ι3.4 Παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε κάποια σημαντικά παραδείγματα, για τις εφαρμογές, χώρων συναρτήσεων οι οποίοι είναι τοπικά κυρτοί και μετρικοποιήσιμοι αλλά η τοπολογία τους δεν επάγεται από νόρμα. Επίσης θα εξετάσουμε παραδείγματα τοπολογικών διανυσματικών χώρων (Hausdorff) οι οποίοι δεν είναι τοπικά κυρτοί.

Έστω (E,T) ένας τ.δ.χ.

1) Ο (E,T) έχει την ιδιότητα Heine-Borel, αν κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του είναι συμπαγές.

2) Ο (E,T) λέγεται ότι είναι Frechet αν είναι τοπικά κυρτός και η τοπολογία του επάγεται από κάποια πλήρη και αναλλοίωτη για τις μεταφορές μετρική.

Είναι προφανές ότι κάθε Ευκλείδειος χώρος R^d έχει την ιδιότητα Heine-Borel και ότι κάθε χώρος Banach $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος Frechet.

3.4.1 Ο χώρος $C(\Omega)$. Έστω Ω ανοικτό μη κενό υποσύνολο κάποιου Ευκλείδειου χώρου R^d . Θεωρούμε τον χώρο $C(\Omega)$ των συνεχών συναρτήσεων $f:\Omega\to K$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή T_C (πρβλ. το παράδειγμα 3.2.6 (4)).Τότε ο τοπικά κυρτός χώρος $(C(\Omega),T_C)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Frechet του οποίου η τοπολογία δεν επάγεται από νόρμα.

Πράγματι, θέτομε για κάθε $n\geq 1$

$$\mathrm{K}_n=\left\{x\in\Omega:\|x\|_2\leq n \text{ και } d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)\geq\frac{1}{n}\right\}.$$

Ισχυρισμός 1. Το K_n είναι συμπαγές σύνολο, η ακολουθία (K_n) κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του Ω και επιπλέον $\mathrm{K}_n\subseteq\operatorname{int}(\mathrm{K}_{n+1}), n\geq 1$. Ιδιαίτερα ισχύει, $\mathrm{K}_1\subseteq\mathrm{K}_2\subseteq\ldots\subseteq\mathrm{K}_n\subseteq\ldots$.

Απόδειξη του ισχυρισμού 1. Επειδή οι κλειστές σφαίρες του Ευκλειδείου χώρου είναι συμπαγή σύνολα και η απεικόνιση $x\in R^d\to d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)$ συνεχής έπεται αμέσως ότι κάθε K_n είναι συμπαγές. Έστω $\mathrm{K}\subseteq\Omega$ τυχόν συμπαγές, επειδή το K είναι φραγμένο υπάρχει $n_1\in N:\|x\|_2\leq n_1,\forall x\in\mathrm{K}$. Επειδή $\mathrm{K}\subseteq\Omega$ έπεται ότι $d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)>0,\forall x\in\mathrm{K}$ και επειδή η $x\in R^d\to d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)$ συνεχής και K συμπαγές έπεται ότι

$\inf\left\{d\left(x,R^d\setminus\Omega\right):x\in \mathrm{K}\right\}>0$. Συνεπώς υπάρχει $n_2\in N:d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)\geq\frac{1}{n_2},\forall x\in \mathrm{K}$. Αν $n_0\geq\max\{n_1,n_2\}$ τότε $\mathrm{K}\subseteq \mathrm{K}_{n_0}$.

Έστω τώρα $n\in N$ και $x\in \mathrm{K}_n$. Τότε $\|x\|_2\leq n<n+1$ και $d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)\geq\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$.
Συνεπώς $x\in \mathrm{K}_n\subseteq\operatorname{int}\left(\mathrm{K}_{n+1}\right)$, εφόσον το σύνολο
$\left\{x\in\Omega:\|x\|_2<n+1 \text{ και } d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)>\frac{1}{n+1}\right\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του K_{n+1}.
Προφανώς ισχύει $\mathrm{K}_1\subseteq \mathrm{K}_2\subseteq\ldots\subseteq \mathrm{K}_n\subseteq\ldots$ και η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Έστω τώρα $B_{\mathrm{K}}\left(0,\varepsilon\right)$ βασική περιοχή του $0\in C(\Omega)$ στην τοπολογία T_C, όπου $\mathrm{K}\subseteq\Omega$ συμπαγές. Αν $n\in N$ ώστε $\mathrm{K}\subseteq \mathrm{K}_n$ έπεται αμέσως ότι $B_{\mathrm{K}_n}\left(0,\varepsilon\right)\subseteq B_{\mathrm{K}}\left(0,\varepsilon\right)$. Κατά συνέπεια η τοπολογία T_C καθορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $p_n=p_{\mathrm{K}_n},n\geq 1$, όπου $p_n\left(f\right)=\sup\left\{\left|f\left(x\right)\right|:x\in \mathrm{K}_n\right\},n\geq 1,\ f\in C\left(\Omega\right)$ και είναι άρα μετρικοποιήσιμη.

