\ z=-t-12\}$

(ε_3) : $\{x=2t-5,\ y=-3t+1,\ z=-4t\}$.

Να αποδειχθει οτι οι (ε_1) και (ε_2) ειναι ασυμβατες, ενω η (ε_3) ορθογωνια προς τις (ε_1) και (ε_2). Να βρεθει η αποσταση των (ε_1) και (ε_2).

ΘΕΜΑ 5 Να ευρεθει η εξισωση της κωνικης επιφανειας με κορυφη το σημειο $A(0,0,2)$ και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $\{x=1,\ y^2+z^2=1\}$. Στη συνεχεια να ευρεθει η τομη της κωνικης επιφανειας με το επιπεδο xy.

ΘΕΜΑ 6: Θεωρουμε το διανυσματικο χωρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμενο με το εσωτερικο γινομενο $\langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle = 2\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

(α) Δινονται τα διανυσματα $c=(1,-1,0)$ και $d=(1,1,1)$ και ζητουνται διανυσματα u και v τετοια ωστε v, c συγγραμμικα, $u\perp c$ και $d=v+u$.

(β) Εστω $\ell=(1,0,3)$ και $W=\mathcal{L}(\{u,v\})$, ο υποχωρος που παραγεται απο τα u, v του ερωτηματος (α). Να ευρεθουν οι προβολες του ℓ στους W και $W^{\perp}$.

Να απαντηθουν μονον 4 απο τα 6 θεματα.

Καλη Επιτυχια

Αγαπητοί φοιτητές ΠΑΡΑΚΑΛΕΙΣΘΕ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΕΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ:

Ο Αριθμός Μητρώου σας να γραφεί ***καθαρά.*** Επίσης παρακαλείσθε να έχετε πάνω στο έδρανο σας ***φοιτητική και αστυνομική ταυτότητα.*** Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3.00΄ ώρες. Δια λόγους ***κοινής νοημοσύνης***, απαγορεύεται το κάπνισμα.

Από τα παρακάτω θέματα θα απαντήσετε σε 4 που καθένα τους πέρνει 2,5 μονάδες.

Στα θέματα της εξέτασης τα **ΕΝΤΟΝΑ(BOLD)** γράμματα δηλώνουν διανύσματα

Εάν και εφόσον το θεωρείται σκόπιμο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι:

Συνθήκη παραλληλίας ευθείας και επιπέδου: ε // Π αν και μόνον αν ακ+βλ+γμ=0

ΘΕΜΑ 1. Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, Μ, Ν, όπου τα Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά και επιπλέον ισχύει **ΑΜ**=(1/3)**ΑΒ** και **ΑΝ**=(2/3)**ΑΓ**. Εστω Θ το σημείο τομής των ευθειών ΒΝ και ΓΜ. Να αποδείξετε ότι

α) **ΑΘ**=(1/7)**ΑΒ**+(4/7)**ΑΓ**

β) Για τα εμβαδά Ε(ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ, και Ε(ΑΜΘΝ) του τετραπλεύρου ΑΜΘΝ, ισχύει Ε(ΑΜΘΝ) =(2/7)Ε(ΑΒΓ)

ΘΕΜΑ 2. Δίδεται καμπύλη του επιπέδου που έχει εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi\psi+\gamma\psi^2+\delta=0$.

Α). Έστω ότι $\beta^2-4\alpha\gamma > 0$. Να αποδειχθεί ότι η καμπύλη παριστάνει Υπερβολή τότε και μόνον τότε αν το δ είναι διάφορο του 0.

Β) Έστω ότι $\beta^2-4\alpha\gamma < 0$. Να αποδειχθεί ότι η καμπύλη παριστάνει ένα (και μόνον) σημείο του επιπέδου τότε και μόνον τότε αν το δ είναι 0.

ΘΕΜΑ 3. Στο R^3 θεωρούμε

το επίπεδο (Π) 2x-y+3z=12, και την ευθεία (ε) (x-1)/3=(y+3)/2=z

Να βρεθούν

α) Το σημείο τομής Α της ευθείας (ε) και του επιπέδου (Π)

β) ένα διάνυσμα του R^3 κάθετο στην ευθεία (ε) και παράλληλο προς το επίπεδο (Π)

γ) Οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (4, -1, 1), ανήκει στο επίπεδο (Π) και ειναι κάθετη στην ευθεία (ε)

ΘΕΜΑ 4. Α) Να ελέγξετε, εάν η κατωτέρω εξίσωση παριστά κωνική επιφάνεια:

$$-6x^2+3y^2+2z^2-12x-6y-4z-1=0$$

Β) Να ευρεθεί η εξίσωση της επιφανείας (S), η οποία παράγεται εκ περιστροφής της καμπύλης (γ): $x^2-4z^2=4$, y=0, περί την ευθεία (ξ): x=2, y=0.

