7. Τύποι του Taylor

7.1. Λήμμα. *Έστω* $U \subset \mathbb{R}$, *ανοικτό με* $[0,1] \subset U$, *και* $h \in C^m(U)$ *(όπου* $m \in \mathbb{N}$*). Τότε*

$$h(1) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} + \frac{h''(0)}{2!} + \cdots + \frac{h^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 h^{(m)}(t)(1-t)^{m-1}\,dt.$$

Επίσης

$$h(1) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} + \frac{h''(0)}{2!} + \cdots + \frac{h^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{h^{(m)}(\tau)}{m!}, \quad \text{για κάποιο } \tau \in [0,1].$$

Τύποι Taylor στη περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής. **1$^{\text{ος}}$** Έστω $U \subset \mathbb{R}$, ανοικτό με $[\alpha,\beta] \subset U$, και $f \in C^m(U)$ (όπου $m \in \mathbb{N}$). Τότε

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(\beta-\alpha)^{m-1} + \frac{1}{(m-1)!}\int_\alpha^\beta f^{(m)}(t)(\beta-t)^{m-1}\,dt.$$

2$^{\text{ος}}$ Για κάποιο $\xi \in [\alpha,\beta]$,

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(\beta-\alpha)^{m-1} + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(\beta-\alpha)^m.$$

3$^{\text{ος}}$ Θεωρήστε μια συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία να είναι C^m σε περιοχή του σημείου $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}(x-\alpha)^m + o\big((x-\alpha)^m\big) \quad \text{του } x \to \alpha \text{, δηλαδή}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{(x-\alpha)^m}\left[f(x) - f(\alpha) - \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) - \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 - \cdots - \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}(x-\alpha)^m\right] = 0.$$

Άσκηση. Δείξτε ότι για $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

7.2. Η περίπτωση των συναρτήσεων δυο μεταβλητών. Ας θεωρήσουμε μια C^m – συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη για (x,y) σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, καθώς και ένα σημείο $p = (\alpha,\beta)$ του συνόλου Ω. Εν συνεχεία ας σταθεροποιήσουμε ένα άλλο σημείο $q = (x,y) \in \Omega$ ούτως ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[p,q]$, από το σημείο $p = (\alpha,\beta)$ στο σημείο $q = (x,y)$, να περιέχεται στο Ω. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $h(t) = f((1-t)p + tq)$ για $t \in [0,1]$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 8.1, με αυτή την συνάρτηση $h(t)$, παίρνουμε τον τύπο του Taylor για την συνάρτηση $f(x,y)$. Π.χ., για $(x,y) \to (\alpha,\beta)$,

1$^{\text{ον}}$
$$f(x,y) = f(\alpha,\beta) + \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)(x-\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)(y-\beta) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta)(x-\alpha)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha,\beta)(x-\alpha)(y-\beta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta)(y-\beta)^2\right] + o(|p-q|^2)$$

2$^{\text{ον}}$
$$f(x,y) = f(\alpha,\beta) + \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)(x-\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)(y-\beta)$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta)(x-\alpha)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha,\beta)(x-\alpha)(y-\beta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta)(y-\beta)^2\right]$$
$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\alpha,\beta)(x-\alpha)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\alpha,\beta)(x-\alpha)^2(y-\beta)\right.$$
$$\left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\alpha,\beta)(x-\alpha)(y-\beta)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\alpha,\beta)(y-\beta)^3\right] + o(|q-p|^3).$$

Διαφορικά δεύτερης και ανώτερης τάξης. Για να συντομεύσουμε και να διευκολύνουμε την γραφή των ανωτέρω τύπων εισαγάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$(df)_{(x,y)}(u,v) \overset{op}{=} \left(u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f \overset{op}{=} u\dfrac{\partial f}{\partial x}+v\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $(d^2f)_{(x,y)}(u,v) \overset{op}{=} \left(u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f \overset{op}{=} u^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2uv\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+v^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,

$(d^3f)_{(x,y)}(u,v) \overset{op}{=} \left(u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 f \overset{op}{=} u^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3u^2v\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+3uv^2\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+v^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$, κ.ο.κ.