(Πρβλ. θεώρημα 3.3.10).

Παρατηρούμε ότι επειδή, $\mathrm{K}_1\subseteq \mathrm{K}_2\subseteq\ldots\subseteq \mathrm{K}_n\subseteq\ldots$, θα ισχύει ότι, $p_1\leq p_2\leq\ldots\leq p_n\leq\ldots$, απ' όπου έπεται ότι η ακολουθία $V_n=\left\{f\in C\left(\Omega\right):p_n\left(f\right)<\frac{1}{n}\right\}=B_{\mathrm{K}_n}\left(0,\frac{1}{n}\right),n\geq 1$, είναι μια <u>φθίνουσα βάση περιοχών</u> του $0\in C\left(\Omega\right)$ στην τοπολογία T_C, αποτελούμενη από ανοικτά κυρτά και ισορροπημένα σύνολα.

<u>Ισχυρισμός 2</u>. Δεν υπάρχει περιοχή του $0\in C\left(\Omega\right)$ η οποία να είναι φραγμένο σύνολο.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού 2</u>. Υποθέτομε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $\mathrm{K}_n\neq\varnothing,\forall n\geq 1$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{K}_n\setminus\operatorname{int}\mathrm{K}_n\neq\varnothing$, $\forall n\geq 1$. (Αν $\operatorname{int}\mathrm{K}_n=\varnothing$ τότε προφανώς $\mathrm{K}_n\neq\varnothing$. Αν $\operatorname{int}\mathrm{K}_n\neq\varnothing$ τότε $\mathrm{K}_n\setminus\operatorname{int}\mathrm{K}_n\neq\varnothing$, γιατί διαφορετικά $\mathrm{K}_n=\operatorname{int}\mathrm{K}_n$ και το K_n θα ήταν ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του R^d με $\varnothing\neq \mathrm{K}_n\underset{\neq}{\subset}R^d$ το οποίο αντιφάσκει στην συνεκτικότητα του R^d). Έστω V μια φραγμένη περιοχή του $0\in C\left(\Omega\right)$. Υπάρχει τότε $n_0\in N:n\geq n_0\Rightarrow V_n\subseteq V$ και έτσι οι περιοχές $V_n,n\geq n_0$ είναι φραγμένα σύνολα. Επειδή η V είναι φραγμένη από την Πρόταση 3.3.14 υπάρχουν $M_n>0,n\geq 1$, ώστε

$$p_n\left(f\right)\leq M_n,\forall n\geq 1,\forall f\in V \quad (1)$$

Έστω $n\geq n_0$ και M τυχόν θετικός με $M>M_{n+1}$. Επειδή τα σύνολα K_n και $\mathrm{K}_{n+1}\setminus\operatorname{int}\mathrm{K}_{n+1}$ είναι ξένα μη κενά και σχετικά κλειστά υποσύνολα του (μετρικού) χώρου Ω μπορούμε να ορίσουμε μια (συνεχή) συνάρτηση Urysohn $\varphi:\Omega\to\left[0,1\right]$, ώστε $\varphi\left(\mathrm{K}_n\right)=\{0\}$ και

$\varphi(\mathrm{K}_{n+1} \setminus \operatorname{int} \mathrm{K}_{n+1}) = \{1\}$. Έστω $f = M \cdot \varphi$, τότε $p_n(f) = M \cdot p_n(\varphi) = 0$ και άρα $f \in V_n \subseteq V$. Όμως $p_{n+1}(f) = M \cdot p_{n+1}(\varphi) = M \cdot 1 = M > M_{n+1}$. Η τελευταία ανισότητα αντιφάσκει με την (1). (Ουσιαστικά αποδείξαμε ότι οι περιοχές V_n περιέχουν συναρτήσεις f ώστε το $p_{n+1}(f)$ να είναι οσοδήποτε μεγάλο). Έτσι η απόδειξη του ισχυρισμού 2 είναι πλήρης.

