Μάθημα 12 (20/4/2015)

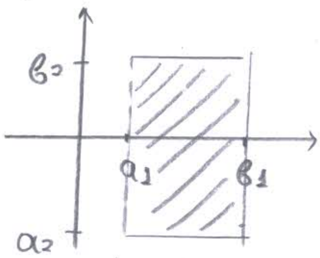
Πολλαπλά Ολοκληρώματα

$\mathbb{R}^d$, $d=1,2,3,\ldots$

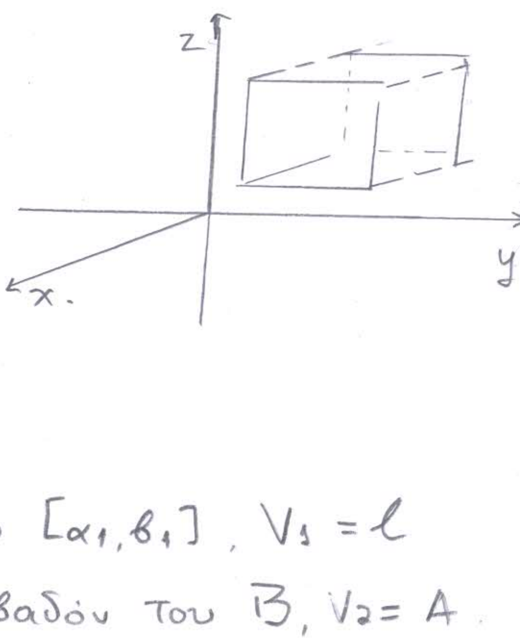
Ορθογώνιο: $B=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_d,b_d]$
$a_i<b_i$

• $d=1$ $B=[a_1,b_1]$

• $d=2$ $B=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$



• $d=3$ $B=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$



Ορισμός

Όγκος Ορθογωνίου

$$V_d(B):=(b_1-\alpha_1)\ldots(b_d-\alpha_d)$$

• $d=1$ $V_1(B)=(b_1-\alpha_1)$ δηλαδή το μήκος του $[\alpha_1,b_1]$, $V_1=\ell$

• $d=2$ $V_2(B)=(b_1-\alpha_1)\cdot(b_2-a_2)$ δηλαδή το εμβαδόν του B, $V_2=A$

• $d>2$ $V_d(B)=d$-όγκος του B

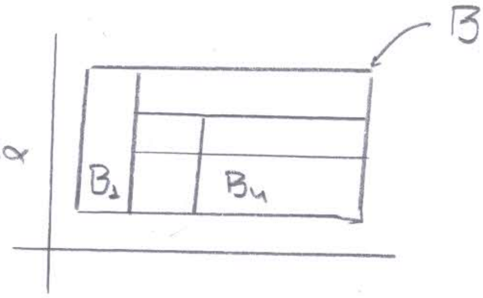
$x_0\in\mathbb{R}^d$, $\lambda>0$

$$V_d(x_0+\lambda B)=V_d(\lambda B)=\lambda^d\cdot V_d(B)$$

Ισχύει:

$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$, B_i = ορθογώνια

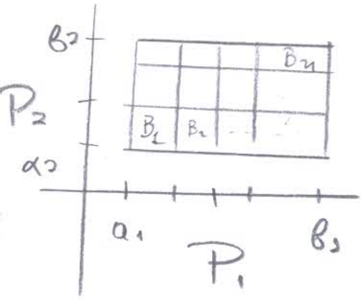
$B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset$, $i \neq j$



Τότε $V_d(B) = V_d(B_1) + \dots + V_d(B_n)$

Ορισμός $\int_B f$, $f: B \to \mathbb{R}$ φραγμένη

Έστω διαμέριση $P_i \in \mathcal{D}_{[a_i, b_i]}$



$P = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$

Τότε δημιουργείται μια διαμέριση του B,

$m_i = \inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in B_i\} \le \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in B_i\} = M_i$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i V_d(B_i) \le \sum_{i=1}^{n} M_i V_d(B_i) = U(f,P)$$

Εάν $P, Q \in \mathcal{D}_B$, τότε $L(f,P) \le U(f,Q)$ (Όπως στον Απειρ. ΙΙ)