Τύπος του Taylor για συναρτήσεις δυο μεταβλητών. *Αν $f(x,y)$ είναι μια C^m – συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[p,q]\subset\Omega$ τότε*

$$f(q)=f(p)+(df)_p(q-p)+\frac{1}{2!}(d^2f)_p(q-p)+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}(d^{m-1}f)_p(q-p)+\frac{1}{m!}(d^mf)_\xi(q-p)$$

για κάποιο σημείο $\xi\in[p,q]$. Και, καθώς το σημείο $q\to p$,

$$f(q)=f(p)+(df)_p(q-p)+\frac{1}{2!}(d^2f)_p(q-p)+\cdots+\frac{1}{m!}(d^mf)_p(q-p)+o(|q-p|^m).$$

7.3. Ασκήσεις. 1. Δείξτε ότι $e^{x\cos(xe^y)}=1+x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+o((x^2+y^2)^{3/2})$, καθώς $(x,y)\to(0,0)$.

2. Δείξτε ότι καθώς $(x,y)\to(0,0)$,

$$e^{y+x\cos(xe^y)}=1+(x+y)+\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2\right)+\frac{1}{6}\left(-2x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)+o((x^2+y^2)^{3/2}).$$

3. Δείξτε ότι καθώς $(x,y)\to(1,1)$, $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\dfrac{(x-1)^2(y-1)}{2}+o(|x-1|^3+|y-1|^3)$.

4. Δείξτε ότι καθώς $(x,y)\to(2,1)$,

$$x^y=2+\left[(x-2)+2\log 2(y-1)\right]+\frac{1}{2}\left[2(1+\log 2)(x-2)(y-1)+2(\log 2)^2(y-1)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[\frac{3}{2}(x-2)^2(y-1)+3\log 2(2+\log 2)(x-2)(y-1)^2+2(\log 2)^3(y-1)^3\right]+o(|x-2|^3+|y-1|^3).$$

5. Υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^y-x-(x-1)(y-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)-\sin^3(|x-1|+|y-1|)}{|x-1|^3+|y-1|^3}$;

7.4 Η περίπτωση των συναρτήσεων περισσοτέρων μεταβλητών. Διαφορικά ανώτερης τάξης. Έστω $f(x_1,x_2,...,x_n)$ μια συνάρτηση, ορισμένη για $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, και έστω $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$(df)_x(u)=\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f=\sum_{1\le i\le n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$(d^2f)_x(u)=\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f=\sum_{1\le i,j\le n}u_iu_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)$$

$$(d^3f)_x(u)=\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^3 f=\sum_{1\le i,j,k\le n}u_iu_ju_k\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(x),\ \text{κ.ο.κ.}$$

Θεώρημα του Taylor. *Έστω $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση κλάσεως C^m. Έστω ακόμη a και x δυο σημεία του Ω ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,x]\subset\Omega$. Τότε υπάρχει σημείο $\xi\in[a,x]$ ώστε*

$$f(x)=f(a)+(df)_a(x-a)+\frac{1}{2!}(d^2f)_a(x-a)+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}(d^{m-1}f)_a(x-a)+\frac{1}{m!}(d^mf)_\xi(x-a).$$

Και $f(x)=f(a)+(df)_a(x-a)+\dfrac{1}{2!}(d^2f)_a(x-a)+\cdots+\dfrac{1}{m!}(d^mf)_a(x-a)+o(|x-a|^m)$, *του* $x\to a$.

Συμβολισμός των παραγώγων με πολλαπλούς δείκτες: Για ακεραίους $k_j \geq 0$,

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k} \quad \text{όπου } k=(k_1,k_2,\ldots,k_n) \text{ και } |k| = k_1+k_2+\cdots+k_n .$$

Επίσης θα γράφουμε $x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$, όταν $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Με αυτόν τον συμβολισμό

$$(d^m f)_x(u) = \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m f = \sum_{1 \leq j_1, j_2, \ldots, j_m \leq n} u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_m}} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=m} \frac{m!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots u_n^{k_n} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} u^k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k},$$

όπου βέβαια θέσαμε $k! = k_1! k_2! \cdots k_n!$. Και ο τύπος του *Taylor* λαμβάνει την μορφή:

$$f(x) = f(a) + \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{|k|=s} \frac{1}{k!} \frac{\partial^s f}{\partial x^k}(a)(x-a)^k + \sum_{|k|=m} \frac{1}{k!} \frac{\partial^s f}{\partial x^k}(\xi)(x-a)^k, \text{ για κάποιο } \xi \in [a,x].$$

7.4. Θεώρημα του Taylor – Ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κλάσεως C^m. Έστω ακόμη a και x δυο σημεία του Ω ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,x] \subset \Omega$. Τότε*

$$f(x) = f(a) + (df)_a(x-a) + \frac{1}{2!}(d^2 f)_a(x-a)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{(m-1)!}(d^{m-1} f)_a(x-a) + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (d^m f)_{(1-t)a+tx}(x-a)(1-t)^{m-1} dt .$$

7.5. Ασκήσεις. 1. «Οι συντελεστές στα αναπτύγματα Taylor είναι μοναδικοί». Εξηγήστε τί σημαίνει αυτό και αποδείξτε το.

2. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κλάσεως C^m. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \Omega$,

$$\lim_{y \to x} \frac{1}{|y-x|^m} \left| f(y) - f(x) - (df)_x(y-x) - \frac{1}{2}(d^2 f)_x(y-x) - \cdots - \frac{1}{m!}(d^m f)_x(y-x) \right| = 0,$$

μάλιστα δε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη για x στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, δηλαδή για κάθε $K \subset \Omega$, συμπαγές, και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(K,\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε αν $x \in K$ και $|y-x| < \delta$ τότε να ισχύει ότι

$$\left| f(y) - f(x) - (df)_x(y-x) - \frac{1}{2}(d^2 f)_x(y-x) - \cdots - \frac{1}{m!}(d^m f)_x(y-x) \right| \leq \varepsilon |y-x|^m .$$

3. Θεωρήστε την συνάρτηση μιας μεταβλητής $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \alpha\nu\ x > 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x \leq 0 \end{cases}$ και δείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι C^∞ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και ότι το $\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^m} = 0$, για κάθε m. Δηλαδή τα αναπτύγματα *Taylor* της f στο σημείο 0 είναι $f(x) = o(|x|^m)$ $(x \to 0)$. Δείξτε ότι το ίδιο φαινόμενο απαντάται και σε κάθε συνάρτηση της μορφής: $f(x) = \begin{cases} p(x) e^{-1/x^2} & \alpha\nu\ x > 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x \leq 0 \end{cases}$ όπου $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο του x. Και βέβαια τέτοια παραδείγματα υπάρχουν και στις πολλές μεταβλητές. Π.χ., θεωρήστε μια συνάρτηση της μορφής $f(x,y) = \begin{cases} p(x,y) e^{-1/(x^2+y^4)} & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \alpha\nu\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (όπου $p(x,y)$ είναι ένα πολυώνυμο των x,y) και δείξτε ότι $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = 0$, για κάθε k,l, και, για κάθε m,

$$f(x,y) = o\left((x^2+y^2)^{m/2}\right), \text{ για } (x,y) \to (0,0).$$

8. Τοπικά ακρότατα και άλλα κρίσιμα σημεία συναρτήσεων

8.1. Τοπικά ακρότατα. Θα λέγουμε ότι η συνάρτηση f έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $p \in \Omega$ αν υπάρχει $r > 0$ ούτως ώστε $B(p,r) \subset \Omega$ και $f(p) \geq f(x)$ για κάθε $x \in B(p,r)$. Ομοίως η f λέγεται ότι έχει **τοπικό ελάχιστο** σε ένα τέτοιο σημείο p, αν υπάρχει $r > 0$ ούτως ώστε $B(p,r) \subset \Omega$ και $f(p) \leq f(x)$ για κάθε $x \in B(p,r)$.

8.2. Θεώρημα. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο. Αν η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $p \in \Omega$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο σημείο αυτό, τότε*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = 0 \quad \text{για } j = 1,2,\dots,n.$$

Ορισμός. Το σημείο $p \in \Omega$ λέγεται **κρίσιμο σημείο** μιας C^1 συνάρτησης $f : \Omega \to \mathbb{R}$, αν $(\partial f / \partial x_j)(p) = 0$ για $j = 1,2,\dots,n$.

8.3. Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x,y) = \lambda x^2 + \mu y^2$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Το μόνο κρίσιμο σημείο αυτής είναι το $(0,0)$, το οποίο είναι:

τοπικό ελάχιστο όταν $\lambda > 0$ και $\mu > 0$ (μάλιστα πρόκειται για *ολικό* ελάχιστο),
τοπικό μέγιστο όταν $\lambda < 0$ και $\mu < 0$ (μάλιστα πρόκειται για *ολικό* μέγιστο), και
σαγματικό σημείο όταν $\lambda\mu < 0$.

