10. Πεπλεγμένα οριζόμενες συναρτήσεις

10.1. Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης. *Ας θεωρήσουμε μια* C^1 *– απεικόνιση* $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ *ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, *και* $a\in\Omega$ *ένα σημείο όπου υποθέτουμε ότι* $\det[(Jf)(a)]\neq 0$. *Τότε η απεικόνιση* f *είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο σημείο* a, *δηλαδή υπάρχουν ανοικτά σύνολα* $U,V\subset\mathbb{R}^n$ *με* $a\in U$ *και* $b=f(a)\in V$, *ούτως ώστε η* f *να είναι* $1-1$ *πάνω στο* U, *να απεικονίζει το* U *επί του* V *και η αντίστροφη απεικόνιση* $f^{-1}:V\to U$ *να είναι επίσης κλάσεως* C^1. *Και* $(Jf^{-1})(f(x))=[Jf(x)]^{-1}$ *για* $x\in V$.

Το συμπέρασμα με άλλα λόγια. *Για σημεία* $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ *κοντά στο* $b=f(a)$, *το σύστημα των εξισώσεων*

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=y_1,\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=y_2,\ \ldots,\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=y_n,$$

έχει ακριβώς μια λύση $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *κοντά στο σημείο* a, *και η εξάρτηση των λύσεων*

$$x_1=x_1(y_1,y_2,\ldots,y_n),\ x_2=x_2(y_1,y_2,\ldots,y_n),\ \ldots,\ x_n=x_n(y_1,y_2,\ldots,y_n),$$

από τα $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *είναι* C^1. *(Εξυπακούεται ότι* $f_1,f_2,\ldots,f_n$ *είναι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της απεικόνισης* f.*)*

Παρατήρηση. Για $n=1$ η υπόθεση στο *Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης* είναι « $f'(p)\neq 0$ ». Για να δείτε πόσο ουσιώδης είναι αυτή η υπόθεση παρατηρήστε ότι αν δεν ικανοποιείται τότε ενδέχεται να συμβαίνουν δυο τινά:

1. Η συνάρτηση f να μην είναι $1-1$ σε καμιά περιοχή του σημείου p. Π.χ., αν $f(x)=x^2$ τότε $f'(0)=0$ και η συνάρτηση $x\to x^2$ δεν είναι $1-1$ σε κανένα διάστημα που περιέχει το 0.

2. Η συνάρτηση ενδέχεται να είναι $1-1$ αλλά η αντίστροφή της να μην είναι διαφορίσιμη. Π.χ., αν $f(x)=x^3$ τότε η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ αλλά η αντίστροφή της, δηλαδή η συνάρτηση $y\to\sqrt[3]{y}$, δεν είναι διαφορίσιμη στο $y=0$. Βέβαια αυτό συμβαίνει διότι $f'(0)=0$.

10.2. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε την τοπική αντιστροφή της απεικόνισης $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ στα διάφορα σημεία $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Επίσης γράψτε το ανάπτυγμα Taylor – μέχρι βαθμού 2 – για τις συντεταγμένες της τοπικής αντίστροφης της f που αντιστοιχεί στο σημείο $(\alpha,\beta)=(1,2)$.

2. Μελετήστε την τοπική αντιστροφή της απεικόνισης $f(x,y)=(e^x\cos y,e^x\sin y)$ στα διάφορα σημεία $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Επίσης γράψτε το ανάπτυγμα Taylor – μέχρι βαθμού 2 – για τις συντεταγμένες της τοπικής αντίστροφης της f που αντιστοιχεί σημείο $(\alpha,\beta)=(1,0)$.

3. Θεωρήστε έναν μετασχηματισμό $(u,v)\to(x,y)=(x(u,v),y(u,v))$, από το $uv-$επίπεδο στο $xy-$επίπεδο. Αν $f=f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση των x,y, τότε αυτή μέσω του εν λόγω μετασχηματισμού μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση των u,v, δηλαδή εννοούμε την συνάρτηση $f=f(x(u,v),y(u,v))$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\quad\text{και}\quad\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ομοίως, αν $(x,y)\to(u,v)=(u(x,y),v(x,y))$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\quad\text{και}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Γράψτε αναλυτικά την εξίσωση των πινάκων:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^{-1}.$$

Επίσης δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2.$$

Γράψτε ανάλογους τύπους και για τις άλλες παραγώγους τάξης 2.