ΘΕΜΑ 5. Στον χώρο R^3 δίδονται:

Η συμμετρική διγραμμική μορφή $\sigma : R^3 x R^3 \to R$ που ορίζεται με τον τύπο

$\sigma((x_1 , y_1 , z_1), (x_2 , y_2 , z_2)) = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$

Ο διανυσματικός υπόχωρος του R^3 , W= {(x, y, z) : z=2x} και

Το σημείο M=(1, 1, 1) του R^3 .

α) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνηση σ ορίζει στον R^3 ένα εσωτερικό γινόμενο.

β) Να βρεθεί μία βάση του υπόχωρου W.

β) Να βρεθεί μια ορθογώνια (ως προς το εσωτερικό γινόμενο σ), βάση του υπόχωρου W.

γ) Να βρεθούν οι ορθές προβολές (ως προς το εσωτερικό γινόμενο σ), του Μ στους υπόχωρους W και $W^{\perp}$.

ΘΕΜΑ 6. Στο επίπεδο R^2 θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $\varphi : R^2 x R^2 \to R$ που ορίζεται με τον τύπο $\varphi((x_1 , y_1), (x_2 , y_2)) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$. Περαιτέρω δίνονται η ευθεία ε 3x+4y+10=0 ,το διάνυσμα υ=(1, 1) και το σημείο Ο(0, 0).

α) Να βρεθούν διανύσματα υ_1 και υ_2 τέτοια ώστε $\upsilon=\upsilon_1 + \upsilon_2$ και επιπλέον το υ_1 είναι παράλληλο στην ε ενώ το υ_2 είναι κάθετο (ΠΡΟΣΟΧΗ: Το "κάθετο" είναι *ως προς το εσωτερικό γινόμενο φ*), προς την ε.

β) Να βρεθεί σημείο Ν της ευθείας ε, ώστε το διάνυσμα **ΟΝ** να είναι κάθετο, (*ως προς το εσωτερικό γινόμενο φ*), προς την ε.

Αγαπητοί φοιτητές ΠΑΡΑΚΑΛΕΙΣΘΕ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΕΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ:

Ο Αριθμός Μητρώου σας να γραφεί ***καθαρά.*** Επίσης παρακαλείσθε να έχετε πάνω στο έδρανο σας ***φοιτητική και αστυνομική ταυτότητα.*** Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3.00΄ ώρες. Δια λόγους ***κοινής νοημοσύνης***, απαγορεύεται το κάπνισμα.

Από τα παρακάτω θέματα θα απαντήσετε σε 4 που καθένα τους πέρνει 2,5 μονάδες.

Στα θέματα της εξέτασης τα **ΕΝΤΟΝΑ(BOLD)** γράμματα δηλώνουν διανύσματα

Εάν και εφόσον το θεωρείται σκόπιμο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι:

Συνθήκη παραλληλίας ευθείας και επιπέδου: ε // Π αν και μόνον αν ακ+βλ+γμ=0

ΘΕΜΑ 1. Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, Μ, Ν, όπου τα Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά και επιπλέον ισχύει **ΑΜ**=(1/3)**ΑΒ** και **ΑΝ**=(2/3)**ΑΓ**. Εστω Θ το σημείο τομής των ευθειών ΒΝ και ΓΜ. Να αποδείξετε ότι

α) **ΑΘ**=(1/7)**ΑΒ**+(4/7)**ΑΓ**

β) Για τα εμβαδά Ε(ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ, και Ε(ΑΜΘΝ) του τετραπλεύρου ΑΜΘΝ, ισχύει Ε(ΑΜΘΝ) =(2/7)Ε(ΑΒΓ)

ΘΕΜΑ 2. Δίδεται καμπύλη του επιπέδου που έχει εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi\psi+\gamma\psi^2+\delta=0$.

Α). Έστω ότι $\beta^2-4\alpha\gamma > 0$. Να αποδειχθεί ότι η καμπύλη παριστάνει Υπερβολή τότε και μόνον τότε αν το δ είναι διάφορο του 0.

