

2 Πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και προβολές σε χώρους με νόρμα.

Έστω  $(X, \|\cdot\|)$  και  $(Y, \|\cdot\|)$  χώροι με νόρμα. Τότε ο διανυσματικός χώρος

$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ και } y \in Y\}$  ( με τις συνήθειες κατά σημείο πράξεις ) γίνεται χώρος με νόρμα, με τις ακόλουθες νόρμες οι οποίες ορίζονται μέσω των νορμών των  $X$  και  $Y$ .

$$(\alpha) \|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|.$$

$$(\beta) \|(x, y)\|_\infty = \max(\|x\|, \|y\|) \text{ και}$$

$$(\gamma) \|(x, y)\|_p = \left( \|x\|^p + \|y\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$$

Το γεγονός ότι οι παραπάνω τύποι ορίζουν νόρμες στον διανυσματικό χώρο  $X \times Y$  έπεται εύκολα στις περιπτώσεις (α) και (β) και με την βοήθεια της ανισότητας Minkowski για τον  $R^2$  ( ή  $C^2$  ) στην περίπτωση (γ), αν  $p > 1$ .

Παρατηρούμε ότι: 1) Οι παραπάνω νόρμες είναι μεταξύ τους ισοδύναμες. Πράγματι, έστω  $1 \leq p < +\infty$ , τότε  $(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_p} (x, y) \Leftrightarrow \|x_n - x\|^p + \|y_n - y\|^p \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$  και  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ . Αν  $p = \infty$ , τότε

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} (x, y) \Leftrightarrow \max(\|x_n - x\|, \|y_n - y\|) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0 \text{ και } \|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

Παρατηρούμε ότι οι  $\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty$  επάγουν την τοπολογία γινόμενο στον χώρο  $X \times Y$ .

2) Αν οι  $(X, \|\cdot\|)$  και  $(Y, \|\cdot\|)$  είναι χώροι Banach τότε ο  $X \times Y$  με την  $\|\cdot\|_p$  νόρμα

$(1 \leq p \leq \infty)$  είναι επίσης χώρος Banach. Πράγματι, έστω  $(x_n, y_n), n \geq 1$ , ακολουθία Cauchy ως προς την  $\|\cdot\|_1$  νόρμα. Αν  $\varepsilon > 0$  τότε υπάρχει  $N_0 \in \mathbb{N}$  ώστε

$$n > m \geq N_0 \Rightarrow \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_1 = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon.$$

Συνεπώς, αν  $n > m \geq N_0$  τότε  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$  και  $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$ , δηλαδή οι  $(x_n)$  και  $(y_n)$  είναι ακολουθίες Cauchy στους  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα, άρα συγκλίνουσες, έστω  $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$  και  $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ . Είναι τότε σαφές από την προηγούμενη παρατήρηση ότι

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} (x, y).$$

Ο χώρος  $X \times Y$  με την  $\|\cdot\|_p$  νόρμα  $(1 \leq p \leq \infty)$  συμβολίζεται με  $(X \oplus Y)_p$ . Τα παραπάνω

γενικεύονται με τον προφανή τρόπο και για μια πεπερασμένη ακολουθία

$(X_1, \|\cdot\|), \dots, (X_n, \|\cdot\|)$  χώρων με νόρμα και ο χώρος  $X_1 \times \dots \times X_n$  με την  $\|\cdot\|_p$  νόρμα

ονομάζεται το ευθύ άθροισμα των χώρων  $X_1, \dots, X_n$  στην  $\|\cdot\|_p$  και συμβολίζεται με

$$\left( \sum_{k=1}^n \oplus X_k \right)_p \text{ ή με } (X_1 \oplus \dots \oplus X_n)_p.$$

Στο σημείο αυτό θα υπενθυμίσουμε κάποιες έννοιες από την Γραμμική Άλγεβρα. Ένας διανυσματικός χώρος  $X$  λέγεται ότι είναι το αλγεβρικό ευθύ άθροισμα των υποχώρων  $Y$  και  $Z$  αν  $Y \cap Z = \{0\}$  και  $Z + Y = X$ . Ισοδύναμα αν κάθε  $x \in X$  γράφεται μοναδικά ως  $x = y + z$  με  $y \in Y$  και  $z \in Z$ . Οι  $Y$  και  $Z$  λέγονται τότε αλγεβρικά συμπληρωματικοί στον  $X$  και αυτό το δηλώνουμε γράφοντας

$$X = Y \oplus Z.$$

Αν ο  $Y$  είναι (διανυσματικός) υποχώρος του  $X$ , μια γραμμική απεικόνιση  $P: X \rightarrow X$  λέγεται προβολή του  $X$  επί του  $Y$ , αν  $P(X) = Y$  και  $P(y) = y, \forall y \in Y$ . Δηλαδή, αν  $P(X) = Y$  και  $P(P(x)) = P(x), \forall x \in X$ . Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε  $Z = \text{Ker}P$  τότε θα έχουμε,  $X = Y \oplus Z$ .

Αντίστροφα, έστω ότι για ένα διανυσματικό χώρο  $X$  και για τους υποχώρους του  $Y$  και  $Z$  ισχύει ότι  $X = Y \oplus Z$ , δηλαδή ο  $X$  είναι το αλγεβρικό ευθύ άθροισμα των  $Y$  και  $Z$ .