4. Γράψτε τύπους ανάλογους – της προηγουμένης άσκησης – για μετασχηματισμούς της μορφής $(u,v,w)\to(x,y,z)$, κ.ο.κ.

5. Δείξτε ότι η απεικόνιση $(u,v)\to(x,y)=(u^2+v^5+uv, u^2v+u+v^2)$ αντιστρέφεται τοπικά στο σημείο $(u,v)=(0,1)$ και ορίζει C^∞ συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, για (x,y) κοντά στο σημείο $(1,1)$. Επίσης υπολογίστε τις τιμές των παραγώγων $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$.

6. Σωστό ή λάθος; Υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, ορισμένες για (x,y) κοντά στο σημείο $(1,1)$, ώστε $u(1,1)=0$, $v(1,1)=1$, και

$$u^2(x,y)+v^6(x,y)+3u(x,y)v(x,y)=x\,,\ u^2(x,y)v(x,y)+u(x,y)+v^2(x,y)=y\,.$$

7. Θεωρήστε την απεικόνιση $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\to(u,v)=(x^3-3xy^2, 3x^2y-y^3)$, και εξετάστε κοντά σε ποιά σημεία αυτή αντιστρέφεται. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων $x=x(u,v)$ και $y=y(u,v)$, τάξης 1, για συγκεκριμένη τοπική αντίστροφο.

8. Εξετάστε αν υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $f=f(x,y)$ και $g=g(x,y)$, ορισμένες για (x,y) κοντά στο $(0,0)$, ώστε $fg^2+\sin g=x$ και $e^{fg}-\sin f-1=y$.

9. Σωστό ή λάθος; Αν η απεικόνιση $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ είναι C^k $(k\geq 2)$ σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και, τοπικά στο σημείο $a\in\Omega$, η f αντιστρέφεται με μια C^1 απεικόνιση τότε αυτή η τοπική αντίστροφη είναι C^k.

10. Δείξτε ότι αν η απεικόνιση $(u,v)\to(x,y)=(x(u,v),y(u,v))$ είναι C^1 αμφιδιαφόριση μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ και οι συναρτήσεις $x=x(u,v)$ και $y=y(u,v)$ ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}\ \text{ και }\ \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$$

τότε και οι συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, που ορίζουν την αντίστροφη απεικόνιση, ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ \text{ και }\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

10.3. Αμφιδιαφορίσεις. Μια C^1 – απεικόνιση $f:D\to G$, όπου D,G είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, λέγεται **αμφιδιαφόριση** αν είναι $1-1$ *και επί*, με C^1 – αντίστροφη — ακριβέστερα λέγεται ότι είναι C^1 – αμφιδιαφόριση. Αν δε επιπλέον, η f, οπότε και η f^{-1}, είναι κλάσεως C^k, τότε λέγεται C^k – αμφιδιαφόριση. Τα δε ανοικτά σύνολα D και G για τα οποία υπάρχει $f:D\to G$, C^k – αμφιδιαφόριση, λέγεται ότι είναι C^k – **αμφιδιαφορικά**.

Παραδείγματα. 1. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{B}^n=\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|<1\}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$y=f(x)=\frac{1}{(1+|x|^2)^{1/2}}x=\left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}},\dots,\frac{x_n}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right)$$

για $x\in\mathbb{R}^n$, είναι C^∞ – αμφιδιαφόριση, με αντίστροφη την

$$x=g(y)=\frac{1}{(1-|y|^2)^{1/2}}y=\left(\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}},\dots,\frac{y_n}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}\right).$$

2. Ας θεωρήσουμε μια C^k – απεικόνιση $f:D\to\mathbb{R}^n$, όπου $k\geq 1$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $D\subset\mathbb{R}^n$ με $0\in D$ και ας υποθέσουμε ότι $\det[(Jf)(0)]\neq 0$. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ούτως ώστε η απεικόνιση F που ορίζεται από τον τύπο $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F(x)=f\left(\varepsilon(1+|x|^2)^{-1/2}\cdot x\right)$ για $x\in\mathbb{R}^n$, να είναι καλά ορισμένη και C^k – αμφιδιαφόριση από το $\mathbb{R}^n$ επί του $F(\mathbb{R}^n)$.