Β) Έστω ότι $\beta^2-4\alpha\gamma < 0$. Να αποδειχθεί ότι η καμπύλη παριστάνει ένα (και μόνον) σημείο του επιπέδου τότε και μόνον τότε αν το δ είναι 0.

ΘΕΜΑ 3. Στο R^3 θεωρούμε

το επίπεδο (Π) 2x-y+3z=12, και την ευθεία (ε) (x-1)/3=(y+3)/2=z

Να βρεθούν

α) Το σημείο τομής Α της ευθείας (ε) και του επιπέδου (Π)

β) ένα διάνυσμα του R^3 κάθετο στην ευθεία (ε) και παράλληλο προς το επίπεδο (Π)

γ) Οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (4, -1, 1), ανήκει στο επίπεδο (Π) και ειναι κάθετη στην ευθεία (ε)

ΘΕΜΑ 4. Α) Να ελέγξετε, εάν η κατωτέρω εξίσωση παριστά κωνική επιφάνεια:

$$-6x^2+3y^2+2z^2-12x-6y-4z-1=0$$

Β) Να ευρεθεί η εξίσωση της επιφανείας (S), η οποία παράγεται εκ περιστροφής της καμπύλης (γ): $x^2-4z^2=4$, $y=0$, περί την ευθεία (ξ): $x=2$, $y=0$.

ΘΕΜΑ 5. Στον χώρο R^3 δίδονται:

Η συμμετρική διγραμμική μορφή $\sigma : R^3 x R^3 \to R$ που ορίζεται με τον τύπο

$\sigma((x_1 , y_1 , z_1), (x_2 , y_2 , z_2)) = x_1x_2 - x_1y_2 -y_1x_2 +2y_1y_2 +z_1z_2$

Ο διανυσματικός υπόχωρος του R^3 , W= {(x, y, z) : z=2x} και

Το σημείο M=(1, 1, 1) του R^3 .

α) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνηση σ ορίζει στον R^3 ένα εσωτερικό γινόμενο.

β) Να βρεθεί μία βάση του υπόχωρου W.

β) Να βρεθεί μια ορθογώνια (ως προς το εσωτερικό γινόμενο σ), βάση του υπόχωρου W.

γ) Να βρεθούν οι ορθές προβολές (ως προς το εσωτερικό γινόμενο σ), του Μ στους υπόχωρους W και $W^{\perp}$.

ΘΕΜΑ 6. Στο επίπεδο R^2 θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $\varphi : R^2 x R^2 \to R$ που ορίζεται με τον τύπο $\varphi((x_1 , y_1), (x_2 , y_2)) = 2x_1x_2 +x_1y_2 +y_1x_2 +y_1y_2$. Περαιτέρω δίνονται η ευθεία ε 3x+4y+10=0 ,το διάνυσμα υ=(1, 1) και το σημείο Ο(0, 0).

α) Να βρεθούν διανύσματα υ_1 και υ_2 τέτοια ώστε $\upsilon=\upsilon_1 + \upsilon_2$ και επιπλέον το υ_1 είναι παράλληλο στην ε ενώ το υ_2 είναι κάθετο (ΠΡΟΣΟΧΗ: Το "κάθετο" είναι *ως προς το εσωτερικό γινόμενο φ*), προς την ε.

β) Να βρεθεί σημείο Ν της ευθείας ε, ώστε το διάνυσμα **ΟΝ** να είναι κάθετο, (*ως προς το εσωτερικό γινόμενο φ*), προς την ε.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Θέμα 1: Στο συνήθη χώρο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, την ορίζουσα $G=\begin{vmatrix}\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle & \langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle\\ \langle\vec{\beta},\vec{\alpha}\rangle & \langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle\end{vmatrix}$ καθώς και πραγματικούς αριθμούς κ, λ, r, s τέτοιους ώστε $\kappa^2+\lambda^2=1$, $r+s=1$. Τότε:

(i) Να αποδειχθεί ότι $G\geq 0$ (Μονάδες 0,5) και,

(ii) $G>0$ τότε και μόνον τότε αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. (Μονάδες 0,5)

(iii) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}'=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, $\vec{\beta}'=\lambda\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}$ ισχύει $\|\vec{\alpha}'\times\vec{\beta}'\|=\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|$. Είναι πάντα αληθές ότι $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=\langle\vec{\alpha}',\vec{\beta}'\rangle$; (Μονάδες 1,3)

