Ασκήσεις

1)Δείξτε ότι η συνάρτηση $x \in R^n \xrightarrow{\varphi} \dfrac{x}{1+\|x\|} \in \mathrm{B}(0,1)$ είναι συνεχής $1-1$ και επί της $\mathrm{B}(0,1)$ με αντίστροφη την $y \in \mathrm{B}(0,1) \xrightarrow{\sigma} \dfrac{y}{1-\|y\|} \in R^n$. Δείξτε επί πλέον ότι και η σ είναι συνεχής. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με ακολουθίες]

2)Δείξτε ότι οι συναρτήσεις: (α) $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, (β) $g(x,y) = \dfrac{x^3y-\cos(xy)}{x^2+y^2}$ και $h(x,y,z) = \dfrac{x^3-2xyz+\log(xy)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους τα οποία και να περιγράψετε.

3) Έστω $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ και $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^6}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(α) Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο R^2 και ότι η g είναι μη φραγμένη σε κάθε σφαίρα $\mathrm{B}((0,0),\varepsilon)$.

(β) Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, αλλά ο περιορισμός τόσο της f όσο και της g σε οποιαδήποτε ευθεία του R^2 είναι συνεχής συνάρτηση.

4) Προσδιορίστε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β ώστε η διανυσματική συνάρτηση, $f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \dfrac{2x^2-x^2y^2+2y^2}{x^2+y^2}\right), (x,y) \neq (0,0) \\ (a,\beta), \qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ να γίνεται συνεχής στο $(0,0)$.

5)Είναι η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ συνεχής στο $(0,0)$;

6)Έστω $f : U \subseteq R^2 \to R$ συνάρτηση, όπου U ανοικτό σύνολο και $(a,b) \in U$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ ώστε $(a-\delta_1, a+\delta_1) \times (b-\delta_2, b+\delta_2) \subseteq U$.

(β) Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο (a,b) τότε οι συναρτήσεις $f_1(x) = f(x,b)$, $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1)$, $f_2(y) = f(a,y)$, $y \in (b-\delta_2, b+\delta_2)$ είναι συνεχείς στα a και b αντίστοιχα.

(γ) Γενικεύστε τα (α) και (β) για μια συνάρτηση $n-$ μεταβλητών, $f : U \subseteq R^n \to R$.

(Το αποτέλεσμα αυτό μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση $n-$ μεταβλητών είναι συνεχής για κάθε μια μεταβλητή χωριστά).

7) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $(x,y)\to \max(x,y)$ και $(x,y)\to \min(x,y)$ είναι συνεχείς στο R^2. [Υπόδειξη: $\max(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$]

8) Έστω $f_1,...,f_m : A\subseteq R^n \to R$ συναρτήσεις και $a\in A$. Θέτομε $F(x)=\max(f_1(x),...,f_m(x))$ και $G(x)=\min(f_1(x),...,f_m(x))$, $x\in A$. Αποδείξτε ότι αν οι $f_1,...,f_m$ είναι συνεχείς στο a, τότε και οι συναρτήσεις F και G είναι συνεχείς στο a. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση (7) και επαγωγή στο m].

9) Δείξτε χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό των συνεχών συναρτήσεων με κλειστά σύνολα, ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι κλειστά:

(α) $\left\{x\in R : -2\le x\le 2 \text{ και } x^3-x\ge 0\right\}$

(β) $\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\right\}$ και γενικότερα η επιφάνεια $S^{n-1}=\left\{x\in R^n : \|x\|=1\right\}$ της μοναδιαίας σφαίρας του R^n.

(γ) $\left\{x\in R^n : a\cdot x\le \|x\|\right\}$, όπου $a\in R^n$ είναι δοσμένο διάνυσμα.

(δ) $\left\{(x,y): x^4+y^4=1\right\}$.

10) Έστω $a>0$, $f: A\subseteq R^n \to R$ συνάρτηση και $x_0\in R^n$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=|x|^a$, $x\in R$ είναι συνεχής στο 0 χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας.

(β) Έστω $h(x)=|f(x)|^a$, $x\in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 αποδείξτε ότι η h είναι συνεχής στο x_0.

(γ) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο A τότε και η $h(x)=|f(x)|^a$, $x\in A$, είναι συνεχής χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό των συνεχών με ανοικτά σύνολα. (Βέβαια το (γ) έπεται προφανώς και από το (β).)

11) Προσδιορίστε αν το A είναι ανοικτό σχετικά με το S, κλειστό σχετικά με το S ή τίποτα από τα δύο στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $S=\left\{x\in R : a\le x\le b, x\ne c\right\}, A=[a,c), a<c<b$

(β) $S=(0,1], A=\left\{\dfrac{1}{n}: n\ge 1\right\}$ (γ) $S=[0,1], A=\left\{\dfrac{1}{n}: n\ge 1\right\}$

(δ) $S=\left\{(x,y)\in R^2 : 0<x^2+y^2<1\right\}$, $A=\left\{(x,y)\in S : x^2\ge y^2\right\}$.

(ε) $S=\left\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2=4\right\}$, $A=\left\{(x,y)\in S : x^2<y^2\right\}$

(*)12) Έστω $\varnothing \neq A \subseteq R^n$. (α) Αποδείξτε ότι αν $\{B_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια ανοικτών σχετικά με το A υποσυνόλων του A τότε το $\bigcup_{i \in I} B_i$ είναι ανοικτό σχετικά με το A και ότι αν $B_1, \ldots, B_n$ $(n \in N)$ είναι (πεπερασμένη) οικογένεια ανοικτών σχετικά με το A υποσυνόλων του A τότε το $\bigcap_{\kappa=1}^{n} B_\kappa$ είναι ανοικτό σχετικά με το A.

(β) Αποδείξτε τις αντίστοιχες ιδιότητες για οικογένειες κλειστών σχετικά με το A υποσυνόλων του A.