Q σταθ: $\exists \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{D}_B\} \le U(f,Q) \Longrightarrow$

$$\sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{D}_B\} \le \inf\{U(f,Q) : Q \in \mathcal{D}_B\}$$

$$\underline{\int_B} f \quad \le \quad \overline{\int_B} f$$

Ονομάζουμε το $\underline{\int_B} f$ κάτω ολοκλήρ. της f στο B και το $\overline{\int_B} f$ άνω ολοκλήρ. της f στο B

f ολοκληρώσιμη στο B $\Longleftrightarrow$ $\underline{\int_B} f = \overline{\int_B} f$ την κοινή τιμή

συμβ. $\int_B f$

Θεώρημα

$f, g : B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Τότε:

i) αν $f \geq 0 \Rightarrow \int_B f \geq 0$

ii) $\exists \int_B (f+g) = \int_B f + \int_B g$

$\exists \int_B (\lambda f) = \lambda \int_B f, \ \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$: B_i = ορθογώνια

$B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset \quad i \neq j$

$\int_B f = \int_{B_1} f + \int_{B_2} f + \dots + \int_{B_k} f$

iv) $\int_B 1 = V_d(B)$

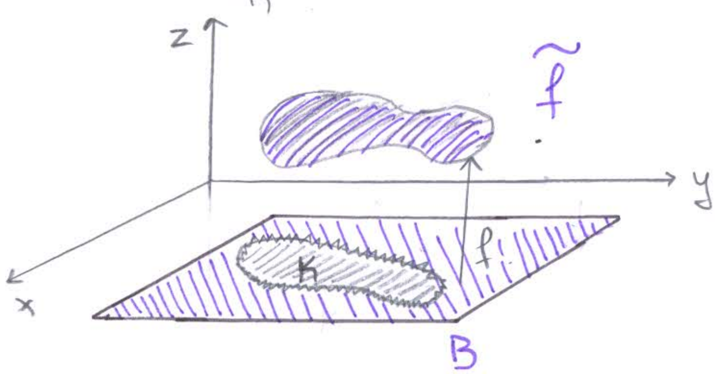
Κριτήριο Riemann: $f : B \to \mathbb{R}$, τα εξής είναι ισοδύναμα:

i) $\exists \int_B f$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{D}_B : U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

Πρόταση $f : B \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists \int_B f$

Ορισμός $\int_K f$, K συμπαγές, f = φραγμένη



Έστω B = ορθογώνιο $\supseteq K$

$$\tilde{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \vec{x} \in K \\ 0 & \vec{x} \in B \setminus K \end{cases}$$

$$\tilde{f} = f \chi_K \qquad \chi_K(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in K \\ 0, & \vec{x} \notin K \end{cases}$$

Η f ολοκληρώσιμη στο $K \iff$

η $\tilde{f}$ » στο B

$$\int_K f =: \int_B \tilde{f}$$

Ορίζουμε $V_d(K) = \int_K 1$ (αν υπάρχει)

Σημείωση

Ακόμη και αν η $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, πχ. $f(\vec{x}) = 1$, $\vec{x} \in K$

$\not\Longrightarrow \exists \int_K f$ πχ $\nexists \int_K 1$

Πχ $K \subseteq [0,1]$, K σύνολο τύπου Cantor (Νεγρ. κ.ά., 14.12 άσκηση)

Η $\chi_K : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη. —

Ορισμός

$A \subseteq \mathbb{R}^d$ φραγμένο, d-μέτρο ή d-περιεχόμενο (Jordan) ίσον με μηδέν ή ότι το A είναι μηδενικού d-μέτρου $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B_i =$ ορθογώνια: $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ και $\sum_{i=1}^{\infty} V_d(B_i) < \varepsilon$

πχ. $\mathbb{R}$, $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι 1-μέτρου "0"

$A =$ τριαδικό σύνολο Cantor (υπεραριθμήσιμο)

Χαρακτηρισμός Ολοκληρωσίμων Συναρτήσεων

$f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $B =$ ορθογ.

$f =$ φραγμένη $A_f = \{\vec{x} \in B : f$ ασυνεχής στο $\vec{x}\}$

Τα εξής είναι ισοδύναμα: i) f ολοκλ. στο B

ii) A_f είναι μηδενικού μέτρου

(Θ. Lebesgue).