(iv) Αν επιπλέον τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, $\|\vec{\alpha}\|=\|\vec{\beta}\|=1$ και $\vec{y}=r\vec{\alpha}+s\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι $\|\vec{y}\|=1$ αν και μόνον αν το $\vec{y}$ είναι ίσο είτε με το $\vec{\alpha}$ είτε με το $\vec{\beta}$. (Μονάδες 1)

Θέμα 2:

(α) Στο χώρο δίδονται ένα επίπεδο (π) και δύο ευθείες (l_1) και (l_2) τέτοιες ώστε η (l_1) να είναι κάθετος στο (π) και η (l_2) να περιέχεται στο (π). Έστω O το σημείο τομής των (π) και (l_1), A σημείο της (l_1) και B σημείο της (l_2) τέτοιο ώστε (OB) κάθετος στην (l_2).
Να αποδειχθεί ότι (BA) κάθετος στην (l_2). (Μονάδες 0,8)

(β) Στο συνήθη χώρο $\mathbb{R}^3$ και ως προς στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $Oxyz$ δίνεται η εξίσωση:
(E) $(3\lambda+\mu)x+\lambda y-(\lambda+\mu)z+(\lambda+4\mu)=0$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $|\lambda|+|\mu|\neq 0$. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Η (E) είναι εξίσωση επιπέδου. (Μονάδες 0,5)

(ii) Τα επίπεδα $(\pi_1): 3x+y-z+1=0$ και $(\pi_2): x-z+4=0$ (για κατάλληλες τιμές των λ και μ) μπορούν να περιγραφούν από την (E). (Μονάδες 0,6)

(iii) Όλα τα επίπεδα της (E) περιέχουν την ίδια σταθερή ευθεία (l), οι (συμμετρικές) εξισώσεις της οποίας να προσδιορισθούν. (Μονάδες 0,8)

(iv) Να προσδιορισθεί εξίσωση επιπέδου (π) που να διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και να είναι κάθετο στα (π_1) και (π_2). (Μονάδες 0,4)

Υπάρχει (εκτός των (π_1) και (π_2)) άλλο επίπεδο που να περιγράφεται από την (E) και να είναι κάθετο στο επίπεδο (π); (Μονάδες 0,2)

Θέμα 3: Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ και ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ θεωρούμε τα επίπεδα $(\pi_1): x+y+z=0$, $(\pi_2): x-2y+z=0$, $(\pi_3): x=z$ και, την κωνική επιφάνεια (S) με κορυφή την αρχή των αξόνων O και οδηγό καμπύλη $(C): \{y^2=-2x,\quad z=+1\}$.

(α) Να ευρεθεί η εξίσωση της (S) στη μορφή $f(x,y,z)=0$. (Μονάδες 1)

(β) Θεωρούμε το επίπεδο $(\pi): x-3y+z+1=0$ και την καμπύλη (γ) που προκύπτει ως τομή του (π) και (S). Να προσδιορισθεί το είδος της καμπύλης (γ). (Μονάδες 1,3)

(γ) Να αποδειχθεί ότι για τα σημεία P της (S) και μόνον γι' αυτά ισχύει η σχέση:
$[d(P,(\pi_1))]^2+[d(P,(\pi_2))]^2=[d(P,(\pi_3))]^2$. (Μονάδες 1)

Θέμα 4: Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ δίνονται: η διγραμμική συνάρτηση
$\sigma:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}: ((x,y,z),(x',y',z'))\mapsto\sigma((x,y,z),(x',y',z'))=2xx'-xz'-zx'+yy'+zz'$,
ο υπόχωρος $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y+z=0\}$ και το διάνυσμα $e_3=(0,0,1)$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η σ είναι εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$. (Μονάδες 1)

(β) Να ευρεθεί μια ορθογώνια (ως προς σ) βάση του W. (Μονάδες 1)

(γ) Να βρεθεί διάνυσμα $\upsilon\in W$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $u=e_3-\upsilon$ να είναι κάθετο στον υπόχωρο W (η καθετότητα ως προς σ). (Μονάδες 1,3)

Να απαντήσετε σε τρία από τα θέματα

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (1 Οκτωβρίου 2007)

Θέμα 1:

(α) Αν για τα (μη μηδενικά) διανύσματα a και b του χώρου ισχύει η σχέση $\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|=\|\vec{a}+\vec{b}\|$, τότε να αποδείξετε ότι τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά. (Μονάδες 0,5)

(β) "Αν για τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ του χώρου ισχύει η σχέση $\langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\rangle = 0$, τότε τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι συνεπίπεδα" Αληθές ή Ψευδές; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (Μονάδες 0,5)

(γ) Στο συνήθη χώρο θεωρούμε το επίπεδο $(\pi): x-2y+z=0$ και το σημείο $M:\overrightarrow{OM}(1,1,1)$. Να βρείτε σημεία N του επιπέδου (π) τέτοια ώστε $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}$ και $\|\overrightarrow{ON}\|=1$. (Μονάδα 1)

(δ) Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ και ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα Oxy θεωρούμε την απεικόνιση $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=((-x+2\kappa y)/2, (2\lambda x+y)/2)$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ και $\kappa\lambda=3/4$. Να υπολογίσετε τα κ και λ ώστε $\|f(x,y)\|=\|(x,y)\|\ \ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 1,3)

Θέμα 2: Στο συνήθη χώρος $\mathbb{R}^3$ και ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $Oxyz$ δίνεται η εξίσωση

$$(\Sigma): x^2+y^2+z^2-8x+6z-11=0.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η (Σ) παριστάνει σφαίρα, το κέντρο και την ακτίνα της οποίας να προσδιορίσετε. (Μονάδα 1)

(β) Αν το επίπεδο (π) του χώρου έχει εξίσωση $2x-y+2z+5=0$

(i) Να αποδειχθεί ότι η τομή του (π) και της (Σ) είναι κύκλος το κέντρο και την ακτίνα του οποίου να προσδιορίσετε. (Μονάδες 0,7).

(ii) Να βρείτε την εξίσωση μιας σφαίρας που να είναι ομόκεντρη με την (Σ) και να εφάπτεται του (π). (Μονάδες 0,6).

(γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (Γ.Τ.) των σημείων M του χώρου που "βλέπουν" το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(-1,\sqrt{7},-1)$ και $B(9,-\sqrt{7},5)$ με ορθή γωνία (δηλ. $A\hat{M}B=1^{\llcorner}$). (Μονάδα 1)

Θέμα 3: Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ και ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ θεωρούμε: το σημείο $K(1,1,1)$, το διάνυσμα $\vec{\ell}(0,0,1)$, την καμπύλη $(C):\{(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ z=0\}$ και την κωνική επιφάνεια (S) που έχει κορυφή το K και οδηγό καμπύλης την (C).

(α) Να ευρεθεί η εξίσωση της (S) στη μορφή $f(x,y,z)=0$. (Μονάδα 1)

(β) Να προσδιορίσετε το είδος της καμπύλης που προκύπτει ως τομή της (S) και του επιπέδου $(\pi): x+y+z=1$. (Μονάδες 1,3)

(γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία P του χώρου με την ιδιότητα τα διανύσματα $\overrightarrow{KP}$ και $\vec{\ell}$ να σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{4}$, είναι σημεία της επιφάνειας (S). (Μονάδα 1)

Θέμα 4: Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ δίνονται: η συμμετρική διγραμμική συνάρτηση

$$q:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:\big((x,y,z),(x',y',z')\big)\mapsto\sigma\big((x,y,z),(x',y',z')\big)=3xx'+x'y+y'x+yy'+zz',$$

ο υπόχωρος $W:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y=0\}$ και το διάνυσμα $e_2=(0,1,0)$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η q είναι εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$. (Μονάδες 0,7)

(β) Να ευρεθεί η ορθογώνια (ως προς q) βάση που προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου Gram-Schmidt από τη βάση $\{(1,0,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$. (Μονάδες 1,3)

(γ) Να γραφεί το $e_2=w_1+w_2$, $w_1\in W$ και $w_2\in W^{\perp}$, (το ορθογώνιο $\perp$, ως προς q). (Μονάδες 1,3)

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΤΡΙΑ (3) ΑΠΟ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
(Εξεταση: 2/10/2006)