Από τον ισχυρισμό 2 και το θεώρημα 3.3.15 έπεται ότι η τοπολογία T_C του $C(\Omega)$ δεν επάγεται από νόρμα.

Από την μέθοδο απόδειξης του θεωρήματος 3.3.10 μια αναλλοίωτη για τις μεταφορές μετρική d που επάγει την τοπολογία T_C του χώρου $C(\Omega)$ είναι η ακόλουθη

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}.$$

Έστω $(f_i) \subseteq C(\Omega)$ ακολουθία η οποία είναι $d-$ Cauchy. Έπεται τότε ότι για κάθε $n \geq 1, \lim_{j,i \to \infty} p_n(f_i - f_j) = 0$, δηλαδή η$\left(f_i|_{\mathrm{K}_n}\right)$ είναι Cauchy στον χώρο Banach $C(\mathrm{K}_n)$, (πρβλ. την παρατήρηση3.3.11 (2)) και έτσι συγκλίνει ομοιόμορφα επί του K_n σε μια συνεχή συνάρτηση $g_n : \mathrm{K}_n \to K$. Επειδή η ακολουθία (K_n) είναι αύξουσα έπεται εύκολα ότι η g_{n+1} επεκτείνει την g_n για κάθε $n \geq 1$, ούτως ώστε ορίζεται μια (συνεχής) συνάρτηση $g : \Omega \to K$ για την οποία ισχύει, $f_i \xrightarrow{T_C} g \Leftrightarrow d(f_i, g) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$. Έτσι η d είναι μια πλήρης μετρική και ο χώρος $C(\Omega)$ είναι χώρος Frechet.

Αποδεικνύουμε τέλος ότι ο $(C(\Omega), T_C)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος. Για κάθε $n \geq 1$, θεωρούμε ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο $\{f_i^n : i \in N\}$ του χώρου Banach $C(\mathrm{K}_n)$ (Ο K_n είναι συμπαγής μετρικός χώρος και άρα ο $(C(\mathrm{K}_n), \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach). Επειδή ο Ω είναι μετρικός χώρος μπορούμε να επεκτείνουμε την κάθε συνάρτηση $f_i^n : \mathrm{K}_n \to K$ σε μια συνεχή συνάρτηση $g_i^n : \Omega \to K$, με χρήση του θεωρήματος του Tietze. Θέτομε $D = \{g_i^n : i, n \in N\}$ και παρατηρούμε ότι το D είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του χώρου $(C(\Omega), T_C)$ και συνεπώς ο χώρος $(C(\Omega), T_C)$ είναι διαχωρίσιμος.

……………………………………

<u>Παρατήρηση.</u> Το θεώρημα του Tietze για μετρικούς χώρους ισχυρίζεται ότι: Αν A είναι κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X και $f : A \to R$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε

η f έχει μια συνεχή επέκταση $F : X \to R$. Μάλιστα, αν $\left| f(x) \right| < c$ επί του A τότε η F μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\left| F(x) \right| < c$ επί του X .

3.4.2 Ο χώρος $H(\Omega)$. Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό σύνολο. Όπως γνωρίζουμε από το παράδειγμα 3.2.6 (5), ο $H(\Omega)$ είναι ο χώρος των ολομόρφων συναρτήσεων $f : \Omega \to C$ ο οποίος θεωρούμενος ως διανυσματικός υπόχωρος του $C(\Omega)$ είναι, με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του Ω όσο ένας τοπικά κυρτός χώρος.

Από το προηγούμενο παράδειγμα ο $\left(H(\Omega), T_C \right)$ είναι μετρικοποιήσιμος και διαχωρίσιμος χώρος.

(I) Ο $H(\Omega)$ είναι <u>κλειστός</u> υπόχωρος του $\left(C(\Omega), T_C \right)$.

