ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ – 16.7.14

Θέμα 1. ‘Εστω $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}\sqrt{x^2+y^2}$ αν $(x,y)\neq(0{,}0)$ και $f(0{,}0)=0$. Εξετάστε αν

(α) η f είναι συνεχής στο $(0{,}0)$,

(β) η f έχει παράγωγο κατά κατεύθυνση $\vec{\alpha}\in\mathbb{R}^2$ ($\|\vec{\alpha}\|=1$) στο $(0{,}0)$,

(γ) η f είναι διαφορίσιμη στο $(0{,}0)$.

Θέμα 2. (α) ‘Εστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, η οποία έχει μερικές παραγώγους που είναι συνεχείς στο $(x_0\,,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(x_0\,,y_0)$.

(β) ‘Εστω $g(x,y)=x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+y$ για $x\neq0$ και $g(0,y)=y$. Εξετάστε μέσω της g αν ισχύει το αντίστροφο του (α).

Θέμα 3. (i) ‘Εστω $V(x,y)=\ln\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right),(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0{,}0)\}$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $\frac{\partial^2V(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V(x,y)}{\partial y^2}=0,(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0{,}0)\}$.

(β) Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης $\Sigma_c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon V(x,y)=c\}$ για $c=1{,}2{,}3$ δίνοντας προσοχή στις σχετικές αποστάσεις μεταξύ τους και σχεδιάστε το $\nabla(x_0\,,y_0)$ σε $(x_0\,,y_0)\in\Sigma_2$.

(ii) Να υπολογιστεί το $I=\iiint_B\ f(x,y,z)dxdydz$ όπου $f(x,y,z)=\eta\mu(x^2y)+1$ και το B περιβάλλεται από την επιφάνεια $16x^2+7y^2+14z^2=1$.

Θέμα 4. (i) Να ευρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $D\subseteq\mathbb{R}^2$ που βρίσκεται εκτός του κύκλου $x^2+y^2=1$ και εντός του κύκλου $x^2+(y-1)^2=1$.

(ii) Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\sqrt{x^2+y^2}\le z\le3-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right\}$.

Θέμα 5. (i) Θεωρούμε το γράφημα Γ της $g(x,y)=\frac{1}{xy},\ x,y>0$. Βρείτε το σημείο του Γ που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων (0,0,0). (Υπόδειξη: ελαχιστοποιείστε το τετράγωνο της απόστασης).

(ii) Έστω $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους και $(x_0\,,y_0)\in\mathbb{R}^2$, ώστε $F(x_0\,,y_0)=0$ και $F_x(x_0\,,y_0)\neq0,\ F_y(x_0\,,y_0)\neq0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τοπικά συναρτήσεις ώστε $y=f(x),\ x=g(y)$ με $f'(x)g'(y)=1$.

Να γραφούν 5 θέματα

Καλή επιτυχία! ☺

Ονοματεπώνυμο……………………………………… Α.Μ……………………