ΘΕΜΑ 1 (α) Να αποδειχθει οτι ο ογκος V του παραλληλεπιπεδου με ακμες τα διανυσματα $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{c}$, ειναι $V = |\langle \vec{\alpha} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|$.
(β) Στο επιπεδο και ως προς ενα ορθοκανονικο συστημα συντεταγμενων Oxy θεωρουμε τριγωνο $OA\Gamma$, οπου $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, $\alpha, x_\Gamma, y_\Gamma > 0$. Στις πλευρες $O\Gamma$ και OA και εξωτερικα του τριγωνου θεωρουμε τετραγωνα (Π_1) και (Π_2) με κεντρα K και Λ αντιστοιχα.
(i) Να αποδειχθει οτι $K \equiv K((x_\Gamma - y_\Gamma)/2, (x_\Gamma + y_\Gamma)/2)$
(ii) Τα σημεια K, Λ και το μεσον M της πλευρας $A\Gamma$ σχηματιζουν ορθογωνιο και ισοσκελες τριγωνο, δωστε μια αποδειξη!

ΘΕΜΑ 2 (α) Μια ευθεια (ε) του επιπεδου, δεν διερχεται απο την αρχη O ενος ορθοκανονικου συστηματος Oxy, ενω συναντα τους αξονες στα σημεια $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$. Αν d ειναι η αποσταση του O απο την (ε), να αποδειχθει οτι $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.

(β) Στο επιπεδο, θεωρουμε την εξισωση (Ε) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$.
Να προσδιορισετε το ειδος της καμπυλης που παριστανει η (Ε) και να βρειτε την κανονικη της μορφη καθως και το συστημα συντεταγμενων που αυτη επιτυγχανεται.

ΘΕΜΑ 3 (α) Εστω $(\Pi): \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ επιπεδο στο χωρο και $P = P(x_0, y_0, z_0)$ σημειο του χωρου. Να αποδειξετε οτι η αποσταση d του P απο το (Π) ειναι $d = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$.

(β) Στο χωρο δινονται τα επιπεδα $(\Pi_1): x + y + z - 3 = 0$ και $(\Pi_2): 3x + 2y - 5z + 10 = 0$ καθως και οι ευθειες $(\varepsilon_1): (x-1)/2 = (y-2)/(-3) = z$ και $(\varepsilon_2): x+1 = y+1 = z-1$.
(i) Να βρεθουν οι (συμμετρικες) εξισωσεις της τομης (ε) των επιπεδων (Π_1) και (Π_2)
(ii) Να δειχθει οτι $(\varepsilon_1) \in (\Pi_1)$, $(\varepsilon_2) \in (\Pi_2)$
(iii) Να εξετασετε αν υπαρχει επιπεδο που να περιεχει τις ευθειες (ε_1) και (ε_2).

ΘΕΜΑ 4 (α) Να ευρεθεί η εξίσωση του κώνου που παράγεται με οδηγό καμπύλη την $(C): \{2x^2-3y^2=6,\ z=0\}$ και κορυφή το σημείο $K(x_0,y_0,z_0)=K(1,1,-1)$. Ποια είναι η τομή του κώνου με το επίπεδο **xOy**.

(β) Δίνεται η καμπύλη $(C): \{2y^2+z^2=1,\ x=0\}$. Να ευρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας εκ περιστροφής της καμπύλης (C) περί την ευθεία $\{x=0,\ z=2\}$.

ΘΕΜΑ 5 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ θεωρούμε τη συμμετρική και διγραμμική απεικόνιση $\sigma: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, με τύπο $\sigma((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))=x_1x_2+3y_1y_2+z_1z_2+z_1y_2+y_1z_2+$ $+x_1y_2+y_1x_2$ καθώς και τα $a=(0,-1,1)$, $b=(2,1,-1)$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η σ είναι εσωτερικό γινόμενο.

(β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν $u,v\in\mathbb{R}^3$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $b=u+v$, $u=\lambda a$ και $\sigma(a,v)=0$.

(γ) Έστω $W=\mathcal{L}(\{a,b\})$, ο υπόχωρος που παράγουν τα a και b και $c=(1,0,-1)$. Να βρεθούν οι ορθές προβολές του c στους W και $W^{\perp\sigma}$ (ως προς το εσωτερικό γινόμενο σ).

