Μάθημα 6

16/3/2015

Υπενθύμιση

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$ (= ανοιχτό)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t} = \frac{d f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i)}{dt}\Big|_{t=0}$$

Η f διαφορίσιμη $\vec{x}_0 \iff \exists\, T_{\vec{x}_0} = df(\vec{x}_0): \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ Γραμμική

τ.ω. $\displaystyle\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - T_{\vec{x}_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$ ($T_{\vec{x}_0}$ είναι μοναδική)

- Εάν $\exists\, df(\vec{x}_0)$ $\longrightarrow$ f συνεχής στο $\vec{x}_0$
  $\longrightarrow$ $\exists\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$, $df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^d$.

Πρόταση (Κριτήριο $\exists\, df(\vec{x}_0)$)

Έστω ότι $\exists\, \nabla f(\vec{x}_0)$ και ισχύει $\displaystyle\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$

Τότε $\exists\, df(\vec{x}_0)$, $df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$

Απόδειξη $T_{\vec{x}_0}(\vec{h}) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$ γραμμική, ικανοποιείται ο ορισμός

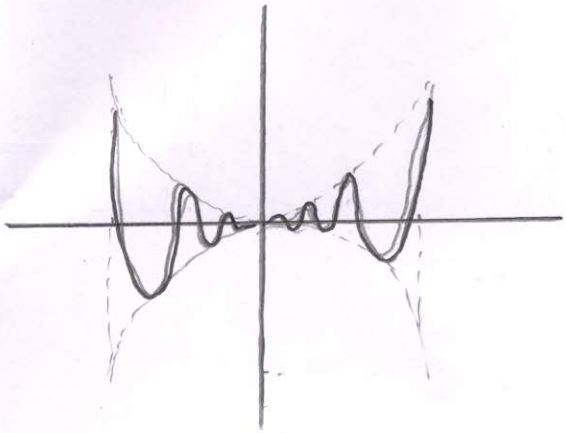
- για την διαφορ. στο $\vec{x}_0$. Από την μοναδικότητα για να έχουμε $\exists\, df(\vec{x}_0)$

Σχέση διαφορισιμότητας - Συνέχεια Μ.Π.

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$. Έστω ότι $\exists\, df(\vec{x}_0) \not\Rightarrow$ οι $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ είναι συνεχείς στο $\vec{x}_0$.

π.χ. $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $f'(0) = 0$

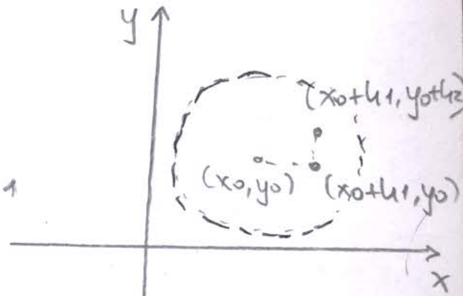
$x \neq 0$, $f'(x) = 2x\,\eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$ $\quad \nexists \displaystyle\lim_{x \to 0} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$



Θεώρημα

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x_0}\in A$ και $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ για $\vec{x}\in S(\vec{x_0},\delta)\subseteq A$ και είναι συνεχείς στο $\vec{x_0}$, $i=1,2,\dots,d$. Τότε $\exists\ df(\vec{x_0})$.

Απόδειξη. $d=2$



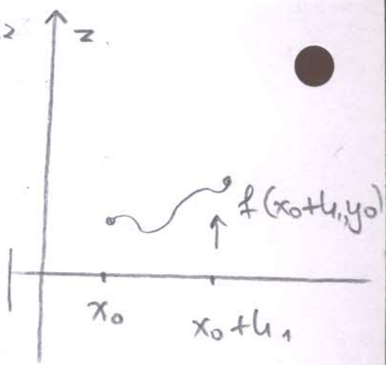
$h_1,h_2\neq 0$ $\quad (x_0+h_1,y_0+h_2)\in S((x_0,y_0),\delta)$

$$f(x_0+h_1,y_0)-f(x_0,y_0) \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\vartheta_1 h_1,y_0)\cdot h_1$$

για κάποιο $\vartheta_1=\vartheta_1(h_1)\in(0,1)$.

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0+h_1,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1,y_0\vartheta_2h_2)\cdot h_2$$

για κάποιο $\vartheta_2=\vartheta_2(h_1,h_2)\in(0,1)$



$$\frac{\left|f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}h_1-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot h_2\right|}{\|\vec{h}\|}$$

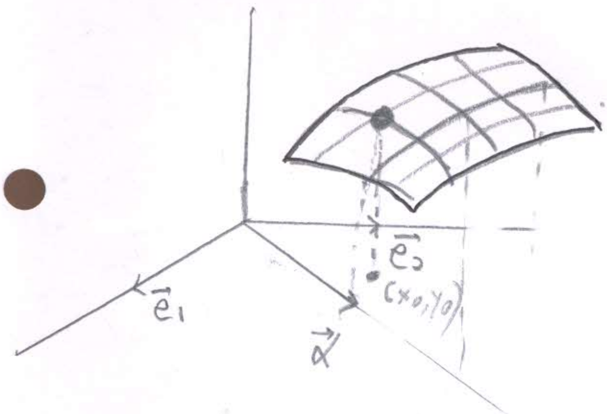
$$=\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\vartheta_1,y_0)\cdot h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1,y_0+\vartheta_2h_2)h_2-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_2\right|}{\|\vec{h}\|}$$

$$\leq \frac{|h_1|}{\|\vec{h}\|}\underbrace{\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\vartheta_1,y_0-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\right]}_{h_1\to d \searrow 0}+\frac{|h_2|}{\|\vec{h}\|}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1,y_0+\vartheta_2h_2)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\right]$$

Άρα από την υπόθεση για τη συνέχεια των μ.π. στο $\vec{x}$ έπεται ότι το 2ο μέλος τείνει στο 0
$(h, h_1) \to (0,0)$ δηλαδή $\exists\, d f(\vec{x_0})$.

Πολύ καλά:
Ο ορισμός του διαφορικού

Κατευθυνόμενη Παράγωγος ή Παράγωγος κατά Κατεύθυνση



$\vec{a} \in \mathbb{R}^d : \|\vec{\alpha}\| = 1$

$$D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x_0} + t\vec{\alpha}) - f(\vec{x_0})}{t} =$$

$$= \frac{d}{dt} f(\vec{x_0} + t\vec{a})\Big|_{t=0}.$$

(x_0,y_0) Παρ. κατά κατ. $\vec{a}$ της f στο $\vec{x_0}$.

$\vec{a} = \vec{e_i}$, $D_{\vec{e_i}} f(\vec{x_0}) = \dfrac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_i}$ (Βλ. Σχήμα)

Σχέση κατά κατεύθυνση - Συνέχεια / Διαφορ. (σελ. Ναβίτ)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$D_{\vec{a}} f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{a_1^2}{a_2}, & a_2 \neq 0 \\ 0, & a_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{a} = (a_1, a_2), \quad \|\vec{\alpha}\| = 1$$

f Ασυνεχής στο $(0,0)$

άρα μη διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Πρόταση

Έστω ότι $\exists\, df(\vec{x}_0)$. Τότε i) $\exists\, D_{\vec{\alpha}} f(\vec{x}_0)$ για κάθε $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $\|\vec{\alpha}\| = 1$ και $D_{\vec{\alpha}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{\alpha}$

ii) Έστω $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Τότε η μέγιστη μεταβολή της f στο $\vec{x}_0$, $\max\{D_{\vec{\alpha}} f(\vec{x}_0) : \|\alpha\| = 1\}$ γίνεται για $\vec{\alpha} = \dfrac{\nabla f(\vec{x}_0)}{\|\nabla f(\vec{x}_0)\|}$

