Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ
Λύσεις

Διδάσκοντες: Αλικάκος - Δάλλα - Μερκουράκης

15 Σεπτεμβρίου 2014

Θέμα 1

Λύση

(α) Ορισμός

(β) Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της f στο τυχόν σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 2y^3 + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 6xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z,) = 0$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς συναρτήσεις σε όλο το $\mathbb{R}^3$ και άρα από γνωστό θεώρημα η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^3$ και επίσης ισχύει:

$$df\left(\overrightarrow{x_0}\right)\left(\overrightarrow{h}\right) = \nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right) \cdot \overrightarrow{h}$$

Επομένως για $\overrightarrow{x_0} = (1, 2, 0)$ έχουμε:

$$\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right) = \nabla f\,(1, 2, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2, 0), \frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, 0)\right) = (19, 24, 0)$$

Έτσι το διαφορικό της f στο σημείο $(1, 2, 0)$ είναι:

$$df\,(1, 2, 0)\left(\overrightarrow{h}\right) = \nabla f\,(1, 2, 0) \cdot \overrightarrow{h} = (19, 24, 0) \cdot (h_1, h_2, h_3) = 19h_1 + 24h_2$$

Θέμα 2

Λύση

(α) Γράφουμε $f(x,y) = g(x)+t(y)$, γιατί το h θα το χρησιμοποιήσουμε αλλιώς παράκατω. Έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g^{'}(x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = t^{'}(y)$$

Εξετάζουμε αν η f είναι διαφορίσιμη στο τυχαίο σημείο (x,y):

$$|\phi(h)| = \left|\frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - \nabla f(x,y)\cdot(h_1,h_2)}{||h||}\right| =$$

$$= \left|\frac{g(x+h_1) + t(y+h_2) - g(x) - t(y) - g^{'}(x)h_1 - t^{'}(y)h_2}{||h||}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{g(x+h_1) - g(x) - g^{'}(x)h_1}{||h||}\right| + \left|\frac{t(y+h_2) - t(y) - t^{'}(y)h_2}{||h||}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{g(x+h_1) - g(x) - g^{'}(x)h_1}{|h_1|}\right| + \left|\frac{t(y+h_2) - t(y) - t^{'}(y)h_2}{|h_2|}\right| =$$

$$= \left|\frac{g(x+h_1) - g(x)}{h_1} - g^{'}(x)\right| + \left|\frac{t(y+h_2) - t(y)}{h_2} - t^{'}(y)\right| \overset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Άρα η f διαφορίσιμη στο τυχαίο σημείο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(β)

(i) Η f γράφεται $f(x,y) = g(x) + h(y)$, όπου

$$g(x) = \sin x$$

και

$$h(y) = \begin{cases} y^2 \sin\dfrac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Από το (α), η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$, αν οι g, h είναι διαφορίσιμες στο 0. Η g είναι προφανώς διαφορίσιμη στο 0, ως τριγωνομετρική, με $g^{'}(0)=1$. Η h είναι διαφορίσιμη στο 0 αφού για $y \to 0$ έχουμε:

$$\frac{h(y)-h(0)}{y-0}=\frac{h(y)}{y}=y\sin\frac{1}{y}\to 0,$$

ως μηδενική επί φραγμένη. Άρα η f διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και ως γνωστόν

$$df\,(0,0)\left(\overrightarrow{h}\right)=\nabla f\,(0,0)\cdot\overrightarrow{h}\Leftrightarrow df\,(0,0)\left(\overrightarrow{h}\right)=g^{'}(0)h_1+h^{'}(0)h_2=h_1$$

(ii) Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι η:

$$z=f(0,0)+\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)=0+g^{'}(0)x+h^{'}(0)y=x$$

Θέμα 3

Λύση

(α)

(i) Είναι $V(x,y,z)=\dfrac{-GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{K}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$

όπου για ευκολία θέτουμε $K=-GmM$ και έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z)=-\frac{K}{2}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)=-\frac{K}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{Kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

και

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y,z)=(-K)\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-x\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}=$$

$$=(-K)\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-x\left[\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}2x\right]}{(x^2+y^2+z^2)^3}=(-K)\frac{(x^2+y^2+z^2)-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=$$

$$= (-K)\frac{y^2+z^2-2x^2}{A} = K\frac{2x^2-y^2-z^2}{A}$$

όπου $A = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}$.

Επικαλούμενοι την συμμετρία της V ως προς x, y, z βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y,z) = K\frac{2y^2-x^2-z^2}{A}$$

και

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(x,y,z) = K\frac{2z^2-x^2-y^2}{A}$$

Με πρόσθεση των τριών αυτών σχέσεων παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο.

(ii) Για $c < 0$ έχουμε $-c > 0$. Έστω $V(x,y,z) = c$, $c < 0$.

$$V(x,y,z) = c \Leftrightarrow \frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = -c \Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = -\frac{GmM}{c}$$

Άρα το Σ_c είναι σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$ και ακτίνα $\dfrac{GmM}{-c}$. Η κλίση "δείχνει" προς την κατεύθυνση όπου η V αυξάνει.

(β) Εφαρμόζουμε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Επειδή $x^2+y^2 = r^2$ και $1 \le x^2+y^2 \le 4$, έχουμε ότι $1 \le r \le 2$.