Άσκηση. Δείξτε ότι μια C^1 και επί απεικόνιση $f:\Omega\to\Theta$, μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, είναι C^1 αμφιδιαφόριση αν και μόνο αν η f είναι $1-1$ και $\det Jf(a)\neq 0$ για κάθε $a\in\Omega$.

10.4. Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ένα ανοικτό σύνολο και* $f : \Omega \to \mathbb{R}^s$ *μια* C^k *– απεικόνιση όπου* $s < n$ *και* $1 \le k \le \infty$. *Έστω ακόμη* $a \in D$ *ένα σημείο με* $f(a) = 0$ *και*

$$\det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_s)}{\partial(x_{m+1},\dots,x_n)}(a) \right) \ne 0,$$

όπου $m = n - s$, $f = (f_1,\dots,f_s)$ *(δηλαδή* f_i *είναι οι συνιστώσες της απεικόνισης* f*) και* $x = (x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)$ *είναι η μεταβλητή στο* Ω. *Τότε υπάρχουν* C^k *– συναρτήσεις* $g_1,\dots,g_s$ *ορισμένες για* $(x_1,\dots,x_m)$ *κοντά στο σημείο* $a' = (a_1,\dots,a_m)$ *του* $\mathbb{R}^m$ *ούτως ώστε το σύστημα των εξισώσεων*

$$\{ f_1(x_1,\dots,x_n) = 0, \dots , f_s(x_1,\dots,x_n) = 0 \},$$

κοντά στο σημείο a, *να είναι ισοδύναμο με το σύστημα*

$$\{ x_{m+1} = g_1(x_1,\dots,x_m), \dots , x_n = g_s(x_1,\dots,x_m) \}.$$

Το συμπέρασμα με άλλα λόγια. *Υπάρχουν ανοικτές περιοχές* W *του σημείου* a *στον* $\mathbb{R}^n$ *και* U *του σημείου* a' *στον* $\mathbb{R}^m$, *καθώς και* C^1 *– συναρτήσεις* $g_1,\dots,g_s : U \to \mathbb{R}$ *ούτως ώστε* $(x', g(x')) \in W$ *για* $x' = (x_1,\dots,x_m) \in U$, *όπου* $g = (g_1,\dots,g_s)$, *και* $f_1(x', g(x')) = 0$, ... , $f_s(x', g(x')) = 0$ *για* $x' \in U$. *Αλλά και αντίστροφα, αν* $(x', x'') \in W$ *και* $x' \in U$, *και* $f_1(x', x'') = 0$, ... , $f_s(x', x'') = 0$, *τότε* $x'' = g(x')$. *(Πρέπει να είναι σαφές ότι* $x'' = (x_{m+1},\dots,x_n)$*.)*

10.5. Ασκήσεις. 1. Δείξτε ότι υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $y = f(x)$, ορισμένη για x κοντά στο 1, ώστε $f(1) = 1$ και $x^{f(x)} + [f(x)]^x = 2$. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους $f'(1)$ και $f''(1)$.

2. Δείξτε ότι υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $z = f(x,y)$ ορισμένη για (x,y) κοντά στο $(0,0)$, με $f(0,0) = 0$ και $e^x + ye^{f(x,y)} + f(x,y)\cos[xyf(x,y)] = 1$. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$.

3. Προσεγγίσετε την συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται από την εξίσωση $y + e^{xy} = 1$ κοντά στο σημείο $(x,y) = (0,0)$.

4. Προσεγγίστε την συνάρτηση $z = z(x,y)$ που ορίζεται από την εξίσωση $e^x + ye^z + z\cos(xyz) - 1 = 0$, κοντά στο σημείο $(x,y,z) = (0,0,0)$.

5. Μελετήστε την δυνατότητα επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων $xy + 2yz - 3xz = 0$ και $xyz + x - y = 1$, για δυο από τις μεταβλητές σαν συνάρτηση της τρίτης, κοντά στο σημείο $(x,y,z) = (1,1,1)$.

6. Μελετήστε την δυνατότητα επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων $xy^2 + xzu + yv^2 = 3$ και $u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2$ ως προς u, v και z κοντά στο σημείο $x = y = z = u = v = 1$.

7. Τα θεωρήματα αντίστροφης απεικόνισης και πεπλεγμένων συναρτήσεων είναι τρόπον τινά ισοδύναμα. Εξηγήστε τί σημαίνει αυτό και αποδείξτε το. (Μελετήστε στην αρχή κάποιες μερικές περιπτώσεις.