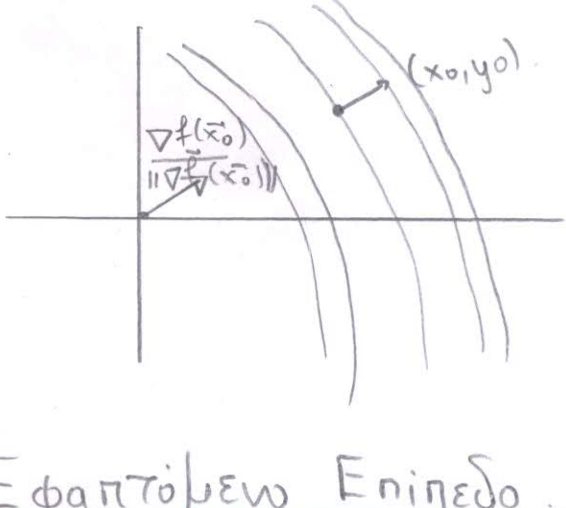
Απόδειξη

i) Ανάλογη με αυτήν για $\vec{a} = \vec{e_i}$

ii) $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{a} = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \cdot \|\vec{\alpha}\| \cdot \text{συν}\vartheta = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \,\text{συν}\vartheta$

$\vartheta = \sphericalangle(\nabla f(\vec{x}_0, \vec{\alpha})$ $\displaystyle\max_{\|\vec{\alpha}\| = 1} D_{\vec{\alpha}} f(\vec{x}_0) = \|\nabla f(\vec{x}_0)\|$ για

$$\vec{\alpha} = \frac{\nabla f(\vec{x}_0)}{\|\nabla f(\vec{x}_0)\|} \quad (\text{συν}\vartheta = 1,\ \vartheta = 0,\ \vec{\alpha} = \lambda \nabla f(\vec{x}_0),\ \lambda > 0)$$



Εφαπτόμενο Επίπεδο στη διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$, $f : A (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$

$$df(\vec{x}_0)(\vec{u}) = h_1 \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1} + \dots + h_d \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_d}$$

Εφαπτομ. επίπεδο: $x_{d+1} = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$.

Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Έστω $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, A ανοικτό σύνολο, $\vec{a} = (x_0, y_0) \in A$ και $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός: Κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\vec{a}$ προς την κατεύθυνση του $\vec{u}$ ονομάζεται ο ρυθμός μεταβολής της f κατά μήκος ευθείας που περνά από το $\vec{a}$ και είναι παράλληλη προς το $\vec{u}$. Δηλαδή:

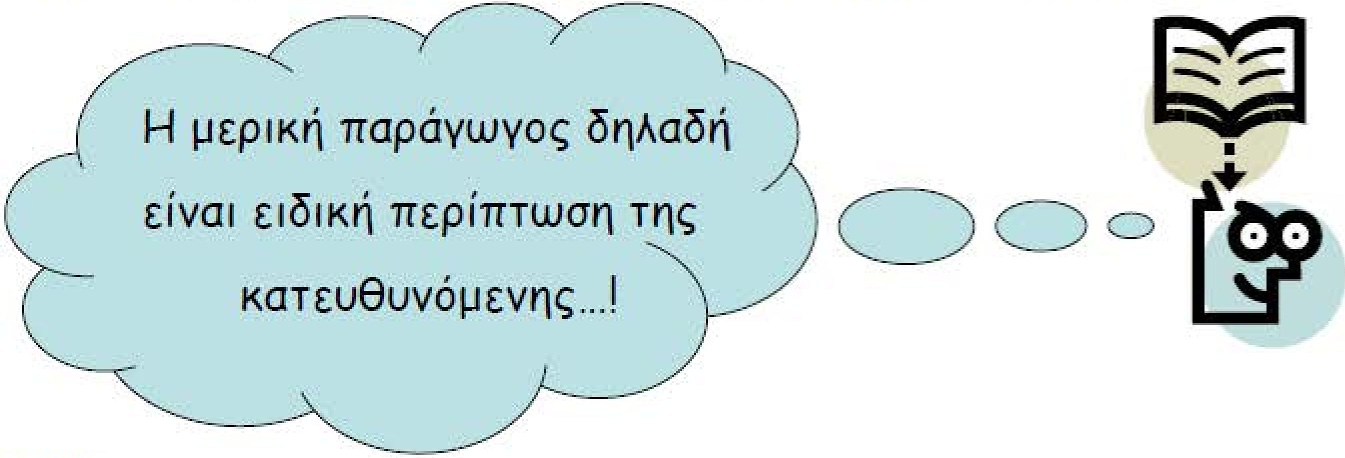
$$D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h \cdot \vec{u}) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot u_1, y_0 + h \cdot u_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Τι σημαίνει όμως αυτό γεωμετρικά;

Στη μερική παράγωγο βρίσκουμε τον περιορισμό της f ως προς μια ευθεία παράλληλη στον άξονα y ή x (μερική ως προς x ή ως προς y αντίστοιχα) και στη συνέχεια παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που μας προκύπτει.

Η **μόνη διαφορά** της κατευθυνόμενης από της μερικής παραγώγου είναι ότι τώρα περιορίζουμε την f ως **προς μια ευθεία που περνά από ένα σημείο του πεδίου ορισμού της και είναι παράλληλη με ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα u**.

Έπειτα και πάλι παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που μας προκύπτει.



Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{\sin\left(2x^2+3y^2\right)}{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο ως προς το διάνυσμα $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ στο σημείο (-1,-2). Δηλαδή:

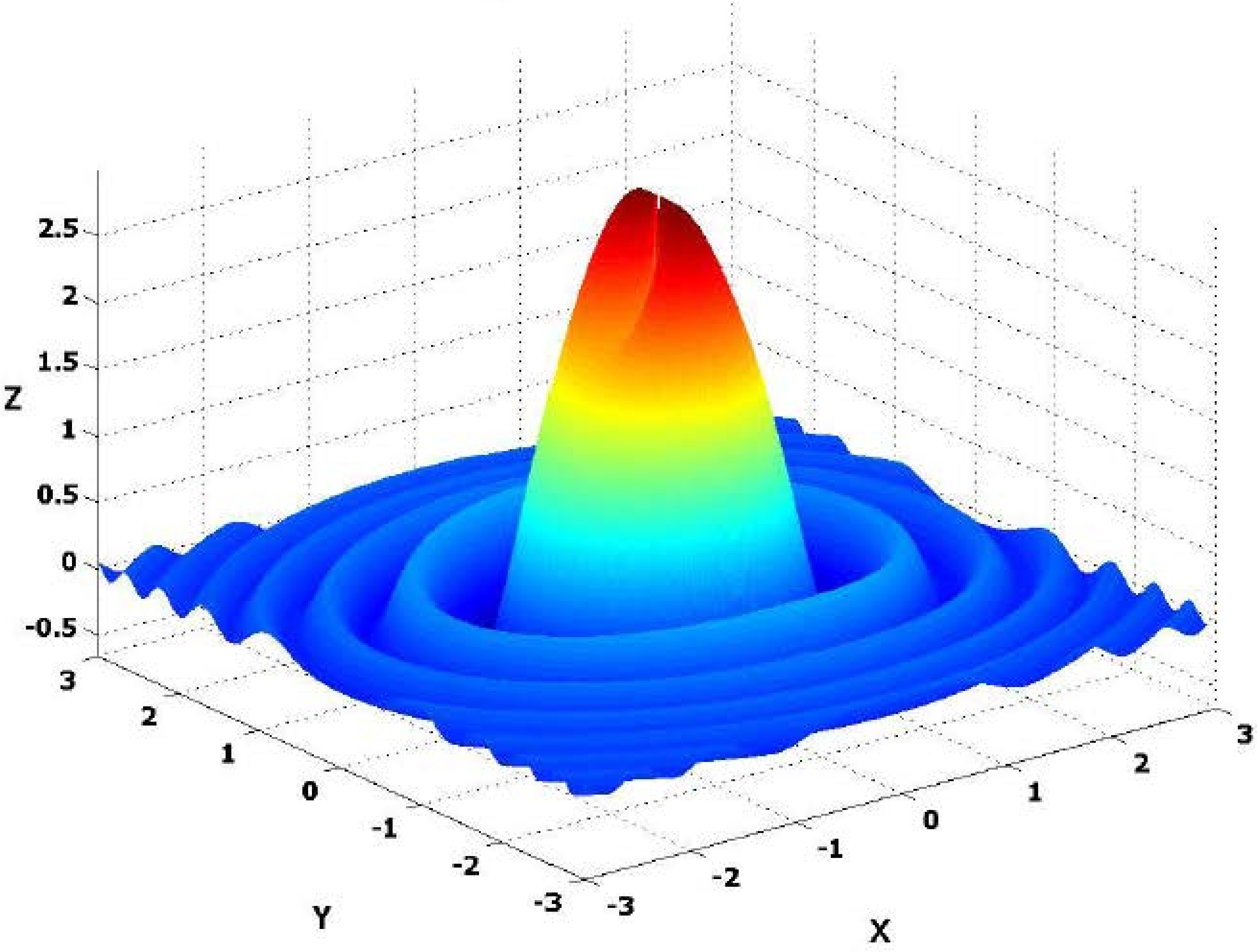
$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(-1,-2)=;$$

Η καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας που περνά από το (-1,-2) και είναι παράλληλη στο $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ είναι η: $y=x-1$

Ο ορισμός λέει ότι περιορίζουμε την f στην ευθεία $y=x-1$ και παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που θα μας προκύψει στο σημείο (-1,-2).