Έστω $(f_n) \subseteq H(\Omega)$ και $f : \Omega \to C$ ώστε $f_n \xrightarrow{T_C} f$. Από το <u>θεώρημα του weierstrass</u> της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων έπεται ότι η f είναι ολόμορφη και άρα $f \in H(\Omega)$. Έτσι ο $H(\Omega)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\left(C(\Omega), T_C \right)$. Έπεται ότι ο $\left(H(\Omega), T_C \right)$ είναι ένας (διαχωρίσιμος) χώρος Frechet ως κλειστός υπόχωρος του πλήρους μετρικού χώρου $\left(C(\Omega), d \right)$, όπου η d είναι η μετρική του παραδείγματος 3.4.1.

(II) Ο $\left(H(\Omega), T_C \right)$ έχει την <u>ιδιότητα Heine- Borel</u>.

Έστω $E \subseteq H(\Omega)$ φραγμένο σύνολο. Από την Πρόταση 3.3.14 υπάρχει οικογένεια θετικών αριθμών $M_{\mathrm{K}}, \mathrm{K} \subseteq \Omega$ συμπαγές ώστε

$$\left| f(z) \right| \leq M_{\mathrm{K}}, z \in \mathrm{K}, f \in E .$$

Από το <u>θεώρημα Montel</u> της θεωρίας των Μιγαδικών συναρτήσεων το σύνολο E είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του χώρου $\left(H(\Omega), T_C \right)$. Αν το E είναι επί πλέον κλειστό τότε βέβαια το E είναι συμπαγές στον $\left(H(\Omega), T_C \right)$.

(III) Η τοπολογία T_C του $H(\Omega)$ <u>δεν</u> επάγεται από μια νόρμα.

Πράγματι, ο $\left(H(\Omega), T_C \right)$ δεν έχει φραγμένη περιοχή του $0 \in H(\Omega)$ διότι διαφορετικά, από την ιδιότητα Heine-Borel , ο $H(\Omega)$ θα είχε μια συμπαγή περιοχή του μηδενός και έτσι ο $H(\Omega)$ θα είχε πεπερασμένη διάσταση. (Πρβλ. Θεώρημα 3.3.16).

Είναι βέβαια σαφές ότι ο διανυσματικός χώρος $H(\Omega)$ είναι απειροδιάστατος, εφόσον η ακολουθία των μονωνύμων $1, z, z^2, ..., z^n, ...$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Παρατήρηση Το θεώρημα Montel λέει ότι: Ένα υποσύνολο του χώρου $H(\Omega)$ είναι σχετικά συμπαγές στην τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του Ω αν και μόνο αν υπάρχουν θετικές σταθερές $M_{\mathrm{K}}, \mathrm{K} \subseteq \Omega$, ώστε

$$\left| f(z) \right| \leq M_{\mathrm{K}}, z \in \mathrm{K}, f \in E \quad (1).$$

Τα υποσύνολα του $H(\Omega)$ που ικανοποιούν την (1) ονομάζονται στην ορολογία της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων « φυσιολογικές οικογένειες» (normal families).

Οι φυσιολογικές οικογένειες $F \subseteq H(\Omega)$ είναι στην δική μας ορολογία τα φραγμένα υποσύνολα του τοπικά κυρτού χώρου $H(\Omega)$.

2) Το θεώρημα Weierstrass που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα λέει ότι: Αν $f_n : \Omega \to C$ ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων και $f : \Omega \to C$ συνάρτηση ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω τότε f ολόμορφη στο Ω και επιπλέον $f_n^{'} \to f\,'$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Έπεται με επαγωγή ότι για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)}$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω.

3.4.3 Ο χώρος $C^{\infty}(I)$. Έστω $I = (a, b), -\infty \leq a < b \leq +\infty$ ανοικτό διάστημα στο R. Ο χώρος $C^{\infty}(I)$ είναι ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων $f : I \to R$ που έχουν παραγώγους κάθε τάξης.

Ο $C^{\infty}(I)$, με μια κατάλληλη τοπικά κυρτή τοπολογία, είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Frechet με την ιδιότητα Heine-Borel και συνεπώς η τοπολογία του δεν επάγεται από νόρμα.

Έστω (K_n) ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων (διαστημάτων) του I ώστε, $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_n$ και $\mathrm{K}_n \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{K}_{n+1})$. Συνεπώς η (K_n) κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του I (Πρβλ Παράδειγμα 3.4.1).