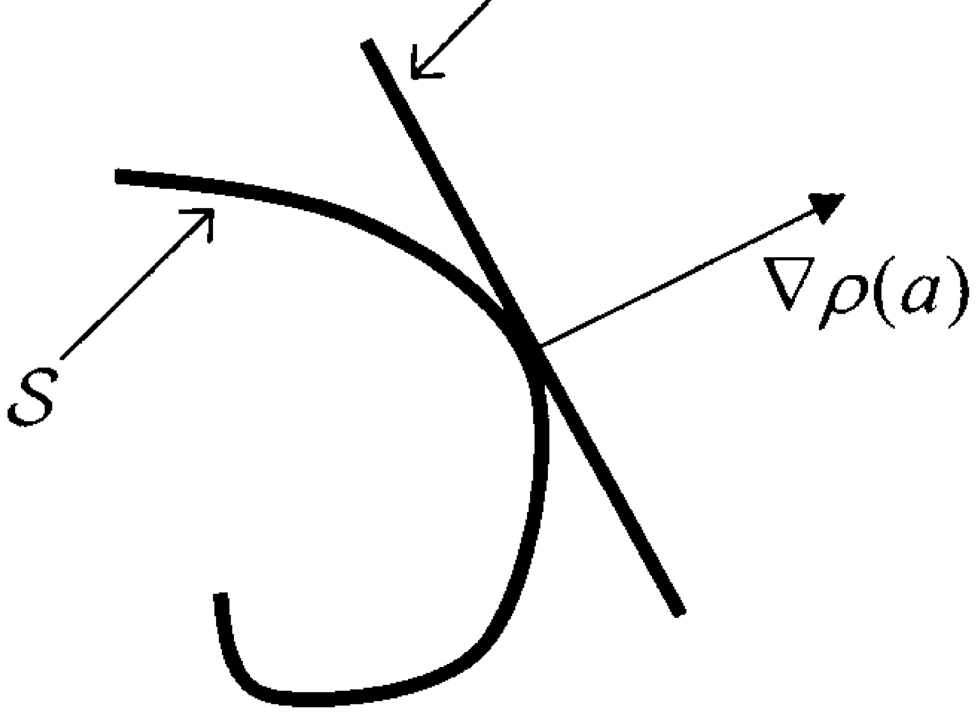
10.6. Σχόλια: Επιφάνειες. 1. Επιφάνειες διάστασης $n-1$ **στον** $\mathbb{R}^n$. Ας θεωρήσουμε μια C^1 συνάρτηση $\rho(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \Omega$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και ας θέσουμε

$$\mathcal{S} = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \Omega : \rho(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0\}.$$

Αν $\nabla\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}, \frac{\partial\rho}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\rho}{\partial x_n} \right) \ne 0$ στα σημεία της $\mathcal{S}$ τότε η επιφάνεια $\mathcal{S}$ (διάστασης $n-1$) είναι **ομαλή** υπό την έννοια ότι για κάθε σημείο $a \in \mathcal{S}$ υπάρχει $j = j(a) \in \{1,2,\dots,n\}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial\rho}{\partial x_j}(a) \ne a$ οπότε, από το *Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων*, η εξίσωση $\rho(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$, κοντά στο σημείο a, είναι ισοδύναμη με μια εξίσωση της μορφής $x_j = \varphi(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$, όπου φ είναι μια C^1 συνάρτηση σε περιοχή του σημείου $(a_1,\dots,a_{j-1},a_{j+1},\dots,a_n)$ ως προς τις μεταβλητές $(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$. Έτσι – στην περίπτωση αυτή – η επιφάνεια $\mathcal{S}$, κοντά στο σημείο a, είναι το γράφημα της $x_j = \varphi(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$. Και αφού αυτό συμβαίνει κάθε σημείο $a \in \mathcal{S}$, μας εξασφαλίζει την ομαλότητα της $(n-1)$ – διάστατης επιφάνειας $\mathcal{S}$.

Σε κάθε περίπτωση τώρα το διάνυσμα $\nabla\rho(a) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(a), \frac{\partial\rho}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial x_n}(a) \right)$ είναι **κάθετο** στην επιφάνεια $\mathcal{S} = \{\rho = 0\}$ στο σημείο a αυτής. Συνεπώς το επίπεδο (διάστασης $n-1$) με εξίσωση $\nabla\rho(a)\cdot(x-a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) = 0$ είναι το **εφαπτόμενο** επίπεδο στην επιφάνεια $\mathcal{S}$ στο σημείο a.