Να απαντήσετε σε 4 μόνον θέματα

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

11 - 9 - 2003

ΑΜ [redacted]

ΘΕΜΑ 1

Ποιές από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές και ποιές λάθος; Αιτιολογείστε κατά σύντομο τρόπο τις απαντήσεις σας

α) Οι τομές τριών, ανά δύο μη παραλλήλων, επιπέδων στον χώρο είναι ευθείες, οι οποίες ή είναι παράλληλες ή διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β) Υπάρχουν διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ τέτοια ώστε
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\rangle$$

γ) Για κάθε τιμή του $\lambda \in R$, η εξίσωση $(3\lambda+1)x+(9\lambda^2-1)y+1=0$ παριστάνει ευθεία στο επίπεδο.

δ) Έστω $(V, \langle , \rangle)$ διανυσματικός χώρος εσωτερικού γινομένου, τότε δύο μη μηδενικά ορθογώνια στοιχεία του V είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ε) Έστω $\vec{l_1}, \vec{l_2} \neq \vec{0}$ και μη παράλληλα διανύσματα του χώρου καθώς και Π_1, Π_2 επίπεδα κάθετα στα $\vec{l_1}, \vec{l_2}$ αντίστοιχα. Τότε, η τομή των Π_1, Π_2 είναι κάθετη στο $\vec{l_1}\times\vec{l_2}$.

ΘΕΜΑ 2

α) Στο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ δίδονται τα σημεία A, B, Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M, τέτοιο ώστε
$$2\vec{AM} + 3\vec{MB} = 4\vec{\Gamma M}$$ (Μονάδες 1)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$, για τις οποίες η ευθεία $y=3x+\lambda$ τέμνει την παραβολή $y^2=2x$ σε δύο σημεία A, B, τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της παραβολής σε αυτά να είναι κάθετες (Μονάδες 1,5)

ΘΕΜΑ 3

Στο επίπεδο και ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα Oxy δίδεται η εξίσωση $7x^2+13y^2+6\sqrt{3}xy-16=0$ (Ε). Να βρεθούν τα εξής: Το είδος της καμπύλης που παριστάνει η (Ε), η κανονική μορφή της, καθώς και οι συντεταγμένες των εστιών της (Ε) στο Oxy.

[Υπενθύμιση: Οι τύποι στροφής $x = x'\sigma\upsilon\nu\theta - y'\eta\mu\theta$
$y = x'\eta\mu\theta + y'\sigma\upsilon\nu\theta$]

ΘΕΜΑ 4

Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ δίδεται η διγραμμική και συμμετρική συνάρτηση $\langle\,,\rangle : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$
με $\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 2, & \text{άν } i=j \\ 1, & \text{άν } i\neq j\end{cases}$ $\quad i,j\in\{1,2,3\}$
όπου $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ και $e_3=(0,0,1)$.

α) Να αποδειχθεί, ότι η συνάρτηση $\langle\,,\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$. (Μονάδες 0,5)

β) Αν $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ x-y+z=0\}\subseteq\mathbb{R}^3$, να ευρεθεί μία ορθοκανονική βάση του υποχώρου U, ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\,,\rangle$. (Μονάδες 1)

γ) Αν $\vec{a}=(1,0,-3)\in\mathbb{R}^3$, να ευρεθεί ένα διάνυσμα $\vec{b}\in U$, τέτοιο ώστε $(\vec{a}-\vec{b})\perp U$. Βρείτε επίσης την $pr_{U^\perp}\vec{a}$, ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\,,\rangle$. (Μονάδες 1)

ΘΕΜΑ 5

A) Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε το σημείο $A(1,1,-3)$ και τις ευθείες $(\varepsilon_1)\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=-z$ και $(\varepsilon_2)\ \dfrac{2x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{2}$

Να ευρεθούν τα εξής:

α) Ένα διάνυσμα $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ κάθετο στις ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$. (Μονάδες 0,5)

β) Η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{a}$. (Μονάδες 0,5)

γ) Η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ευθεία (ε_1) και είναι παράλληλο στην ευθεία (ε_2). (Μονάδες 0,5)

B) Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας S, η οποία παράγεται από την περιστροφή της υπερβολής $(c):\ x^2-2z^2=3,\ y=0$ γύρω από τον άξονα Oz. Ποιά κλασική επιφάνεια είναι η S; (Μονάδες 1)

Να απαντηθούν μόνον 4 από τα 5 θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΑΜ .22.00.81...

16-9-2004

ΘΕΜΑ 1

α) Δίδεται η παραβολή $y^2 = 2px$, $p>0$ (εστίας $E(p/2, 0)$) και σημεία της $P(1/2p, 1)$ και Q, τέτοια ώστε P, E, Q να είναι συνευθειακά. Να βρείτε τη γωνία των εφαπτομένων της παραβολής στα P και Q.