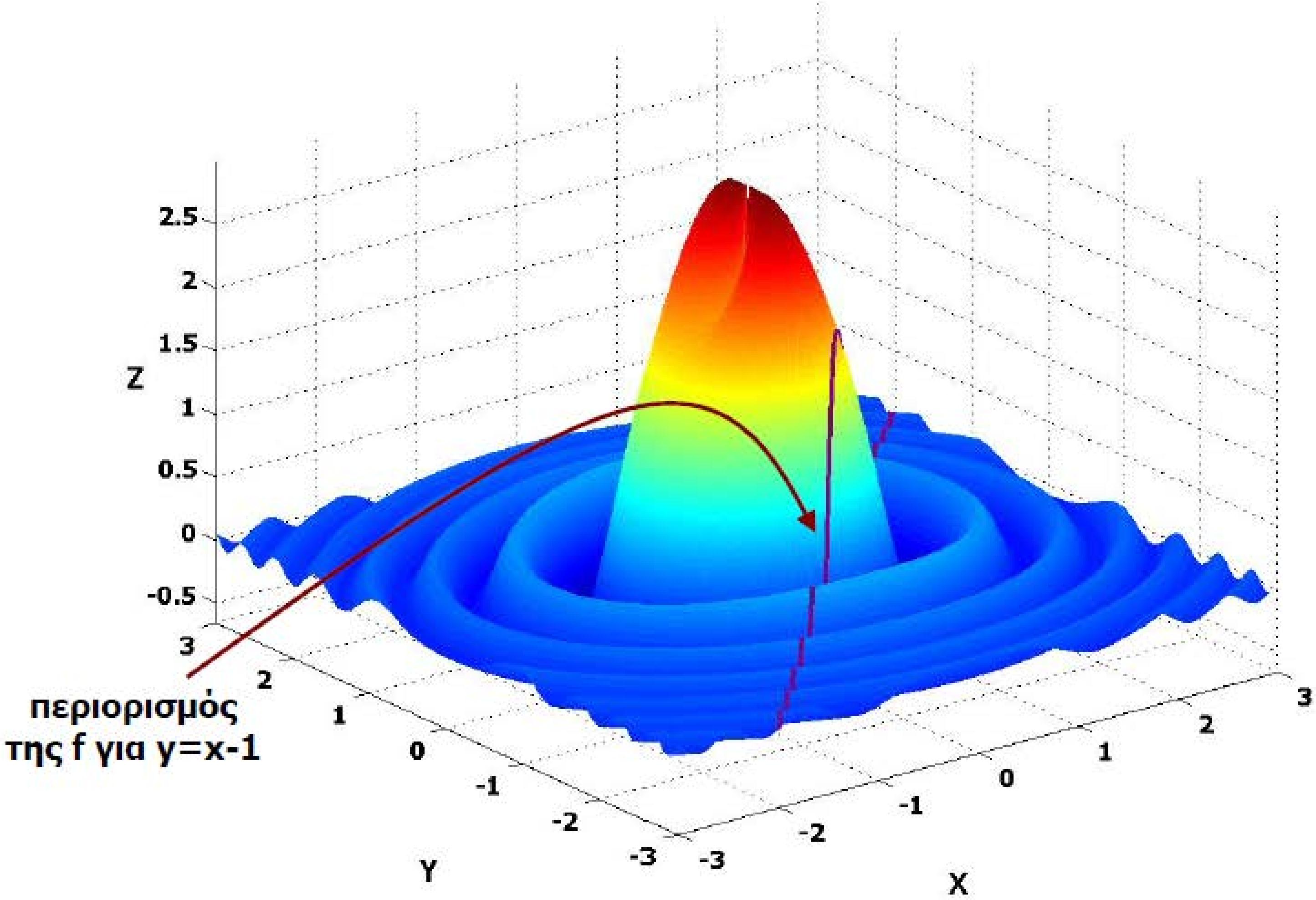
Έχουμε τη συνάρτησή μας...

$$f(x,y)=\frac{\sin\left(2x^2+3y^2\right)}{x^2+y^2},\ (x,y)\in[-3,3]\times[-3,3]\setminus\{(0,0)\}$$

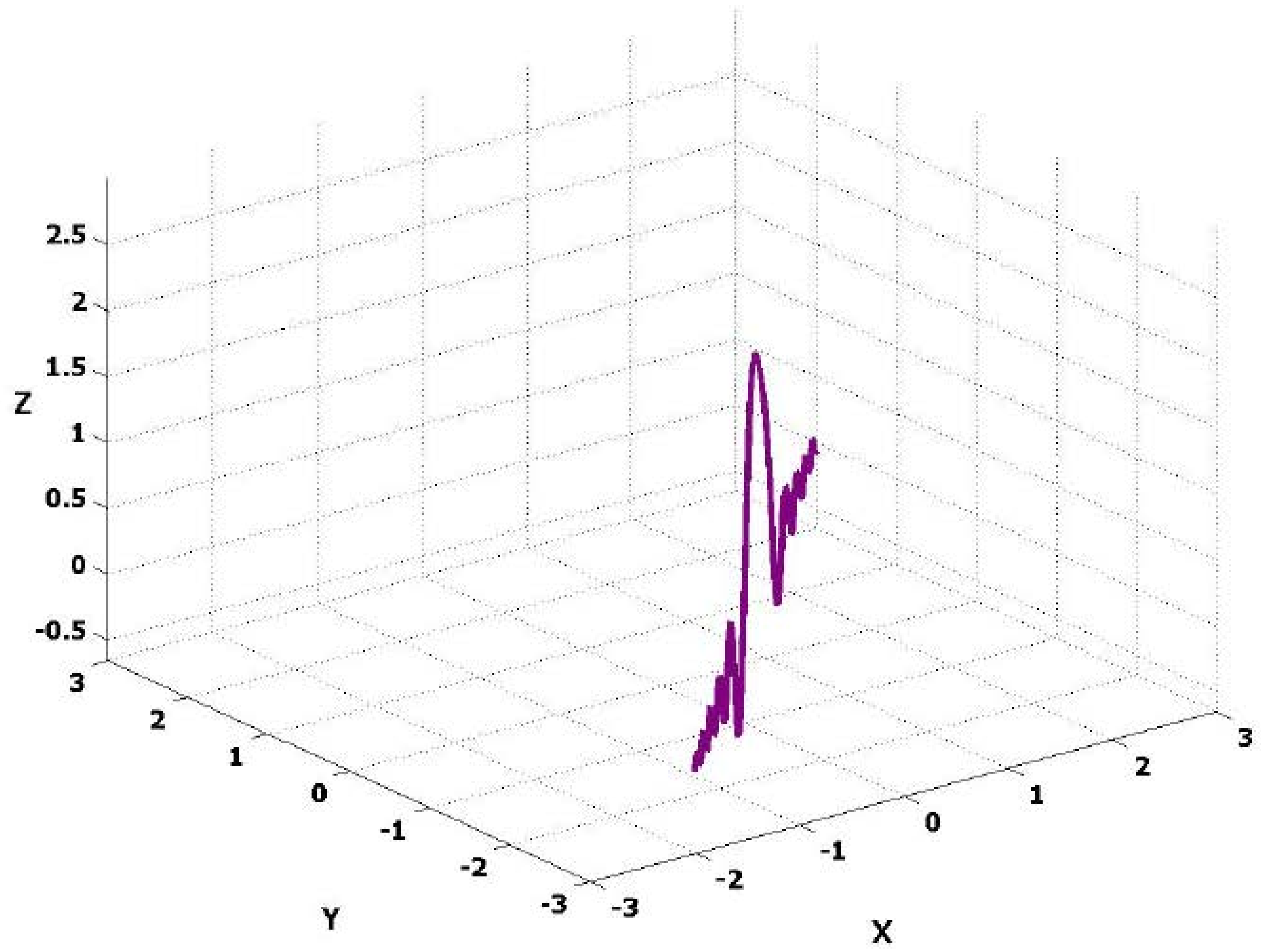


Παίρνουμε τον περιορισμό της για y=x-1

(δηλαδή το μέρος της συνάρτησης που αντιστοιχεί για y=x-1)