2. Γενικότερα, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. Αν όλα τα λ_j είναι θετικά τότε το σημείο $0 = (0,0,\dots 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο. Αν όλα τα λ_j είναι αρνητικά τότε το σημείο 0 είναι τοπικό μέγιστο. Αν όλα τα λ_j είναι διάφορα του μηδενός αλλά όχι ομόσημα τότε η συνάρτηση έχει στο σημείο 0 σάγμα. Αν τώρα κάποιο από τα λ_j είναι μηδέν, η συμπεριφορά της συνάρτησης f, όσον αφορά το σημείο 0, εξαρτάται από τα πρόσημα των υπολοίπων (και γενικά αυτών των λ_j που είναι $\neq 0$). Π.χ., αν $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_j < 0$ για $j = 2,\dots,n$, τότε στο $0 = (0,0,\dots 0)$ έχουμε τοπικό μέγιστο. Αν $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ και $\lambda_3 < 0$ τότε το 0 είναι σαγματικό σημείο της f.

3. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = xy$. Το σημείο $(0,0)$ είναι το μόνο κρίσιμο σημείο αυτής και είναι σαγματικό σημείο. Παρατηρήστε ότι $f(x,y) = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$, οπότε όταν αλλάξουμε συντεταγμένες, θέτοντας $u = x + y$ και $v = x - y$, η συνάρτηση γίνεται $f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{1}{4}(u^2 - v^2)$, δηλαδή η περίπτωση του παραδείγματος 1, με $\lambda = 1/4$ και $\mu = -1/4$.

8.4. Η περίπτωση των συναρτήσεων δυο μεταβλητών. Για την συνάρτηση $g(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ ισχύει:

Αν $A < 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο $(0,0)$ η $g(x,y)$ έχει τοπικό μέγιστο,
Αν $A > 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο $(0,0)$ η $g(x,y)$ έχει τοπικό ελάχιστο,
Αν $AC - B^2 < 0$, το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της $g(x,y)$.

Γενικότερα αν το σημείο (α, β) είναι κρίσιμο σημείο της C^2 συνάρτησης $f(x,y)$ και θέσουμε

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta), \; B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,\beta) \text{ και } C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta),$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

Αν $A < 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο (α,β), η $f(x,y)$ έχει τοπικό μέγιστο,
Αν $A > 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο (α,β), η $f(x,y)$ έχει τοπικό ελάχιστο,
Αν $AC - B^2 < 0$, το σημείο (α,β) είναι σαγματικό σημείο της $f(x,y)$.

Παραδείγματα. 1. Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y$. Υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$f_x = 3x^2 + 2xy \quad \text{και} \quad f_y = x^2 - 2y - 4,$$

και, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $\{ 3x^2 + 2xy = 0$ και $x^2 - 2y - 4 = 0 \}$, βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης: $(x,y) = (0,-2)$, $(1,-3/2)$, $(-4,6)$. Εν συνεχεία υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$$f_{xx} = 6x + 2y,\ f_{xy} = 2x \ \text{ και } \ f_{yy} = -2,$$

και τις εκτιμούμε διαδοχικά στα κρίσιμα σημεία για να βρούμε τις αντίστοιχες ποσότητες A, B και C.

Στο σημείο $(x,y) = (0,-2)$: $A = -4$, $B = 0$ και $C = -2$. Και αφού $A < 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο $(0,-2)$ έχουμε τοπικό μέγιστο.

Στο σημείο $(x,y) = (1,-3/2)$: $A = 3$, $B = 2$ και $C = -2$. Και αφού $AC - B^2 < 0$, το σημείο $(1,-3/2)$ είναι σαγματικό σημείο.

Τέλος, στο σημείο $(x,y) = (-4,6)$: $A = -12$, $B = -8$ και $C = -2$. Και αφού $AC - B^2 < 0$, το σημείο $(-4,6)$ είναι σαγματικό σημείο.

2. Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x,y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$. Υπολογίζουμε

$$f_x = 2xy^2 - 10x - 8y,\ f_y = 2x^2y - 8x - 10y.$$

Για να λύσουμε το σύστημα

$$2xy^2 - 10x - 8y = 0 \quad \text{και} \quad 2x^2y - 8x - 10y = 0,$$

πολλαπλασιάζουμε την πρώτη των εξισώσεων με x και την δεύτερη με y και βρίσκουμε

$$2x^2y^2 - 10x^2 - 8xy = 0 \quad \text{και} \quad 2x^2y^2 - 8xy - 10y^2 = 0.$$

Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε ότι $x^2 = y^2$, δηλαδή $x = y$ ή $x = -y$.