Επειδή $0 \le y \le \sqrt{3}x$, έχουμε ότι:

$$0 \le \sin\theta \le \sqrt{3}\cos\theta \Leftrightarrow 0 \le \tan\theta \le \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

$$I = \int_1^2 \int_0^{\pi/3} e^{r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{3}\int_1^2 e^{r^2} r\,dr = \frac{\pi}{6}\int_1^2 d(e^{r^2}) = \frac{\pi}{6}[e^4 - e].$$

Θέμα 4

Λύση

(α)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}},$$

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{3}(x^2 + y^2) = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$$

$$r = \sqrt{3/2},\ R = \sqrt{2}$$

$$\sin\phi = \frac{r}{R} = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \phi = \pi/3$$

Εφαρμόζουμε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi, y = \rho\sin\theta\sin\phi, z = \rho\cos\phi$$

Αφού το B βρίσκεται εντός της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ και εντός του κώνου

$$\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 2\pi\left(\int_0^{\pi/3}\sin\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\, d\rho\right) = 2\pi\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{3}(\sqrt{2})^3\Big)$$
$$= \frac{\pi}{3}2\sqrt{2}.$$

(β)

$$H = \left\{(x, y, z) : \Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{\beta}\Big)^2 + \Big(\frac{z}{\gamma}\Big)^2 \le 1\right\},$$

$$x' = \frac{x}{\alpha},\ y' = \frac{y}{\beta},\ z' = \frac{z}{\gamma},\ T(x, y, z) = \Big(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}, \frac{z}{\gamma}\Big)$$

$$H' := T(H) = \{(x', y', z') : (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \le 1\}$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi &= \int\int\int_{H'} dx'\, dy'\, dz' \\ &= \int\int\int_H \Big|\frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)}\Big| dx\, dy\, dz \\ &= \frac{1}{abc}\int\int\int_H dx\, dy\, dz = \frac{1}{abc}V(H)\end{aligned}$$

Θέμα 5

Λύση

(α) Έστω $M \in \Gamma$. Τότε $M = \left(x, y, \sqrt{\dfrac{2}{xy}}\right)$. Έχουμε:

$$d(M,0) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{xy}} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}}$$

Το $d(M,0)$ είναι ελάχιστο, όταν το $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$ είναι ελάχιστο. Με απλούς υπολογισμούς:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{2}{y}(-1)\frac{1}{x^2} = 2x - \frac{2}{x^2 y}$$

Λόγω συμμετρίας,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{2}{y^2 x}$$

Επίσης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{4}{x^3 y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{4}{y^3 x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2}{x^2 y^2}$$

Δεδομένου ότι $x, y > 0$, έχουμε:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,\, \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right) \Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$$

Άρα

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Επειδή $\Delta_1 = 6 > 0$ και $\Delta_2 = 36 - 4 = 32 > 0$, έχουμε ότι στο σημείο $(1,1)$ ελαχιστοποιείται η f, άρα και το $d(M,0)$.

Εναλλακτική Λύση 2

$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$, στο $\Omega = \{(x,y) :\ x > 0,\ y > 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{2}{x^2 y} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{2}{y^2 x} = 0$$

$\Rightarrow (1,1)$ μοναδικό κρίσιμο. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\lim_{(x,y)\to\partial\Omega} f(x,y) = \infty,$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} f(x,y) = \infty.$$

'Επεται ότι είναι ελάχιστο.

Εναλλακτική Λύση 3

Να σημειώσω ότι θα μπορούσε κάποιος να αποφύγει τις διαδικασίες του Απειροστικού ΙΙΙ στο θέμα 5 (α). Αρκεί να παρατηρήσει ότι η γνωστή $Cauchy - Schwarz$ $a^2 + b^2 \geq 2ab$ [με την ισότητα ανν $a = b$ $(*)$] δίνει

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy} \geq 2xy + \frac{2}{xy} = 2\left(xy + \frac{1}{xy}\right) \overset{(**)}{\geq} 2\left(2\sqrt{xy\frac{1}{xy}}\right) = 2(2\sqrt{1}) = 4$$

Στην ανισότητα $(**)$ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ ή ισοδύναμα την γνωστή $(*)$ που αναφέραμε πιο πάνω για a το $\sqrt{xy}$ και b το $\sqrt{\dfrac{1}{xy}}$

Άρα $f(x,y) \geq 4$ και επίσης παρατηρούμε ότι $f(1,1) = 4$.

Άρα $minf = 4$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν έχουμε ισότητα σε όλες τις ενδιάμεσες, δηλαδή αν ισχύει:

$$x = y \wedge xy = \frac{1}{xy} \Leftrightarrow x = y \wedge x^2y^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = 1,$$

δεδομένου ότι $x, y > 0$.

Άρα η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της μόνο στο σημείο $(1, 1)$.

(β) Θεωρούμε την $F(x, y) = sin(x+y) + cos(x-y) - x - 1$. Ισχύουν τα εξής:

- $F(0, 0) = sin(0) + cos(0) - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$
- Οι $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = cos(x+y) - sin(x-y) - 1$ και $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = cos(x+y) + sin(x-y)$ είναι συνεχείς.
- $$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης και επομένως υπάρχει τοπικά συνάρτηση $y = f(x)$.
Από το Θ.Π.Σ. έχουμε ότι:

$$f^{'}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)} = -\frac{0}{1} = 0$$