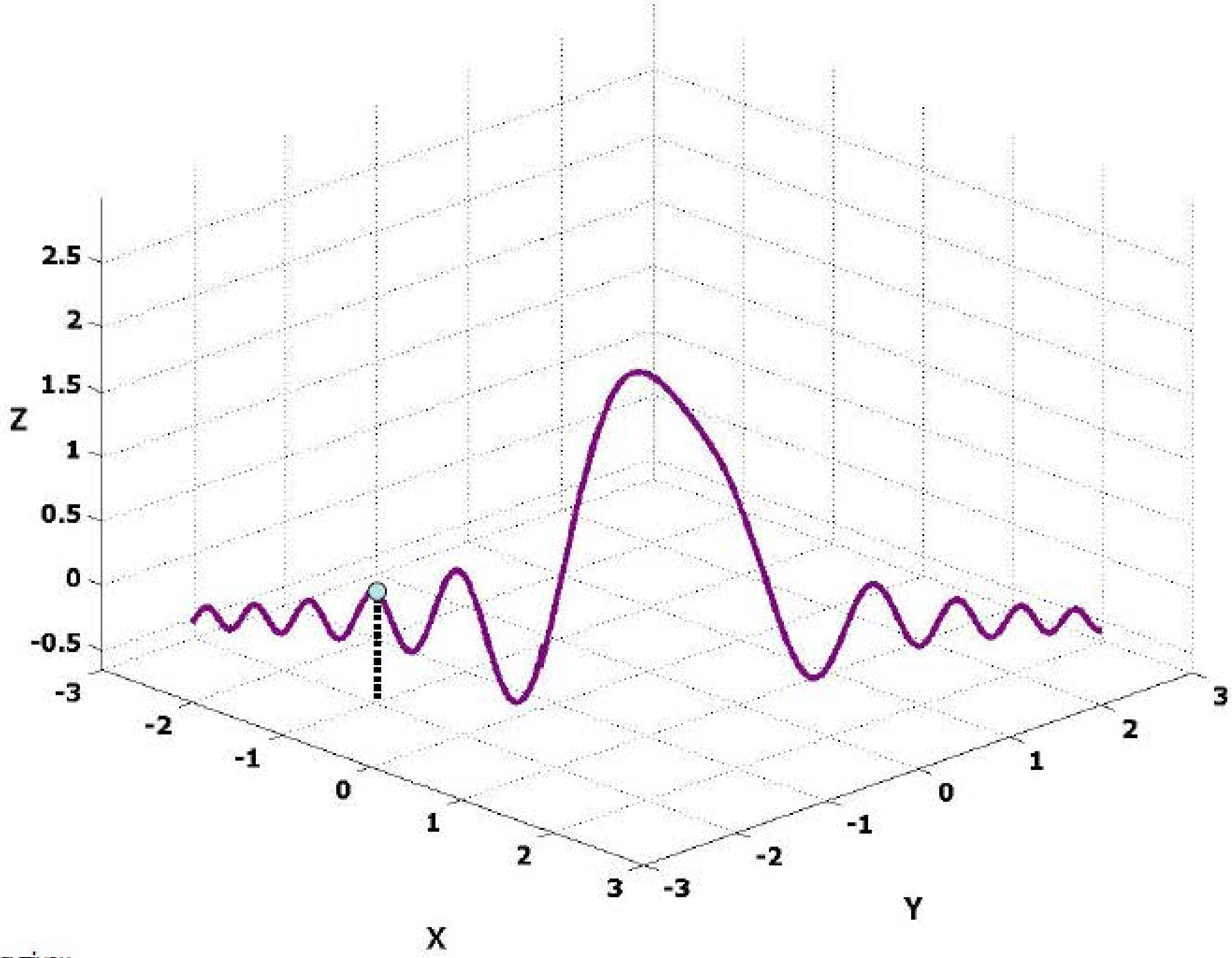


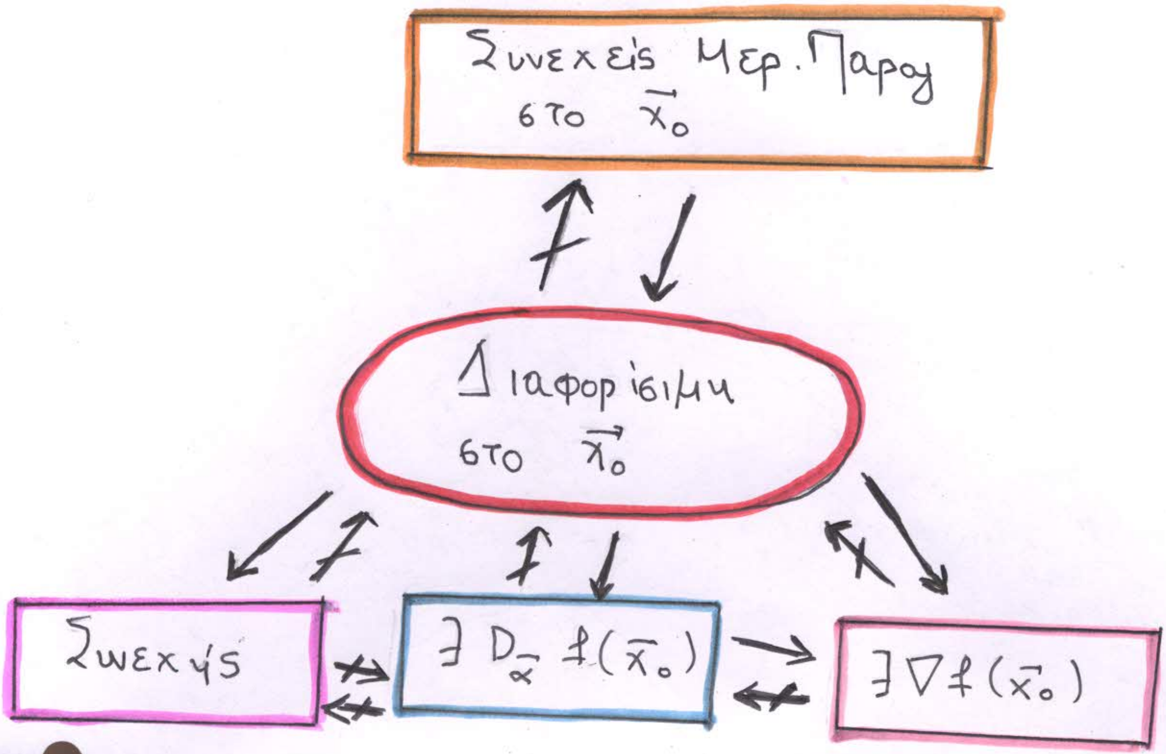
Απομονώνουμε τώρα αυτόν τον περιορισμό...