Εύκολα τώρα βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία τα οποία είναι: $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(3,3)$ και $(-3,-3)$. Υπολογίζουμε εν συνεχεία τις παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$f_{xx} = 2y^2 - 10,\ f_{xy} = 4xy - 8,\ f_{yy} = 2x^2 - 10.$$

και βρίσκουμε ότι:

Στο σημείο $(0,0)$, $A < 0$ και $AC - B^2 > 0$, οπότε έχουμε τοπικό μέγιστο.

Στο σημείο $(1,-1)$, $AC - B^2 < 0$, οπότε έχουμε σάγμα.

Στο σημείο $(-1,1)$, $AC - B^2 < 0$, οπότε έχουμε σάγμα.

Στο σημείο $(3,3)$, $AC - B^2 < 0$, οπότε έχουμε σάγμα.

Στο σημείο $(-3,-3)$, $AC - B^2 < 0$, οπότε έχουμε σάγμα.

8.5. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων

$f(x,y) = 12xy - 3x^2y - 4xy^2$,

$f(x,y) = y^3 - 3x^2y$,

$f(x,y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$,

$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 6y$, $f(x,y) = (x-1)(x^2 - y^2)$,

$f(x,y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$,

$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$.

2. Για $a > b > 0$, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Δείξτε ότι

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = a/e.$$

3. Δείξτε ότι το αλγεβρικό σύστημα

$$3x^2 + 2xy^5 + y - 2x^4 - 2x^3y^5 - 2x^2y = 0,\ 5xy^4 + 1 - 2x^2y - 2xy^6 - 2y^2 = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον λύση (α,β) με $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = (x^3 + x^2y^5 + xy)e^{-(x^2+y^2)}$.

8.6. Αλγεβρικά προκαταρκτικά: Τετραγωνικές μορφές. 1. Φασματικό Θεώρημα. *Έστω* $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *ένας συμμετρικός πίνακας* $n\times n$ *με* $a_{ij}\in\mathbb{R}$. *Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση* $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *αποτελούμενη από ιδιανύσματα του* A. *Μάλιστα αν* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ *είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του* A *τότε*

$$\max\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}=\max\{t\cdot A\cdot t^T : t\in\mathbb{R}^n,\ |t|=1\} \quad \text{και} \quad \min\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}=\min\{t\cdot A\cdot t^T : t\in\mathbb{R}^n,\ |t|=1\}.$$

Επίσης $CAC^T=\Lambda$, *όπου* Λ *είναι ο διαγώνιος πίνακας*

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

και C *είναι ο ορθογώνιος πίνακας του οποίου οι γραμμές είναι τα διανύσματα* $v_1,v_2,\dots,v_n$.

2. Θεώρημα. *Έστω* $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *ένας συμμετρικός πίνακας* $n\times n$ *με* $a_{ij}\in\mathbb{R}$ *και*

$$Q(t)=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}t_it_j,\ t=(t_1,t_2,\dots,t_n),$$

η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Τότε

$Q(t)>0$ *για κάθε* $t\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ *αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *είναι θετικές.*

Και ομοίως, $Q(t)<0$ *για κάθε* $t\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ *αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *είναι αρνητικές.*

3. Θεώρημα του Sylvester. *Έστω* $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *ένας συμμετρικός πίνακας* $n\times n$ *με* $a_{ij}\in\mathbb{R}$ *και*

$$\Delta_1=a_{11},\ \Delta_2=\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\ \Delta_3=\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\ \Delta_4=\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},\ \text{κ.ο.κ.}$$

Τότε

1. *Οι ιδιοτιμές του* A *είναι όλες θετικές αν και μόνο αν* $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, ..., $\Delta_n>0$.
2. *Οι ιδιοτιμές του* A *είναι όλες αρνητικές αν και μόνο αν* $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, ..., $(-1)^n\Delta_n>0$.
3. *Αν* $\Delta_j\neq 0$ *για κάθε* $j=1,2,\dots,n$, *και δυο τουλάχιστον από τους αριθμούς* $\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ *είναι ετερόσημοι τότε ο πίνακας* A *έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές.*

8.7. Ταξινόμηση κρισίμων σημείων συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων μιας συνάρτησης. Δοθείσης συνάρτησης $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ο πίνακας

$$(Hf)(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$$

ονομάζεται **Hessian** της συνάρτησης f στο σημείο x — όταν γράφουμε $(Hf)(x)$ εννοούμε ότι οι παράγωγοι εκτιμούνται στο σημείο x. Πρόκειται βέβαια για έναν συμμετρικό πίνακα, και την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή

$$(\mathcal{H}f)_x(t)=\sum_{1\le i,j\le n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)t_it_j,$$

θα την ονομάζουμε ***Hessian* form** της συνάρτησης f στο σημείο x.