Είναι σαφές ότι τα $\mathrm{K}_n, n \geq 1$, μπορούν να επιλεγούν να είναι συμπαγή διαστήματα. Ορίζουμε τώρα μια ακολουθία ημινορμών $p_1, \ldots, p_N, \ldots$, επί του $C^{\infty}(I)$ ως εξής,

$$p_N(f) = \sup\left\{ \left| f^{(m)}(t) \right| : t \in \mathrm{K}_N, 0 \leq m \leq N \right\}, N \geq 1.$$

Είναι σαφές ότι η τοπικά κυρτή τοπολογία $T = T(p_N : N \geq 1)$ είναι λεπτότερη της τοπολογίας T_C της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του I και ότι είναι μετρικοποιήσιμη. Μια μετρική η οποία επάγει την T είναι βέβαια η

$$d(f,g)=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{2^N}\frac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)},\ f,g\in C^{\infty}(I).$$

Επειδή $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_N \leq \ldots$, τα σύνολα

$V_N = B_{p_N}\left(0,\frac{1}{N}\right)=\left\{ f\in C^{\infty}(I): p_N(f)<\frac{1}{N}\right\}, N\geq 1$, ορίζουν μια φθίνουσα βάση περιοχών του $0\in C^{\infty}(I)$.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1) Μια ακολουθία $(f_i)\subseteq C^{\infty}(I)$ συγκλίνει ως προς την μετρική d στην συνάρτηση $f\in C^{\infty}(I)$ ($f_i \xrightarrow{d} f$) αν και μόνο αν για κάθε $m\geq 0,\ f_i^{(m)} \xrightarrow[i\to\infty]{} f^{(m)}$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του I (δηλαδή, για κάθε $\mathrm{m}\geq 0, \forall n\geq 1$, η $\left(f_i^{(m)}|_{\mathrm{K}_n}\right)_{i\geq 1}$ συγκλίνει στον χώρο Banach $C(\mathrm{K}_n)$ στην συνάρτηση $f^{(m)}|_{\mathrm{K}_n}$.

2)Έστω$(f_i)\subseteq C^{\infty}(I)$ μια d -Cauchy ακολουθία. Τότε $\lim\limits_{\substack{i\to\infty\\ j\to\infty}} p_N\left(f_i-f_j\right)=0, \forall N\geq 1$.

Ιδιαίτερα έπεται ότι $\lim\limits_{\substack{i\to\infty\\ j\to\infty}} q_N\left(f_i-f_j\right)=0$ όπου $q_N(f)=\sup\left\{|f(t)|: t\in \mathrm{K}_N\right\}, N\geq 1$. Άρα υπάρχει $f\in C(I)$ ώστε $f_i\to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του I (Πρβλ. το Παράδειγμα 3.4.1). Έπεται από γνωστά αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού[(1)] ότι $f\in C^{\infty}(I)$ και ακόμη ότι $f_i \xrightarrow{d} f$, δηλαδή η d είναι πλήρης μετρική και ο $\left(C^{\infty}(I),d\right)$ είναι ένας χώρος Frechet.

<u>Ισχυρισμός</u> Έστω E φραγμένο υποσύνολο του $C^{\infty}(I)$. Αν $N\geq 2$ τότε το σύνολο, $\left\{f^{(m)}: f\in E, 0\leq m\leq N-1\right\}$ είναι <u>ισοσυνεχές</u> επί του συμπαγούς συνόλου K_{N-1}.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού</u>. Εφόσον το E είναι φραγμένο υπάρχουν θετικές σταθερές $M_N>0, N\geq 1$, ώστε $p_N(f)\leq M_N,\ f\in E, N\geq 1$. Ισοδύναμα, $\left|f^{(m)}(t)\right|\leq M_N,\ f\in E, t\in \mathrm{K}_N, 0\leq m\leq N, N\geq 1$. Για λόγους απλότητας, αποδεικνύουμε τον Ισχυρισμό για $N=2$. Έστω $x,y\in \mathrm{K}_2$ με $x\neq y$. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού και την υπόθεσή μας θα έχουμε, $|f(x)-f(y)|\leq M_2|x-y|$ και $|f'(x)-f'(y)|\leq M_2|x-y|,\ f\in E$. Έπεται ότι ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz επί του K_2 και άρα επί του K_1 για το σύνολο $\left\{f^{(m)}: f\in E, m=0,1\right\}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν το $\delta > 0$ επιλεγεί έτσι ώστε $\delta < \frac{\varepsilon}{M_2}$, τότε έχομε το συμπέρασμα.

(Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\left\{ f^{(m)} : f \in E, 0 \le m \le N-1 \right\}$ είναι, από το θεώρημα του Ascoli, σχετικά συμπαγές υποσύνολο του χώρου Banach $C\left(\mathrm{K}_{N-1}\right)$.)

Αποδεικνύουμε τώρα ότι ο $C^{\infty}\left(I\right)$ έχει την ιδιότητα Heine-Borel. Έστω E κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $C^{\infty}\left(I\right)$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\left(f_i\right) \subseteq E$.

Προχωρούμε με επαγωγή με την βοήθεια του ισχυρισμού (και του θεωρήματος Ascoli) και βρίσκουμε μια ακολουθία απείρων υποσυνόλων $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ του N και μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : \mathrm{K}_n \to R, n \ge 1$, ώστε για κάθε $n \ge 1$ και για κάθε $k = 0,1,\ldots,n$ ισχύει ότι, $f_i^{(k)} \xrightarrow[i \in M_n]{} g_n^{(k)}$ ομοιόμορφα επί του K_n (2)

Είναι τότε σαφές ότι $g_{n+1}|_{\mathrm{K}_n} = g_n, n \ge 1$ Έστω $m_n \in M_n, n \ge 1$ ώστε $m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots$.

Θέτομε $M = \left\{ m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots \right\}$ και ορίζουμε μια συνάρτηση $f : I \to R$ ώστε $f\left(t\right) = g_n\left(t\right)$, αν $t \in \mathrm{K}_n$. Έπεται τότε από την κατασκευή μας και τα « γνωστά Αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού» που χρησιμοποιήσαμε πριν ότι $f \in C^{\infty}\left(I\right)$ και ότι για κάθε $n \ge 1$ και κάθε $m \ge 0$ ισχύει, $f_i^{(m)} \xrightarrow[i \in M]{} f^{(m)}$, ομοιόμορφα επί του K_n.

Ισοδύναμα, $f_i \xrightarrow[i \in M]{d} f$. Έπεται ότι το E είναι συμπαγές υποσύνολο του $\left(C^{\infty}\left(I\right), d\right)$, αφού είναι και κλειστό. Έτσι ο χώρος έχει την ιδιότητα Heine-Borel.

Επειδή ο $C^{\infty}\left(I\right)$ είναι (προφανώς) απειροδιάστατος και έχει την ιδιότητα Heine-Borel, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει φραγμένη περιοχή του $0 \in C^{\infty}\left(I\right)$. Συνεπώς η τοπολογία του χώρου δεν επάγεται από νόρμα.

Το γεγονός ότι ο $\left(C^{\infty}\left(I\right), d\right)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος αφήνεται ως άσκηση. (Πρβλ. και το παράδειγμα 3.4.1 .)

<u>Παρατηρήσεις</u> 1) Υπενθυμίζουμε ένα αποτέλεσμα του Απειροστικού Λογισμού το οποίο χρησιμοποιήσαμε στην μελέτη μας του προηγούμενου παραδείγματος. Έστω $f_n : \left[a,b\right] \subseteq R \to R, n \ge 1$ ακολουθία διαφορίσιμων συναρτήσεων και $f, g : \left[a,b\right] \to R$ συναρτήσεις ώστε g συνεχής. Υποθέτουμε ότι,

(α) $f_n \to f$ κατά σημείο επί του $\left[a,b\right]$ και

(β) $f_n^{'} \to g$ ομοιόμορφα επί του $\left[a,b\right]$.

Τότε η f είναι διαφορίσιμη και $\lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x) = f'(x) = g(x), \forall x \in [a,b]$ (Πρβλ. το βιβλίο, Calculus του M. Spivak, ch.23)

2) Το θεώρημα του Ascoli είναι το ακόλουθο. Έστω K συμπαγής (μετρικός) χώρος και E φραγμένο υποσύνολο του χώρου Banach $C(\mathrm{K})$, (εφοδιασμένο με την sup-norm $\|\cdot\|_\infty$). Τότε, το E είναι σχετικά συμπαγές στον $C(\mathrm{K})$ αν και μόνο αν είναι ισοσυνεχές σύνολο.