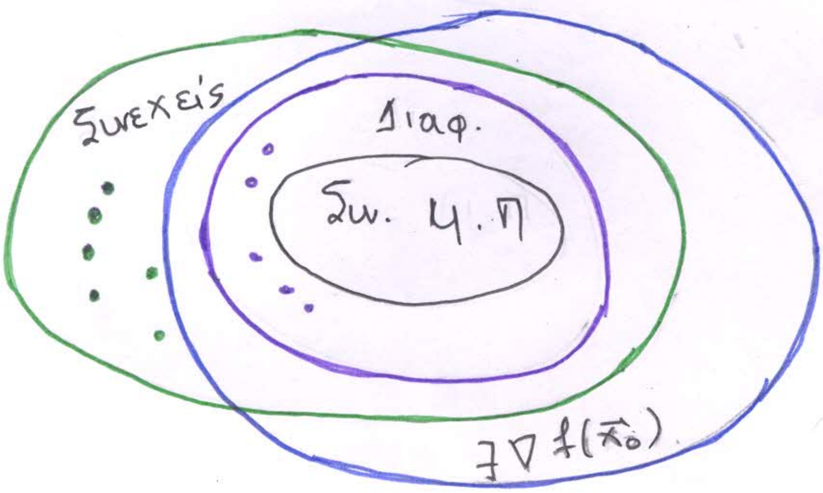


... και για να τον δούμε καλύτερα περιστρέφουμε λίγο τους άξονες

Η κατευθυνόμενη παράγωγος που αναζητούμε είναι η παράγωγος αυτής της συνάρτησης ως προς x στο σημείο x=-1.







Σημείωση

$$d(f+g)(\vec{x}_0) = df(\vec{x}_0) + dg(\vec{x}_0)$$

$$d(\lambda f)(\vec{x}_0) = \lambda\, df(\vec{x}_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Εφ' όσον $\exists\, df(\vec{x}_0), dg(\vec{x}_0)$

Διαφορικό

Έστω $f: A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$, A ανοικτό σύνολο.

Ορισμός: Η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{x}_0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ u: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ γραμμική και q: $S(\vec{0},\varepsilon) \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} q(\vec{h}) = 0$

τέτοιες ώστε $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + u(\vec{h}) + \|\vec{h}\| q(\vec{h})$

ή ισοδύναμα

$\Leftrightarrow$ $\exists$ u: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ γραμμική τέτοια ώστε $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - u(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$

Τη **μοναδική** αυτή συνάρτηση u συμβολίζουμε με $df(\vec{x}_0)$ και ονομάζουμε διαφορικό της f στο $\vec{x}_0$.

Για $d = 1$ έχουμε:

$f:\ A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ x_0 \in A$, A ανοικτό σύνολο

$$df(x_0)(h) = \frac{d}{dx} f(x_0) \cdot h,\ h \in \mathbb{R}$$

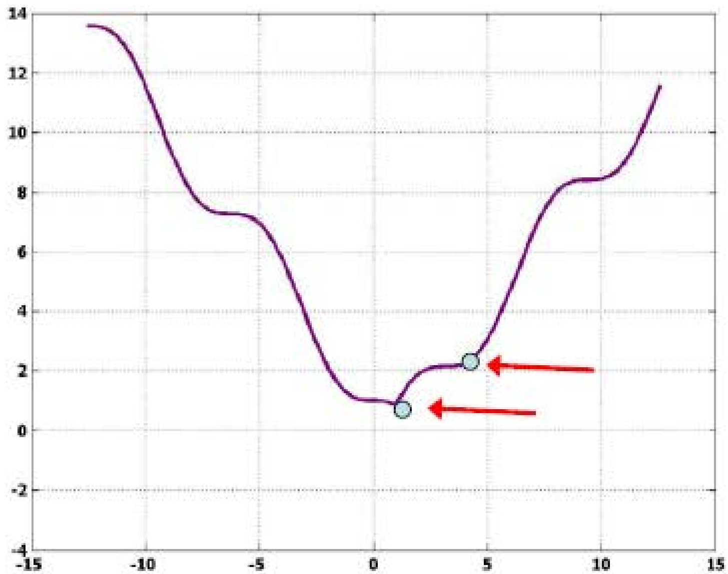
Παράδειγμα :

Η $f(x) = \sin x + |x|,\ x \in [-4\pi, 4\pi]$

έχει σε όλα τα σημεία της διαφορικό εκτός από το σημείο $x = 0$

Ας δούμε για το σημείο $x = \frac{3\pi}{2}$.

$f(x) = \sin x + |x|\ \ x \in [-4\pi, 4\pi]$



Για $d = 1$ έχουμε:

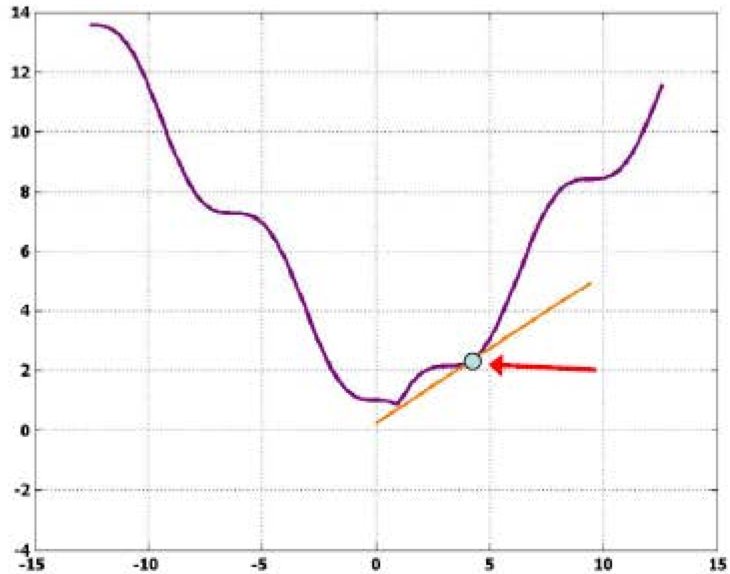
$f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A ανοικτό σύνολο

$$df(x_0)(h) = \frac{d}{dx} f(x_0) \cdot h, \; h \in \mathbb{R}$$

$f(x) = \sin x + |x| \quad x \in [-4\pi, 4\pi]$

Έχουμε την **εφαπτόμενη ευθεία**.

Το **διαφορικό** είναι η ευθεία αυτή, αν την μεταφέρουμε στην αρχή των αξόνων...!



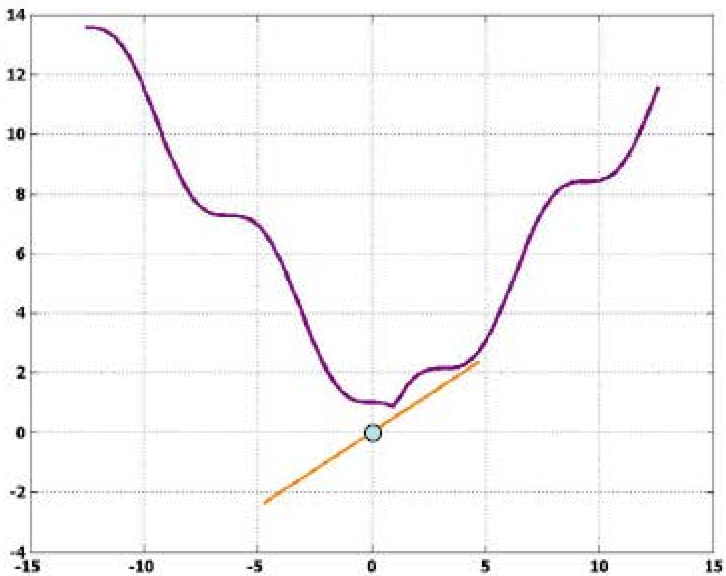
Για $d = 1$ έχουμε:

$$f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ x_0 \in A,\ A \text{ ανοικτό σύνολο}$$

$$df(x_0)(h) = \frac{d}{dx} f(x_0) \cdot h,\ h \in \mathbb{R}$$

Αυτό γιατί το διαφορικό είναι εξ' ορισμού **γραμμική συνάρτηση** και **πρέπει** να περνά από την αρχή των αξόνων.