Θεώρημα. *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια C^2 – συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής. Αν όλες οι ιδιοτιμές της Hessian $(Hf)(a)$ είναι θετικές τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο a. Αν όλες οι ιδιοτιμές της $(Hf)(a)$ είναι αρνητικές τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο a. Και αν η $(Hf)(a)$ έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές, το σημείο a είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης.*

8.8. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων

$$f(x,y,z)=x^2+xy+y^2+z^2,\ f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1^2+x_2^2+3x_1x_2+4x_3x_5+x_4x_5,$$
$$f(x,y,z)=xyz(4-x-y-z),\ f(x,y,z)=x^3-3x-y^3+9y+z^2,$$
$$f(x,y,z)=x^3+xz^2+3x^2+y^2+2z^2,\ f(x,y,z)=(3x^2+2y^2+z^2)e^{-x^2-y^2-z^2},$$
$$f(x,y,z)=x^3+xz^2-3x^2+y^2+2z^2,\ f(x,y,z)=x^3+xyz+y^2-3x,$$
$$f(x,y,z)=e^x(x^2-y^2-2z^2),\ f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+xyz.$$

2. Έστω $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ένας συμμετρικός πίνακας $n\times n$ με $a_{ij}\in\mathbb{R}$ και $Q(t)=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}t_it_j$, $t=(t_1,t_2,...,t_n)$, η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Δείξτε ότι $t\cdot A\cdot t^T=Q(t)$. Εν συνεχεία, και χρησιμοποιώντας το φασματικό θεώρημα, αποδείξτε το *θεώρημα 2 της 9.6.*

3. Έστω $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ένας συμμετρικός πίνακας $n\times n$ με $a_{ij}\in\mathbb{R}$ και $Q(t)=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}t_it_j$, $t=(t_1,t_2,...,t_n)$, η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Δείξτε ότι αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι θετικές τότε υπάρχει $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $Q(t)\ge\lambda|t|^2$ για κάθε $t\in\mathbb{R}^n$.

4. Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια C^2 – συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή της Hessian $(Hf)(a)$ και v ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $|v|=1$, ορίζουμε την συνάρτηση $g(s)=f(a+sv)$, για $s\in\mathbb{R}$, κοντά στο 0. Δείξτε ότι τότε $g'(0)=0$ και $g''(0)=\lambda$, και συνεπώς $g(s)=g(0)+\frac{\lambda}{2}s^2+o(|s|^2)$, καθώς $s\to 0$.

5. Σωστό ή λάθος; Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x_1,x_2,...,x_n)$ είναι συνεχής για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le 1$ και C^1 για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$, και αν $\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|>0$ όταν $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$, τότε υπάρχουν $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$ και $f(x_1,x_2,...,x_n)<f(a_1,a_2,...,a_n)$ όταν $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$.

6. Σωστό ή λάθος; Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x_1,x_2,...,x_n)$ είναι συνεχής για $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4+|x_1x_2\cdots x_n|\le 1$ και C^1 για $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4+|x_1x_2\cdots x_n|<1$, και αν

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|>0 \text{ όταν } x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4+|x_1x_2\cdots x_n|<1,$$

τότε υπάρχουν $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4+|a_1a_2\cdots a_n|=1$ και

$$f(x_1,x_2,...,x_n)<f(a_1,a_2,...,a_n) \text{ όταν } x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4+|x_1x_2\cdots x_n|<1.$$

7. Σωστό ή λάθος; Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι C^2 σε περιοχή του σημείου $0\in\mathbb{R}^n$ και στο σημείο αυτό η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο τότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{2f(x)-2f(0)-\sum_{j,k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(0)x_jx_k}\right)}{e^{|x|}-1}=0.$$

8.9. Θεώρημα. *Αν $f:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι μια C^2 – συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής τότε υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{v_1,...,v_n\}$ ούτως ώστε η συνάρτηση f σχετικά με το σύστημα αυτό να γράφεται στην μορφή:*

$$f(a+s_1v_1+\cdots+s_nv_n)=f(a)+\frac{1}{2}\left(\lambda_1s_1^2+\lambda_2s_2^2+\cdots+\lambda_ns_n^2\right)+o(|s|^2),\ \text{καθώς } s\to 0.$$