Το εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathcal{S}$ στο σημείο a.



2. Επιφάνειες διάστασης $n-2$ στον $\mathbb{R}^n$. Ας θεωρήσουμε δυο C^1 συναρτήσεις $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ορισμένες για $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, όπου Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ας θέσουμε

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega : \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Αν η τάξη του πίνακα

$$\frac{\partial(\rho, \lambda)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \rho_{x_1} & \rho_{x_2} & \cdots & \rho_{x_n} \\ \lambda_{x_1} & \lambda_{x_2} & \cdots & \lambda_{x_n} \end{pmatrix}$$

είναι 2 σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathcal{M}$ τότε η $\mathcal{M}$ είναι **επιφάνεια διάστασης** $n-2$. Επίσης $\mathcal{M} = \mathcal{S}_\rho \cap \mathcal{S}_\lambda$, δηλαδή $\mathcal{M}$ η τομή των $(n-1)-$διάστατων επιφανειών $\mathcal{S}_\rho = \{\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\}$ και $\mathcal{S}_\lambda = \{\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\}$. Το **εφαπτόμενο** επίπεδο στην επιφάνεια $\mathcal{M}$ στο σημείο a αυτής είναι το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla\rho(a)\cdot(x-a) = \nabla\lambda(a)\cdot(x-a) = 0\}$$

δηλαδή περιγράφεται από τις εξισώσεις: $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) = 0$ και $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\lambda}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) = 0$.

3. Η γενική περίπτωση: Επιφάνειες διάστασης m στον $\mathbb{R}^n$. Ας θεωρήσουμε k το πλήθος C^1 συναρτήσεις

$$\rho_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \rho_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \rho_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ορισμένες για $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, όπου Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ας θέσουμε

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega : \rho_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \ \ \textit{για}\ \ j = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Αν η τάξη του πίνακα

$$\frac{\partial(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \rho_{1,x_1} & \rho_{1,x_2} & \cdots & \rho_{1,x_n} \\ \rho_{2,x_1} & \rho_{2,x_2} & \cdots & \rho_{2,x_n} \\ \vdots & & & \\ \rho_{k,x_1} & \rho_{k,x_2} & \cdots & \rho_{k,x_n} \end{pmatrix}$$

είναι k σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathcal{M}$ τότε το $\mathcal{M}$ είναι ομαλή **επιφάνεια διάστασης** $m \overset{o\rho}{=} n-k$. Επίσης $\mathcal{M} = \mathcal{S}_{\rho_1} \cap \mathcal{S}_{\rho_2} \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{\rho_k}$, δηλαδή $\mathcal{M}$ είναι η τομή των k το πλήθος $(n-1)-$διάστατων επιφανειών $\mathcal{S}_{\rho_j} = \{\rho_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Το **εφαπτόμενο** επίπεδο (διάστασης m) στην επιφάνεια $\mathcal{M}$ στο σημείο a αυτής είναι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla\rho_j(a)\cdot(x-a) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, k\}$.

11. Μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων περιορισμένων σε επιφάνειες: Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

11.1. Θεώρημα. *Έστω* $\rho_1,\ldots,\rho_s:\Omega\to\mathbb{R}$, s *το πλήθος* C^1 *−συναρτήσεις ορισμένες σε ένα ανοικτό σύνολο* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, *όπου* $s<n$, *και* $\mathcal{M}=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega:\ \rho_1(x_1,\ldots,x_n)=\cdots=\rho_s(x_1,\ldots,x_n)=0\}$. *Ας υποθέσουμε ότι στο σημείο* $a\in\mathcal{M}$, *μια* C^1 *−συνάρτηση* $f:\Omega\to\mathbb{R}$, *περιορισμένη στο* $\mathcal{M}$, *έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο, δηλαδή υπάρχει* $\varepsilon>0$ *ούτως ώστε* $f(x)\le f(a)$ *ή* $f(x)\ge f(a)$ *για κάθε* $x\in\mathcal{M}\cap B(a,\varepsilon)$. *Αν επιπλέον η τάξη του πίνακα Jacobi*

$$\frac{\partial(\rho_1,\ldots,\rho_s)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a)=\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le s\\ 1\le j\le n}}$$