$f(x) = \sin x + |x| \quad x \in [-4\pi, 4\pi]$



$\boxed{\text{Για } d = 2 \text{ έχουμε:}}$

$$f:\ A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R},\ (x_0, y_0) \in A,\ A \text{ ανοικτό σύνολο}$$

$$df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)\cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\cdot h_2,\ (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

<u>Παράδειγμα</u> :

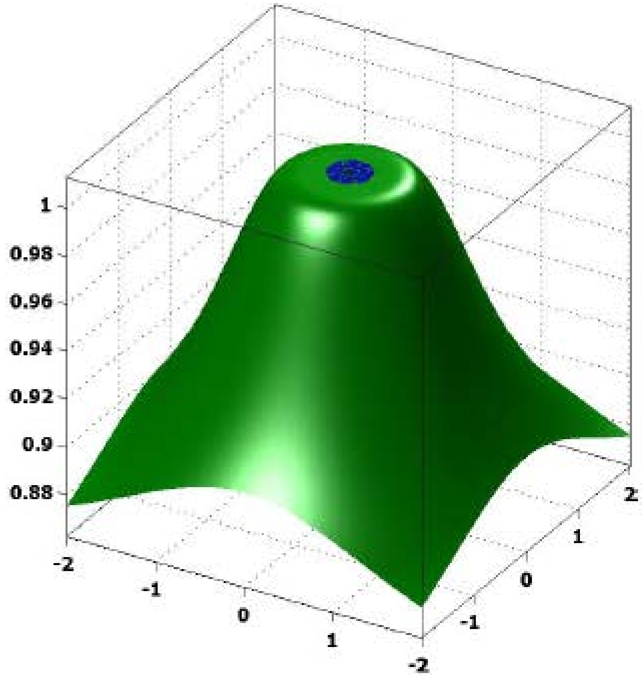
Η $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$,

$(x,y) \in [-2,2]\times[-2,2] \setminus \{(0,0)\}$

έχει διαφορικό σε όλα τα σημεία της.

Ας δούμε για το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right),\ (x,y) \in [-2,2]\times[-2,2] \setminus \{(0,0)\}$



Για $d = 2$ έχουμε:

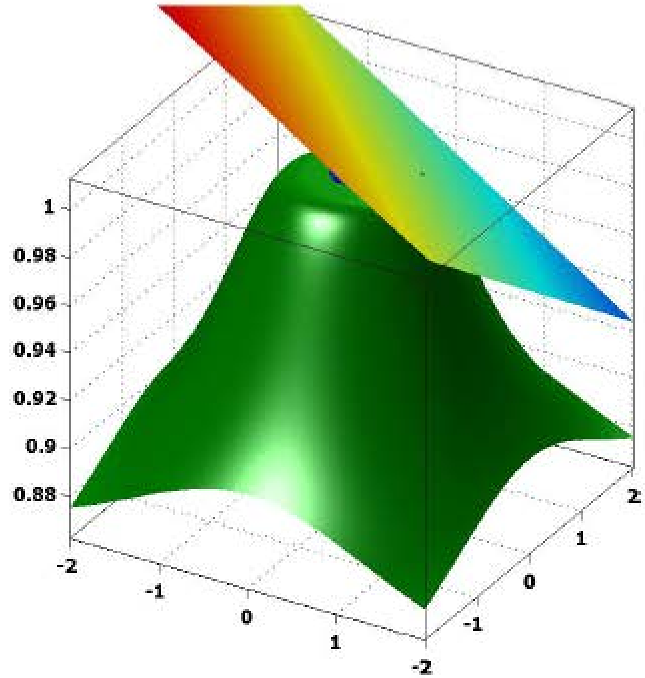
$$f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R},\ (x_0, y_0) \in A,\ A \text{ ανοικτό σύνολο}$$

$$df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \cdot h_2,\ (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

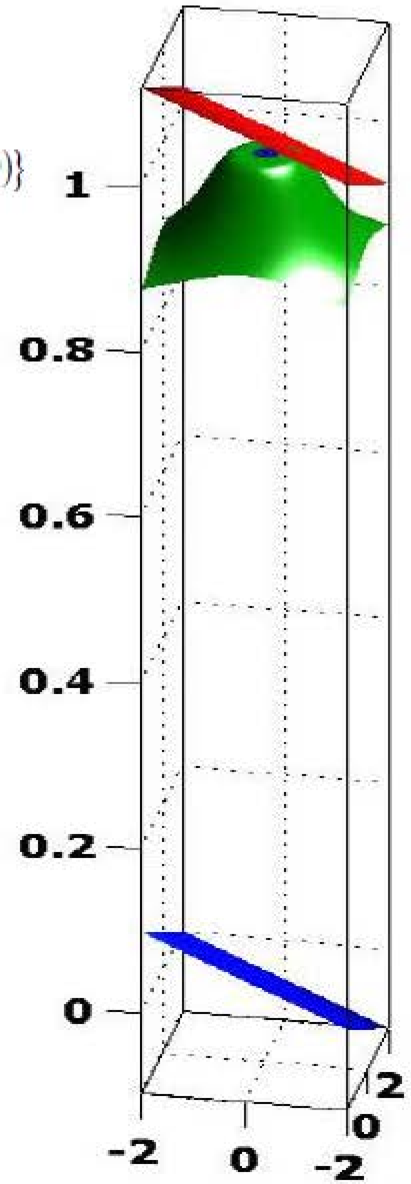
$$f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right),\ (x,y) \in [-2,2] \times [-2,2] \setminus \{(0,0)\}$$

Έχουμε το **εφαπτόμενο επίπεδο**.

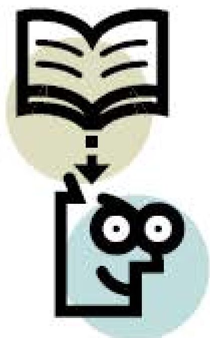
Το **διαφορικό** είναι το επίπεδο αυτό, αν το μεταφέρουμε στην αρχή των αξόνων...!



$$f(x,y)=e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right),\ (x,y)\in[-2,2]\times[-2,2]\setminus\{(0,0)\}$$



Βλέπουμε ότι η **μόνη** σχέση
που έχουν το διαφορικό και το
εφαπτόμενο επίπεδο είναι
ότι είναι παράλληλα!

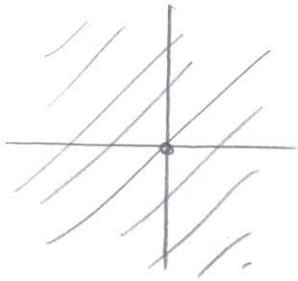


Ασκήσεις

1) i) $f(\vec{x}) = c$, $\vec{x} \in A (\subseteq \mathbb{R}^d) \Rightarrow \exists\, df(\vec{x_0}) = 0$.

$(df(\vec{x_0}) = 0 \cdot h_1 + 0h_2 + \dots + 0h_d)$

ii) $T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ γραμμική $\Rightarrow dT(\vec{x_0}) = T$



iii) $d(T+c)(\vec{x_0}) = T$

T γραμμική.

2) Διαφορ. + Εφ. Ευθεία της $f(x) = ημx$

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$

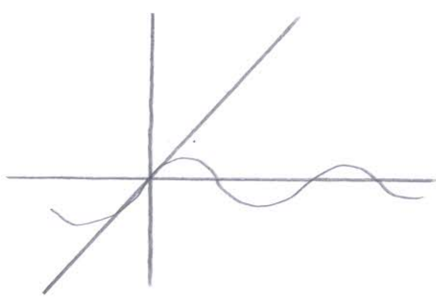
$df(x_0)(h) = f'(x_0)h$

$df(x_0)(h) = (συνx_0) \cdot h$, $h \in \mathbb{R}$

Εφ. Ευθεία $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

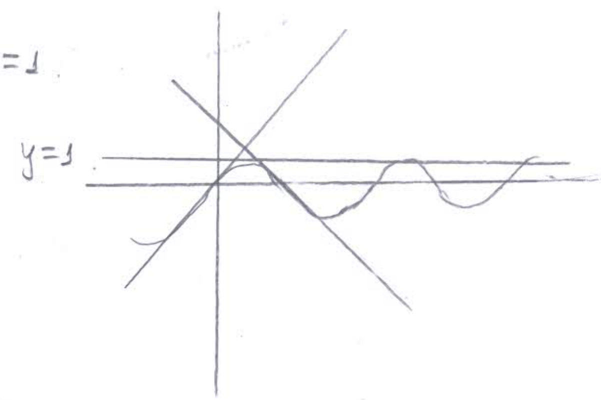
• $x_0 = 0$ $\quad df(0)(x) = x$

$y = x$



• $x_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad df(\frac{\pi}{2})(x) = 0$.