(Απόδειξη: για $d=1$ Νεγρεπόντης κ.ά. Κεφάλαιο 14)

Πόρισμα

$f: K \to \mathbb{R}$, f συνεχής, K συμπαγές

Τα εξής είναι ισοδύναμα: i) $\exists \int_K f$

ii) ∂K είναι μηδενικού μέτρου

$\partial K = bd K$: σύνορο του K

Πρόταση

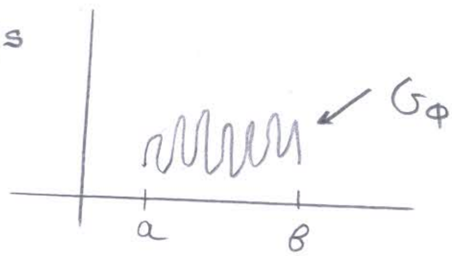
$\varphi: K \to \mathbb{R}$, K = συμπαγές, φ = συνεχής στο K

Τότε $G_\varphi = \{(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) : \vec{x} \in K\}$ είναι μηδενικού $(d+1)$-μέτρου.

Ιδιαιτέρως: • $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$G_\varphi = \{(x, \varphi(x)) : a \le x \le b\}$

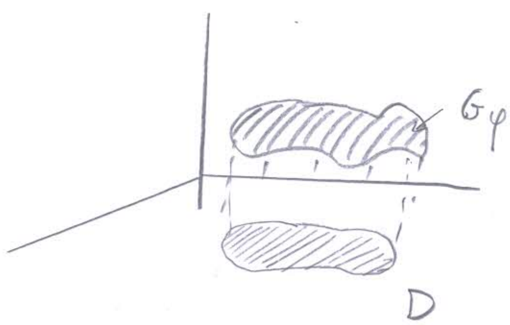
έχει 0-εμβαδόν.



• $\varphi: D = \{(x, y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

$\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς

G_φ έχει 3-όγκο μηδέν.



$K \subseteq \mathbb{R}^d$: φραγμένο, K μετρήσιμο (Jordan)

$\Longleftrightarrow$ ∂K είναι μηδενικού μέτρου

$\left(\exists\ V_d(K) = V_d(\bar{K}) = \int_K 1\right)$

(Βλέπε Συμπληρωματικό Υλικό)

Ανάλογο Θ. τύπου Fubini ισχύει στον $\mathbb{R}^3$.

Διπλά, Τριπλά Ολοκληρώματα

Θ. τύπου Fubini, Αρχή Cavalieri, Θ διαδοχ. ολοκληρ.

$B=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\subseteq\mathbb{R}^2 \quad (\alpha<\beta,\ \gamma<\delta)$

$f: B\longrightarrow\mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε

• $$\underline{\iint_B} f(x,y)\,dx\,dy \le \underline{\int_\alpha^\beta}\left(\underline{\int_\gamma^\delta} f(x,y)\,dy\right)dx \le \underline{\int_\alpha^\beta}\left(\overline{\int_\gamma^\delta} f(x,y)\,dy\right)dx \le$$
$$\le \overline{\int_\alpha^\beta}\left(\overline{\int_\gamma^\delta} f(x,y)\,dy\right)dx \le \overline{\iint_B} f(x,y)\,dx\,dy.$$

• $$\underline{\iint_B} f(x,y)\,dx\,dy \le \underline{\int_\gamma^\delta}\left(\underline{\int_\alpha^\beta} f\,dx\right)dy \le \underline{\int_\gamma^\delta}\left(\overline{\int_\alpha^\beta} f\,dx\right)dy \le$$
$$\le \overline{\int_\gamma^\delta}\left(\overline{\int_\alpha^\beta} f\,dx\right)dy \le \overline{\iint_B} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ιδιαιτέρως, Έστω f = ολοκληρώσιμη $\iint_B f = \int_\alpha^\beta\left(\int_\gamma^\delta f\,dy\right)dx = \int_\alpha^\beta\left(\overline{\int_\gamma^\delta} f\,dy\right)dx$