είναι s, *τότε υπάρχουν αριθμοί* $\lambda_1,\ldots,\lambda_s\in\mathbb{R}$ *ούτως ώστε*

$$\vec{\nabla}f(a)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\vec{\nabla}\rho_i(a),\ \text{δηλαδή}\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\frac{\partial\rho_i}{\partial x_j}(a),\ \text{για}\ j=1,\ldots,n.$$

Παρατήρηση. Τονίζουμε ότι πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με την υπόθεση σχετικά με την τάξη του πίνακα *Jacobi* — χωρίς αυτήν το συμπέρασμα ενδέχεται να μην ισχύει. Π.χ., αν πάρουμε την συνάρτηση $\rho(x,y)=y^2-x^3$, τότε η συνάρτηση $f(x,y)=x$, περιορισμένη στην καμπύλη $\rho(x,y)=0$, έχει ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$ αφού $f(x,y)\ge f(0,0)$ όταν $\rho(x,y)=0$. Εν τούτοις δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(0,0)=\lambda\nabla\rho(0,0)$, αφού $\nabla\rho(0,0)=0$ και $\nabla f(0,0)=(1,0)$.

11.2. Ασκήσεις. 1. Αποδείξτε το ανωτέρω θεώρημα στις περιπτώσεις: $\{n=2,\ s=1\}$, $\{n=3,\ s=1\}$ και $\{n=3,\ s=2\}$.

2. Βρείτε την μεγίστη και ελαχίστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=x^3+y^2$ πάνω στον κύκλο $x^2+y^2=1$.

3. Δοθέντων δυο θετικών αριθμών α και β, υπολογίστε την μεγίστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=x^\alpha y^\beta$ για $x+y=1$ με $x\ge0$ και $y\ge0$.

4. Πάρτε την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ όπου $a,b>0$, και ας αναζητήστε το σημείο (u,v) πάνω την έλλειψη με $u>0$ και $v>0$ και με την ιδιότητα αν φέρουμε την εφαπτομένη $\mathrm{E}_{(u,v)}$ στην έλλειψη στο σημείο (u,v), αυτή να κόβει από το πρώτο τεταρτημόριο το ελάχιστο δυνατόν εμβαδόν.

5. Βρείτε το σημείο πάνω στην επιφάνεια $z^2-xy=1$ το οποίο είναι πλησιέστερα στο $(0,0,0)$.

6. Δοθέντων αριθμών $a,b,c>0$, υπολογίστε το $\min\{x^3+y^3+z^3:\ ax+by+cz=1\ \textit{και}\ x,y,z>0\}$.

7. Βρείτε τα σημεία στην τομή των επιφανειών $x^2-xy+y^2-z^2-1=0$ και $x^2+y^2-1=0$ τα οποία είναι πλησιέστερα στο $(0,0,0)$.

8. Υπολογίστε την ελαχίστη από τις αποστάσεις των σημείων της έλλειψης $x^2+4y^2=4$ από τα σημεία της ευθείας $x+y=4$.

9. Έστω $a,b,c>0$. Αν $x+y+z=1$ και $x,y,z>0$, πότε γίνεται μέγιστη η ποσότητα $x^a y^b z^c$;

10. Στα σημεία (x,y,z) του ελλειψοειδούς $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$, με $x,y,z>0$, φέρουμε τα εφαπτόμενα επίπεδα προς το ελλειψοειδές. Ποιός είναι ο ελάχιστος όγκος που κόβεται με αυτά τα επίπεδα από το πρώτο ογδοημόριο;

11. Έστω $a,b,c>0$. Αν $x,y,z>0$ και $ayz+bzx+cxy=3abc$, δείξτε ότι $xyz\le abc$.

12. Αν $a,b,c>0$, δείξτε ότι $\left(x^5+y^5+z^5\right)\left(a^{5/4}+b^{5/4}+c^{5/4}\right)^4\ge1$ όταν $ax+by+cz=1$ και $x,y,z>0$.