β) Να βρείτε το είδος της επίπεδης καμπύλης (C), τα σημεία M της οποίας έχουν την εξής ιδιότητα: Το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του M από τις ευθείες (ε_1): $x-y+1=0$ και (ε_2): $x+2y+1=0$ είναι σταθερό και ίσο με 1.

ΘΕΜΑ 2

α) Οι ευθείες κατά τις οποίες τέμνονται τρία επίπεδα στον χώρο (που, ανά δύο, έχουν κοινά σημεία), αν δεν συμπίπτουν, ή διέρχονται από το ίδιο σημείο, ή είναι παράλληλες.
Σωστό ή λάθος; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

β) Δίδεται το σημείο $A(1,1,1)$ και τρία επίπεδα με εξισώσεις

(Π_1) $12x - y + 2z = 35$

(Π_2) $3x + y + z = 7$

(Π_3) $x + 2y + z = 0$

Να εξετασθεί, αν υπάρχει επίπεδο (Π), το οποίο να διέρχεται από το σημείο A και να είναι κάθετο και στα τρία επίπεδα (Π_1), (Π_2), (Π_3).

ΘΕΜΑ 3

α) Να αποδείξετε ότι ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι $V = |\langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\rangle|$

β) Θεωρούμε το τετράεδρο (T_1) με κορυφές τα σημεία $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ και $\Gamma(0,0,1)$, καθώς και το τετράεδρο (T_2) με κορυφές τα κέντρα βάρους (βαρύκεντρα) $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ και Θ_4 των τριγώνων (OAB), $(OB\Gamma)$, $(OA\Gamma)$ και $(AB\Gamma)$ αντίστοιχα. Να βρείτε τον λόγο V_1/V_2 των όγκων V_1 και V_2 των τετραέδρων (T_1) και (T_2).

[Υπενθύμιση: Ο όγκος τετραέδρου $OAB\Gamma$ είναι το $1/3$ του όγκου του παραλληλεπιπέδου με ακμές $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{O\Gamma}$]

ΘΕΜΑ 4

α) Νά αποδείξετε ότι η απόσταση d του σημείου $P(x_1, y_1, z_1)$ από τό επίπεδο (Π): $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ είναι

$$d=\frac{|\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1+\delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

β) Δίνεται τό επίπεδο (Π): $x+y-2z=1$, σημείο του $A(2,1,1)$ καί η ευθεία (ε) (από τό A) μέ καρτεσιανές εξισώσεις $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{5}$. Νά βρεθούν οι καρτεσιανές εξισώσεις της ευθείας (ε'), η οποία διέρχεται από τό A, βρίσκεται επάνω στό επίπεδο (Π) καί είναι κάθετη στην (ε).

ΘΕΜΑ 5

α) Νά ευρεθεί η εξίσωση της επιφανείας εκ περιστροφής, η οποία παράγεται από την περιστροφή της υπερβολής $\{x^2-2z^2=1,\ y=0\}$ περί τόν άξονα των z.

β) Νά βρείτε την εξίσωση της κωνικής επιφανείας μέ κορυφή τό σημείο $A(1,3,1)$ καί οδηγό καμπύλη την (c) $\{9x^2+4z^2=36,\ y=0\}$.

ΘΕΜΑ 6

Στόν R^3 δίνεται η διγραμμική καί συμμετρική απεικόνιση $E: R^3\times R^3 \longrightarrow R$ μέ τύπο:

$$E((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = 3x_1x_2+3y_1y_2+z_1y_2+y_1z_2+z_1z_2$$

α) Νά αποδειχθεί ότι η απεικόνιση E ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στόν R^3.

β) Νά ευρεθεί η ορθοκανονική βάση του R^3 πού προκύπτει μέ τη μέθοδο Gram-Schmidt από τη συνήθη βάση $e_1(1,0,0)$, $e_2(0,1,0)$, $e_3(0,0,1)$ (γιά τό εσωτερικό γινόμενο E).

γ) Νά ευρεθεί η ορθή προβολή του e_1 στόν υπόχωρο πού παράγουν τά e_2 καί e_3.

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΘΟΥΝ ΤΑ 4 ΑΠΟ ΤΑ 6 ΘΕΜΑΤΑ

Καλή Επιτυχία!