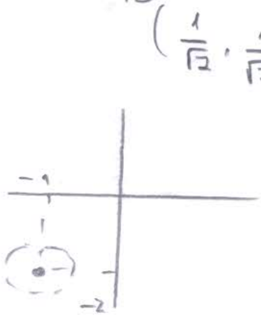
$y = 1$



3) $f(x,y) = \dfrac{ημ(2x^2 + 3y^2)}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$df(-1,-2)$ $\quad D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}(-1,-2)$

Λύση



$(0,0) \notin S((-1,-2),\delta) = S$

$(x,y)\in S$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4x\,\text{συν}(2x^2+3y^2)(x^2+y^2)-2x\,\text{ημ}(2x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{6y\,\text{συν}(2x^2+3y^2)\cdot(x^2+y^2)-2y\,\text{ημ}(2x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Συνεχείς στο $S \Rightarrow \exists\, df(x,y),\ (x,y)\in S$

$$df(-1,-2)(h_1,h_2)=\frac{-20\,\text{συν}(14)+2\,\text{ημ}(14)}{25}\cdot h_1+\frac{-60\,\text{συν}(14)+4\,\text{ημ}(14)}{25}\cdot h_2$$

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)}(-1,-2)=\nabla f((-1,-2))\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac{6\,\text{ημ}(14)-80\,\text{συν}(14)}{25\sqrt2}$$

Βλ. Σχήμα σελ. 75

4) $f(x,y)=e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\text{ημ}\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$

$(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$df\left(\frac12,\frac12\right)$. Εφαπτόμενο επίπεδο.

Λύση Ανάλογα με την 3)

$$df\left(\frac12,\frac12\right)(h_1,h_2)=\left(2e^2\,\text{ημ}(e^{-2})+2e^2\,\text{συν}(e^{-2})\right)h_1+\underbrace{\left(2e^2\,\text{ημ}(e^{-2})+2e^2\,\text{συν}(e^{-2})\right)}_{\alpha}h_2$$

$(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$

Εφαπτόμενο επίπεδο: $z=e^2\,\text{ημ}(e^{-2})+\alpha\left(x-\frac12\right)+\alpha\left(y-\frac12\right)$

Βλ. Σχήμα σελ. 84

5) $d\vec{f}(1,2,0)$, $\vec{f}(x,y,z)=(e^z, x^2+y^2)$ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Λύση

$\vec{f}=(f_1,f_2):\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$f_1(x,y,z)=e^z$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)=0=\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z)=e^z$

Συνεχείς στο $\mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow \exists\ df_1(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3)=0h_1+0h_2+e^{z_0}h_3$, $(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$

$f_2(x,y,z)=x^2+y^2$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)=2x$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)=2y$, $\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)=0$

$\Longrightarrow \exists\ df_2(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3)=(2x_0)h_1+(2y_0)h_2+0\cdot h_3$.

$d\vec{f}(1,2,0)\cdot(h_1,h_2,h_3)=(0\cdot h_1+0\cdot h_2+e^0 h_3,\ 2h_1+4h_2+0h_3)$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$$

6) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$df(0,0)$ εφ. επίπεδο στο $(0,0)$

Λύση. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$T_{(0,0)}(h_1,h_2)=0\cdot h_1+0\cdot h_2=\nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)$

$$\frac{|f(0,0)+(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla(0,0)\cdot(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|}=\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(\frac{|h_1|\cdot h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)$$

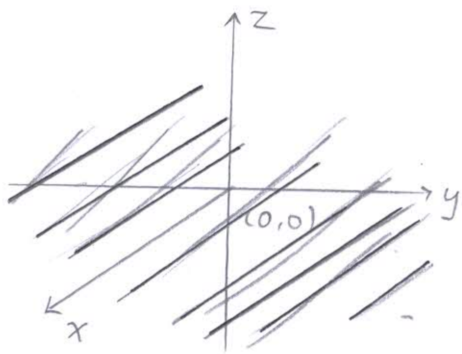
$$=\frac{|h_1|\cdot h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)}\xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{}0 \quad (\text{Γιατί;}).$$

Άρα, $\exists$ $\exists\, df(0,0)$ και $df(0,0)(h_1,h_2)=0h_1+0h_2$.

<u>Εφαπτόμενο Επίπεδο</u>

$$z=f(0,0)+\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0).$$

$$z=0.$$



7) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

; $df(0,0)$ Εφαπτόμενο επίπεδο στο $(0,0)$

<u>Λύση</u> $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$

$$T_{(0,0)}(h_1,h_2)=1\cdot h_1+0\cdot h_2=\nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)=$$

$$=\frac{|f(0,0)+(h_1;h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|}=\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2}-h_1\right)$$

$$=\frac{|h_1|\cdot h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}\;\not\xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{}\;0 \quad \left(\text{Γιατί;}\right).$$

8) i) $f(x,y) = g(x) + \varphi(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

όπου $g, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ.ω $\exists\, g(x_0), \varphi'(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}$

ΝΔΟ $\exists\, d f(x_0,y_0)$

ii) $f(x,y) = \eta\mu x + y^2 \eta\mu \frac{1}{y}$, $y \neq 0$ / $df(0,0)$?

$f(x,0) = \eta\mu x$

Παλιό Θέμα

iii) Εφαπτ. επίπεδο της iii) στο $(0,0)$. ___

Λύση

i) $\exists\, g'(x_0) \iff \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x_0+h_1) - g(x_0) - g'(x_0) \cdot h_1}{h_1} = 0$

$\exists\, \varphi'(y_0) \iff \lim\limits_{y \to y_0} \frac{\varphi(y_0+h_2) - \varphi(y_0) - \varphi'(y_0) \cdot h_2}{h_2} = 0$.

$$\left| \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - g'(x_0)h_1 - \varphi'(y_0) \cdot h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{g(x_0+h_1) + \varphi(y_0+h_2) - (g(x_0) + \varphi(y_0)) - g'(x_0)h_1 - \varphi'(y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right|$$

$$\leq \left| \frac{g(x_0+h_1) - g(x_0) - g'(x_0) \cdot h_1}{h_1} \right| \cdot \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} +$$

$$+ \left| \frac{\varphi(y_0+h_2) - \varphi(y_0) - \varphi'(y_0) \cdot h_2}{h_2} \right| \cdot \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0$$

Άρα, $\exists\, d f(x_0,y_0)(h_1,h_2) = g'(x_0) \cdot h_1 + \varphi'(y_0) \cdot h_2$

ii) $f(x,y) = \eta\mu x + y^2 \eta\mu \frac{1}{y}, \; y \neq 0$

$f(x,0) = \eta\mu x$

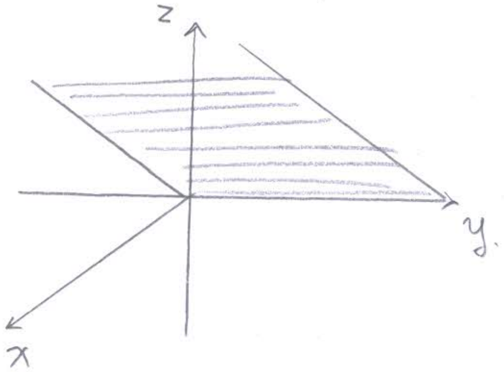
$g(x) = \eta\mu x, \; g'(0) = 1$

$$\varphi(y) = \begin{cases} y\,\eta\mu \frac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad \varphi'(0) = 0.$$

$f(x,y) = g(x) + \varphi(y)$

Από το i) $\exists\, d f(0,0)(h_1,h_2) = 1\cdot h_1 + 0\cdot h_2$.

iii) $z = f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0) \Rightarrow \boxed{z = x.}$



9) $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ (*)

i) οι μ.π. υπάρχουν στο $\mathbb{R}^2$, αλλά δεν είναι συνεχείς στο (0,0)

ii) $\exists\; d f(0,0)$

Λύση

i) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\,\eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