Αν η f συνεχής, τότε:

$$\iint_B f = \int_\alpha^\beta\left(\int_\gamma^\delta f\,dy\right)dx = \int_\gamma^\delta\left(\int_\alpha^\beta f\,dx\right)dy.$$

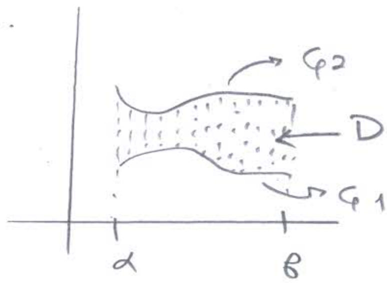
Απόδειξη: Βλέπε Συμπληρωματικό Υλικό.

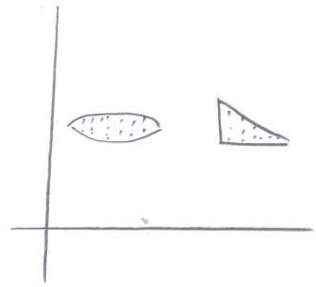
Πώς να υπολογίζουμε διπλό ολοκλήρωμα συνεχών συναρτήσεων σε απλά σύνολα;

Απλά Σύνολα στου $\mathbb{R}^2$ (ή τύπου I, II)

i) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ x-απλό, $D=\{(x,y): \alpha \le x \le \beta,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

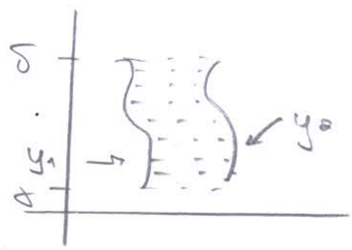
$\varphi_1, \varphi_2 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς.





ii) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y-απλό, $D=\{(x,y): \gamma \le y \le \delta,\ y_1(y) \le x \le y_1(y)\}$.

$y_1, y_2 : [\gamma,\delta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς.



∂D έχει μέτρο "0".

Πρόταση

$f: D \to \mathbb{R}$, f συνεχής

i) D x-απλό $$\iint_D f = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

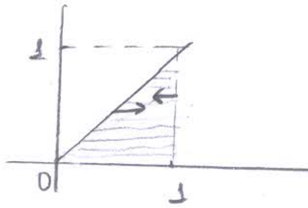
ii) D y-απλό $$\iint_D f = \int_\gamma^\delta \left(\int_{y_1(y)}^{y_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Απόδειξη Βλέπε Συμπληρωματικό Υλικό.

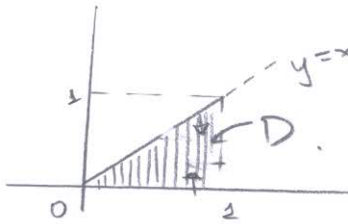
Σημείωση $D \subseteq \mathbb{R}^2$, «απλό» $\int_D f(x,y) \overset{\text{συμβ}}{=} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα



1) $I=\int_0^1\left(\int_y^1 e^{x^2}dx\right)dy$



Λύση $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}$ y-απλό.

x-απλό, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

$$I=\int_0^1\left(\int_0^x e^{x^2}dy\right)dx=\int_0^1 e^{x^2}\cdot x\,dx=\left[\frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^1\right]=\frac{1}{2}(e-1)$$

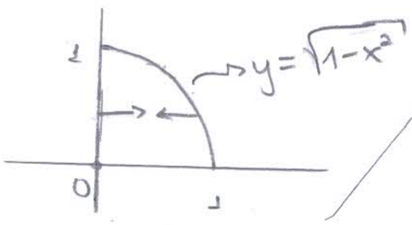
2) $I=\int_0^1\left(\int_y^1 x^3 y e^{xy^2}dx\right)dy$

$$I=\int_0^1\left(\int_0^x x^3 y e^{xy^2}dy\right)dx=\int_0^1\frac{x^2}{2}\left[e^{xy^2}\right]_{y=0}^{x}dx=\int_0^1\frac{x^2}{2}\left(e^{x^3}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 x^2e^{x^3}dx-\int_0^1 x^2dx\right]=\dots=\frac{1}{6}(e-2)$$

3) $I=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-y^2)^{3/2}dy\right)dx$