3) Το προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να ορισθεί και στις παραπάνω διαστάσεις. Δηλαδή, αν $\Omega \subseteq R^m$ ανοικτό σύνολο και $C^\infty(\Omega)$ είναι ο χώρος των C^∞ – διαφορισίμων συναρτήσεων $f:\Omega \to R$, τότε με ανάλογο τρόπο ορίζεται μια μετρική d στον $C^\infty(\Omega)$ η οποία τον καθιστά διαχωρίσιμο χώρο Frechet. Έτσι για κάθε $a = (a_1, \dots, a_m)$, όπου a_k , $k = 1, 2, \dots, m$ μη αρνητικοί ακέραιοι, θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή $D^a = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{a_m}$, του οποίου η τάξη είναι, $|a| = a_1 + \dots + a_m$. Αν $|a| = 0$ θέτομε $D^a(f) = f$. Οι ημινόρμες που καθορίζουν την τοπολογία του $C^\infty(\Omega)$ ορίζονται ως εξής:

$p_N(f) = \sup\left\{\left|D^a f(x)\right| : x \in \mathrm{K}_N, |a| \le N\right\}, N \ge 1$, όπου (K_n) είναι μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του Ω με $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_n$ και $\mathrm{K}_n \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{K}_{n+1}), n \ge 1$.

Η απόδειξη των ιδιοτήτων του χώρου $C^\infty(\Omega)$ ακολουθεί τις γραμμές της απόδειξης του παραδείγματος 3.4.3.

………………………………………………………………….

3.4.4 Οι χώροι $L_p[0,1], 0 < p < 1$**:** Αποδεικνύουμε καταρχήν την ακόλουθη ανισότητα: Αν $a > 0, b > 0$ και $0 < p < 1$ τότε

$$(a+b)^p \le a^p + b^p \quad (1)$$

Πράγματι, η (1) ισοδυναμεί με την ακόλουθη ανισότητα

$$\frac{a^p + b^p}{(a+b)^p} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \ge 1 \quad (2)$$

Είναι σαφές ότι για να αποδείξουμε την (2) είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι:

Αν $A > 0, B > 0, A + B = 1$ και $0 < p < 1$ τότε $A^p + B^p \ge 1$. Θέτομε $F(t) = A^t + B^t - 1, t \in (0, +\infty)$. Τότε $F'(t) = \log A \cdot A^t + \log B \cdot B^t < 0, t > 0$, εφόσον

$0 < A, B < 1$. Κατά συνέπεια η F είναι γνήσια φθίνουσα στο $\left(0,+\infty\right)$ και έτσι
$F\left(1\right) < F\left(t\right), 0 < t < 1$ ή $0 = F\left(1\right) < A^t + B^t - 1, 0 < t < 1$ ή $A^t + B^t > 1, 0 < t < 1$.

Ορίζουμε τώρα τους χώρους $L_p\left[0,1\right]$ με $0 < p < 1$. Δοθέντος του $p \in \left(0,1\right)$ συμβολίζουμε με $L_p \equiv L_p\left[0,1\right]$ τον χώρο (των κλάσεων ισοδυναμίας) των Lebesgue μετρησίμων συναρτήσεων $f : \left[0,1\right] \to R$ ώστε $q\left(f\right) = \int_0^1 \left|f\left(t\right)\right|^p dt < +\infty$.

Από την ανισότητα (1) έπεται αμέσως ότι, $q\left(f+g\right) \le q\left(f\right) + q\left(g\right), f, g \in L_p$. Επίσης, αν $f \in L_p$ και $\lambda \in R$ τότε $q\left(\lambda f\right) = \left|\lambda\right|^p q\left(f\right) < +\infty$. Συνεπώς ο L_p είναι γραμμικός χώρος επί του R. Έπεται εύκολα ότι ο τύπος

$$d\left(f,g\right) = q\left(f-g\right), \qquad f,g \in L_p$$

ορίζει μια αναλλοίωτη για τις μεταφορές <u>μετρική</u> επί του L_p.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η τοπολογία $T = T_d$ που ορίζει η d επί του L_p είναι <u>συμβατή</u> με την δομή του γραμμικού χώρου και συνεπώς ο $\left(L_p, d\right)$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος. Περαιτέρω αποδεικνύεται όπως και στην περίπτωση των χώρων L_p με $p \ge 1$, ότι ο $\left(L_p, d\right)$ είναι <u>πλήρης</u> μετρικός χώρος. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

<u>Ισχυρισμός.</u> Αν V είναι ανοικτό κυρτό μη κενό υποσύνολο του χώρου $\left(L_p, d\right)$ τότε $V = L$.