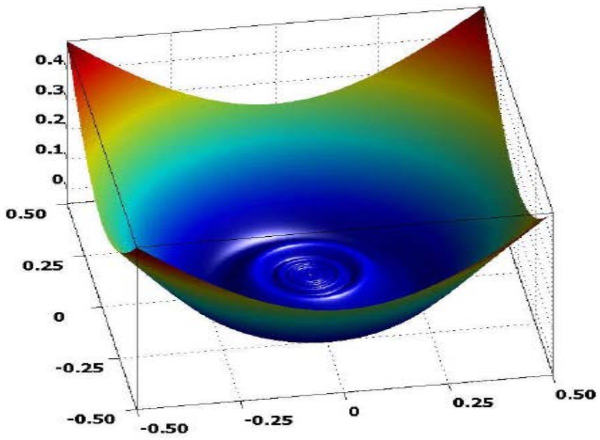
$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ Ασυνεχής στο (0,0) (Γιατί;)

Ανάλογα, η $\frac{\partial f}{\partial y}$ ασυνεχής στο (0,0).

ii) $$\frac{\left|f(h_1,h_2)-f(0,0)-(0\cdot h_1+0\cdot h_2)\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\cdot ημ\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\xrightarrow[\text{όταν } (h_1,h_2)\to(0,0)]{}0$$

---

9) $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

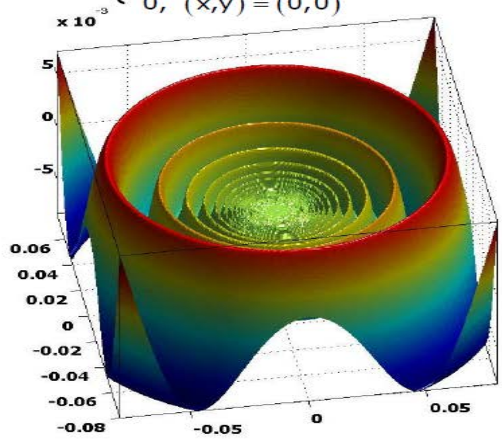


- Είναι συνεχής στο (0,0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$
- $\exists\ D_{\vec{u}}(0,0)$
- $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ και είναι **ασυνεχείς**
- $df(0,0)(h_1,h_2)=0$

Ναβίτ Κωνσταντίνου

Ας πάμε πιο κοντά...

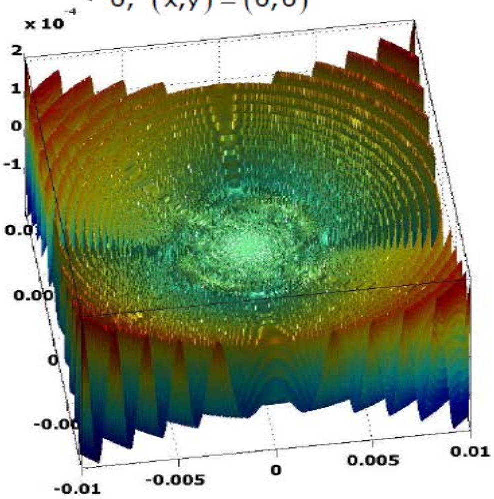
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\in[-0.08,0.08]\times[-0.08,0.08]\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



Ναβίτ Κωνσταντίνου

... και ακόμη πιο κοντά...

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\in[-0.01,0.01]\times[-0.01,0.01]\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



... και ακόμη πιο κοντά...

Ναβίτ Κωνσταντίνου

Ασκήσεις 4.

1) $f(x,y) = x^2 + \tau o\xi\varepsilon\varphi\, y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

i) $\exists\, df(1,0)$

ii) εφαπτ. επίπεδο στο $(1,0)$

iii) $\max\limits_{\|\vec{\alpha}\|=1} D_{\vec{\alpha}} f(1,0)$

2) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{1+x+y+z}, \dfrac{y}{1+x+y+z}, \dfrac{z}{1+x+y+z} \right)$

Παλιό Θέμα

$(x,y,z) \in A = \{(x,y,z) : x+y+z+1 \neq 0\}$

i) $d\vec{F}(x_0,y_0,z_0)$; $(x_0,y_0,z_0) \in A$

ii) $\det J(x_0,y_0,z_0)$

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad \exists\, df(0,0)$;

4) $(0,0)$ $\quad D_{\vec{\alpha}} f_i(0,0) \quad df_i(0,0)$;

$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu\, x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5) $f_\lambda(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\lambda} \\ 0 \end{cases}$ $\quad \exists\, d f_\lambda(0,0) \iff \lambda < 1$.

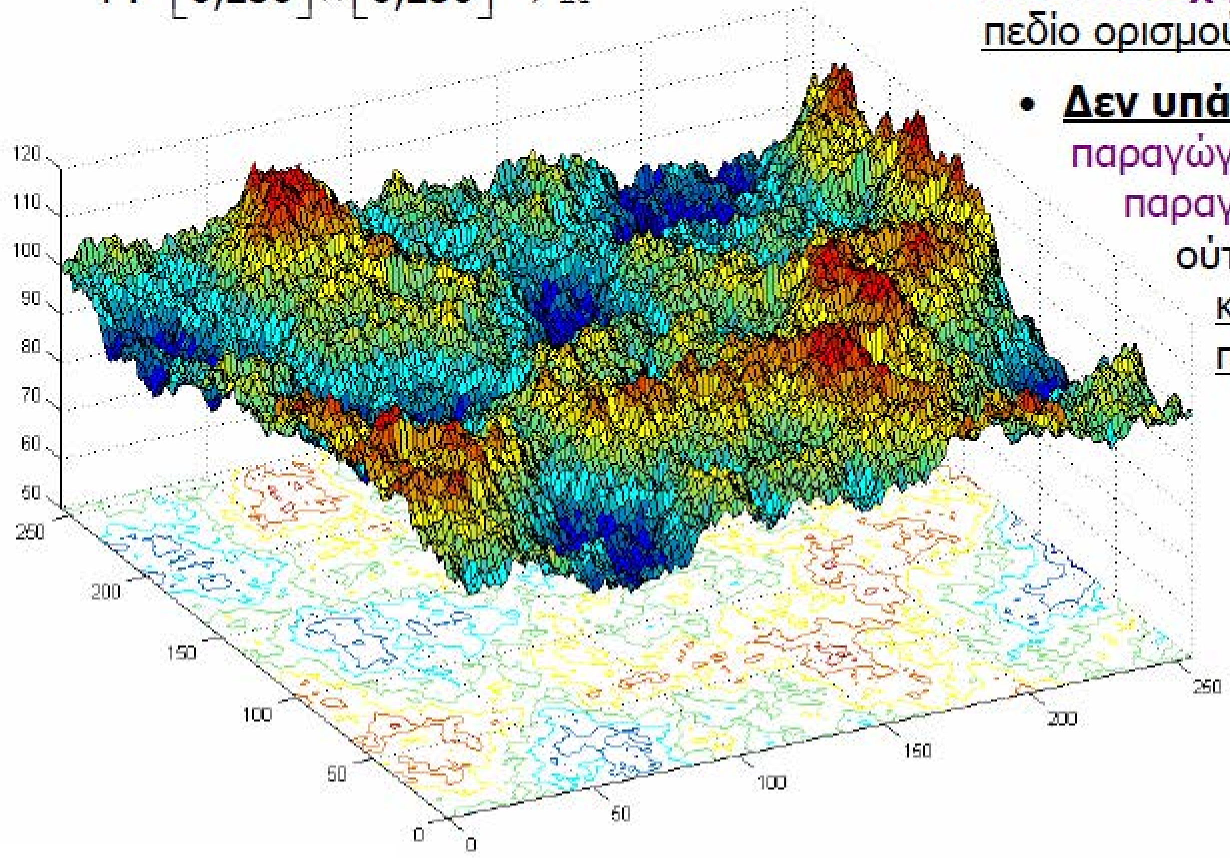
6) Να υπολογιστούν τα $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{e^{x \sin y} - ax - by - \gamma}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Ο περιορισμός της f στην ευθεία $y = \lambda x$: $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
με $g_\lambda(0) = D_\alpha f(0,0) = 0$

Η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

$f: [0,250]\times[0,250] \to \mathbb{R}$



- **Είναι συνεχής** σε <u>όλο το πεδίο ορισμού της</u>!
  - <u>**Δεν υπάρχουν**</u> μερικές παράγωγοι, κατευθυνόμενες παράγωγοι και ασφαλώς ούτε διαφορικό για <u>κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της</u>!

Παντελής Μπουμπούλης (Διδακτορική διατριβή, ΕΚΠΑ, 2006)