Λύση $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$ x-απλό



y-απλό, $D=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ 0\le x\le\sqrt{1-y^2}\}$

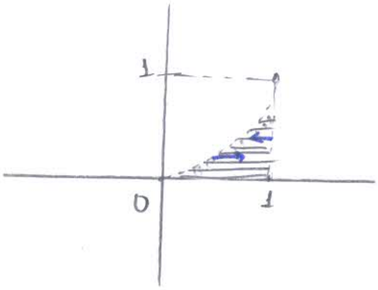
$$I=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(1-y^2)^{3/2}dx\right)dy=$$

$$=\int_0^1(1-y^2)^{3/2}\cdot\sqrt{1-y^2}\,dy=\int_0^1(1-y^2)^2dy=$$

$$=\int_0^1(1-2y^2+y^4)dy=y-2\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\Big|_0^1=1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}$$

4) $I=\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{(1+x^5)^7}\,dx\right)dy$.

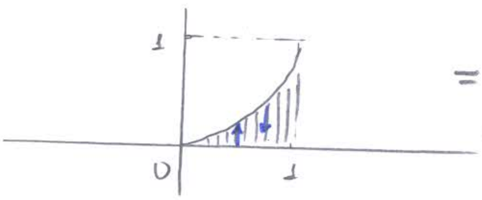
Λύση



y-απλό, $D=\{(x,y):\ 0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le 1\}$.

x-απλό: $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$

$$I=\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{y}{(1+x^5)^7}\,dy\right)dx$$

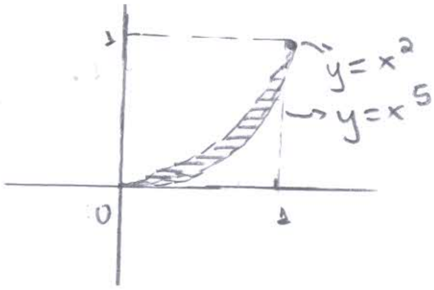


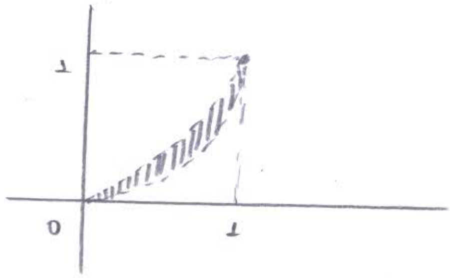
$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x^5)^7}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^4}{(1+x^5)^7}\,dx=\frac{63}{60\cdot 64}$$

5) $I=\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{y}}(1-x^3)^{1/2}\,dx\right)dy$. Θέμα Φεβρουαρίου '15

Λύση $D=\{(x,y):\ 0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le\sqrt[5]{y}\}$ y-απλό.





x-απλό $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ x^5\le y\le x^2\}$

$$I=\int_0^1\left(\int_{x^5}^{x^2}(x^3)^{1/2}\,dy\right)dx=\int_0^1(1-x^3)\cdot(x^2-x^5)\,dx=$$

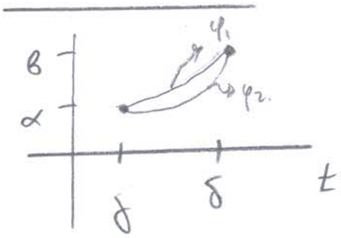
$$\int_0^1 x^2(1-x^3)^{3/2}\,dx=\left[-\frac{(1-x^3)^{5/2}}{5/2}\cdot\frac{1}{3}\right]_{x=0}^{1}=\frac{2}{15}.$$

Αλλαγή Μεταβλητών

$f:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής

$\varphi:[\gamma,\delta]\longrightarrow[\alpha,\beta]$, επί, C^1, $\varphi'(t)\neq 0$, $t\in[\gamma,\delta]$

φ = γν. μονότονη



• $\varphi \uparrow$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \overset{x=\varphi(t)}{=\!=\!=} \int_\gamma^\delta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

• $\varphi \downarrow$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int_\gamma^\delta f(\varphi(t))\,(-\varphi'(t))\,dt \;/\; \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$$

$$(\varphi'(t)) = J_\varphi(t)$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(\varphi(t))\cdot|\det J_\varphi(t)|\,dt$$