<u>Απόδειξη</u>. Ας υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $0 \in V$. Έστω $f \in L_p$, θα αποδείξουμε ότι $f \in V$. Έστω $r > 0 : B_d\left(0,r\right) = \left\{g \in L_p : d\left(g,o\right) = q\left(g\right) < r\right\} \subseteq V$.
Μπορούμε να υποθέσουμε για την f ότι $q\left(f\right) > 0$ (αν $q\left(f\right) = 0$ τότε $f \in B_d\left(0,r\right) \subseteq V$). Επιλέγομε $n \in N : \frac{1}{n^{1-p}} \cdot q\left(f\right) < r$. Επειδή η συνάρτηση
$F : \left[0,1\right] \to \left[0,+\infty\right) : F\left(x\right) = \int_0^x \left|f\left(t\right)\right|^p dt, x \in \left[0,1\right]$, είναι συνεχής και αύξουσα, υπάρχουν σημεία $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, ώστε $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left|f\left(t\right)\right|^p dt = \frac{q\left(f\right)}{n}, i = 1,2,\ldots,n$.

($F\left(0\right) = 0 \le F\left(x\right) \le F\left(1\right) = q\left(f\right), x \in \left[0,1\right]$.)

Για κάθε $i=1,2,...,n$, ορίζουμε μια συνάρτηση g_i επί του $[0,1]$ με τον τύπο

$$g_i(t)=\begin{cases} nf(t), & \text{αν } x_{i-1}<t\le x_i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Οι συναρτήσεις g_i, $1\le i\le n$, είναι μετρήσιμες και επειδή

$$q(g_i)=\int_{x_{i-1}}^{x_i}|nf(t)|^p dt=n^p\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|^p dt=n^p\cdot\frac{q(f)}{n}=n^{p-1}\cdot q(f)<r.$$

Έπεται ότι $g_i\in B_d(0,r)\subseteq V, \forall i=1,2,...,n$.

Επειδή το V είναι κυρτό και $f=\dfrac{g_1+...+g_n}{n}$, έπεται ότι $f\in V$ και η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Από τον ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι οι μόνες κυρτές περιοχές του $0\in L_p$ είναι ολόκληρος ο χώρος L_p και έτσι ο (L_p,d) δεν μπορεί να είναι τοπικά κυρτός χώρος

……………………………………………………

Παρατηρήσεις. Ο (τοπολογικός) συζυγής ή δυϊκός ενός τ.δ.χ. (E,T) ορίζεται- όπως και στην περίπτωση των χώρων με νόρμα- να είναι το σύνολο των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f:E\to K$. Ο συζυγής ενός τ.δ.χ. E συμβολίζεται με E^* και είναι με τις συνήθεις πράξεις ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος K. Όπως θα αποδείξουμε λίγο αργότερα με την βοήθεια του θεωρήματος Hahn-Banach ο συζυγής ενός Hausdorff τοπικά κυρτού χώρου $E\neq\{0\}$ είναι μη τετριμμένος, μάλιστα διαχωρίζει τα σημεία του E

($\forall x,y\in E$ με $x\neq y, \exists f\in E^*$ ώστε $f(x)\neq f(y)$). Παρατηρούμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα ο συζυγής του L_p είναι ο τετριμμένος χώρος $\{0\}$. Πράγματι, έστω $f:L_p\to R$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Επειδή για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο $f^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$ είναι ανοικτή και κυρτή περιοχή του $0\in L_p$, έπεται ότι $Kerf=L$, δηλαδή $f=0$ και άρα $L_p^*=\{0\}$. Στις ασκήσεις πρόκειται να περιγράψουμε ένα παράδειγμα ενός μη τοπικά κυρτού τοπολογικού διανυσματικού χώρου E, ο οποίος όμως έχει αρκετά ανοικτά και κυρτά σύνολα ούτως ώστε ο συζυγής του E^* να διαχωρίζει τα σημεία του E και επομένως είναι μη τετριμμένος.