13. Μεγιστοποιώντας την συνάρτηση xyz υπό την συνθήκη $x+y+z=a$ και $x,y,z>0$, δείξτε ότι $\sqrt[3]{xyz}\le(x+y+z)/3$. Πότε ισχύει η ισότητα;

14. Υπολογίστε την μεγίστη τιμή της συνάρτησης $\log x+\log y+3\log z$ στο μέρος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=5r^2$ όπου $x>0$, $y>0$, $z>0$, και εν συνεχεία αποδείξτε την ανισότητα

$$abc^3 \le 27(a+b+c)^5/3125, \text{ για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς } a,b,c.$$

15. Υπολογίστε την μεγίστη και ελαχίστη τιμή των εξής συναρτήσεων:

$$f(x,y)=x^2+xy-y^2 \text{ υπό τον περιορισμό } x^2+y^2\le 1, \text{ και}$$

$$f(x,y)=x^4+y^6, \text{ υπό τον περιορισμό } x^2+y^2\le 1.$$

16. Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή των εξής συναρτήσεων:

$f(x,y)=x^2-y^6$, υπό τον περιορισμό $x^4+y^4\le 1$, και $f(x,y)=x^2+y$, υπό τον περιορισμό $x^2+y^4\le 1$.

17. Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x,y,z)=x^2-y^2+z, \text{ υπό τον περιορισμό } x^2+y^2\le 1 \text{ και } x^2+y^2+z^2\le 1.$$

18. Δείξτε ότι $x^2-y^2+1\ge 0$, όταν $x^2+|y|\le 1$.

19. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου 0 από την επιφάνεια με εξίσωση $x_1^5+x_2^5+\cdots+x_n^5=1$ στον $\mathbb{R}^n$.

20. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου 0 από την επιφάνεια με εξίσωση $(x_n-n)^5=x_1^2+x_2^4+\cdots+x_{n-1}^{2n-2}$ στον $\mathbb{R}^n$.

21. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\frac{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}{a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}} \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n} \quad \text{για κάθε } x_j>0 \text{ και } a_j>0,$$

με την ισότητα να ισχύει ακριβώς όταν $\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{a_n}$.

22. Δείξτε ότι $x_1x_2^2\cdots x_n^n \le \sqrt{\dfrac{1\cdot 2^2\cdots n^n}{N^N}}$ για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$, $x_j>0$. Επίσης δείξτε ότι

αν $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$, $x_j>0$, και $x_1x_2^2\cdots x_n^n=\sqrt{\dfrac{1\cdot 2^2\cdots n^n}{N^N}}$ τότε $x_1=\sqrt{\dfrac{1}{N}}$, $x_2=\sqrt{\dfrac{2}{N}}$, ..., $x_n=\sqrt{\dfrac{n}{N}}$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\log x_1+2\log x_2+\cdots+n\log x_n$.

23. Αποδείξτε ότι αν $a_j>0$, $x_j>0$ και $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=1$,

$$\left(x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m\right)\left(a_1^{m/(m-1)}+a_2^{m/(m-1)}+\cdots+a_n^{m/(m-1)}\right)^{m-1}\ge 1, \text{ για } m\ge 2.$$

24. Σωστό ή λάθος; Αν $x_j>0$ και $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2>0$ τότε $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}<\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

25. Σωστό ή λάθος; Αν $x_j>0$ και $\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_1\cdots x_{j-1}x_{j+1}\cdots x_n}=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ τότε $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

26. (*Ανισότητα του Hadamard*) Δείξτε ότι για n διανύσματα $a_j=(a_{j1},a_{j2},\ldots,a_{jn})\in\mathbb{R}^n$, $j=1,2,\ldots,n$, έχουμε

$$\left|\det[a_{ji}]_{1\le j,i\le n}\right|\le |a_1||a_2|\cdots|a_n|,$$

με την ισότητα να ισχύει ακριβώς όταν τα διανύσματα αυτά είναι ανά δύο ορθογώνια. *Υπόδειξη*. Αν το σκεφθείτε γεωμετρικά, είναι εύκολο. Αναλυτικά – με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών του *Lagrange* – είναι δυσκολότερο.

27. (*Ανισότητα του Hölder*) Δείξτε ότι αν p,q είναι θετικοί αριθμοί και $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, τότε

$$u^{1/p}v^{1/q}\le \frac{1}{p}u+\frac{1}{q}v \text{ (για } u,v>0\text{) και } \left|\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right|\le\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q\right)^{1/q}.$$

28. (*Ανισότητα του Minkowski*) Δείξτε ότι $\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{1/p}$ για $p\ge 1$.