Έπεται τότε εύκολα ότι οι απεικονίσεις  $P_1: X \rightarrow X$  και  $P_2: X \rightarrow X$  ώστε  $P_1(x) = x_1$  και  $P_2(x) = x_2$ , όπου  $x \in X$  και  $x = x_1 + x_2$  με  $x_1 \in Y$  και  $x_2 \in Z$  είναι προβολές του  $X$  στους  $Y$  και  $Z$  αντίστοιχα, ώστε  $\text{Ker}P_1 = Z$  και  $\text{Ker}P_2 = Y$ .

Σημειώνουμε ότι, αν ο  $X$  είναι διανυσματικός χώρος και ο  $Y$  διανυσματικός υποχώρος του τότε υπάρχει διανυσματικός υποχώρος  $Z$  του  $X$  ώστε  $X = Y \oplus Z$ . (Ο  $Z$  δεν είναι βέβαια μοναδικός). Για να το αποδείξετε θεωρήστε μια βάση Hamel του  $Y$  και επεκτείνετε την με το Λήμμα του Zorn σε μια βάση Hamel του  $X$ .

Εμείς ενδιαφερόμαστε βέβαια για χώρους με νόρμα  $(X, \|\cdot\|)$  και για φραγμένες προβολές  $P: X \rightarrow X$ .

Πρόταση 2.1 Έστω  $(X, \|\cdot\|)$  χώρος με νόρμα και  $P: X \rightarrow X$  προβολή με  $P(X) = Y$  και  $Z = \text{Ker}P$ , άρα  $X = Y \oplus Z$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (ι) Η  $P$  είναι φραγμένη προβολή.

(ιι) Η «φυσιολογική» απεικόνιση,  $\Phi: (x, y) \in Y \times Z \rightarrow x + y \in X$  είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι η  $\Phi$  είναι γραμμική 1-1 και βέβαια επί του  $X$  (αλγεβρικός ισομορφισμός). Επίσης η  $\Phi$  είναι συνεχής αφού είναι ο περιορισμός της πρόσθεσης  $+: X \times X \rightarrow X$  στον υποχώρο  $Y \times Z$  του  $X \times X$ . (Ο  $X \times X$  θεωρείται βεβαίως με την τοπολογία γινόμενο, η οποία όπως είδαμε επάγεται από τις  $\|\cdot\|_p$  νόρμες  $1 \leq p \leq \infty$ ).

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Εφόσον η προβολή  $P: X \rightarrow X$  είναι φραγμένη, δηλαδή συνεχής, τότε και η προβολή  $Q: X \rightarrow X: Q(x) = x - P(x)$  είναι συνεχής ( $Q = I_x - P$ ). Έπεται ότι και η αντίστροφη της  $\Phi$ , δηλαδή η απεικόνιση,  $F = \Phi^{-1}: X \rightarrow Y \times Z$  ώστε  $F(x) = (P(x), Q(x)), x \in X$ , είναι συνεχής

Έπεται προφανώς ότι η  $\Phi$  είναι ομοιομορφισμός.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Αν η  $\Phi$  είναι ομοιομορφισμός τότε ( και μόνο τότε ) η  $F = \Phi^{-1}: X \rightarrow Y \times Z$  είναι συνεχής και κατά συνέπεια οι  $P$  και  $Q$  είναι συνεχείς απεικονίσεις, αφού  $F(x) = (P(x), Q(x)), x \in X$ .

Ορισμός 2.2 Έστω  $X$  χώρος με νόρμα. Ένας διανυσματικός υποχώρος  $Y$  του  $X$  λέγεται

( τοπολογικά ) συμπληρωματικός στον  $X$ , αν υπάρχει φραγμένη προβολή  $P: X \rightarrow X$  με  $P(X) = Y$ .

Παράδειγμα 2.2 Έστω  $Y, Z$  χώροι με νόρμα και  $1 \leq p \leq \infty$ . Τότε κάθε ένας από τους  $Y$  και  $Z$  είναι (προφανώς) συμπληρωματικός υποχώρος του χώρου  $X = (Y \oplus Z)_p$ .

( Παρατηρούμε ότι η προβολή  $P: X \rightarrow Y: P(y, z) = y$ , ταυτίζεται ουσιαστικά με την κανονική απεικόνιση  $\pi: X \rightarrow X/Z$  και επομένως  $X/Z \cong Y$  ( τοπολογικός ισομορφισμός))

Παρατηρούμε ότι όπως έπεται από την πρόταση 2.1 ο  $Y$  είναι συμπληρωματικός στον  $X$ , ακριβώς τότε αν η φυσιολογική απεικόνιση  $\Phi: Y \times Z \rightarrow X: \Phi(x, y) = x + y$  είναι ομοιομορφισμός, όπου  $Z = \text{Ker}P$ .

Επίσης σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή και ο  $Z$  είναι συμπληρωματικός στον  $X$

( αφού  $Z = Q(X)$ , όπου  $Q$  είναι η φραγμένη προβολή  $Q = I_x - P$ ) και ακόμη ότι οι  $Y$  και  $Z$  είναι αναγκαία κλειστοί υποχώροι του  $X$  ( γιατί;).

Ένα αλγεβρικό ευθύ άθροισμα  $X = Y \oplus Z$  με την απεικόνιση  $\Phi$  συνεχή ( ισοδύναμα με τις  $P$  και  $Q$  φραγμένες) θα ονομάζεται τοπολογικό ευθύ άθροισμα των  $Y$  και  $Z$ .

Σημειώνουμε ότι ένα αλγεβρικό ευθύ άθροισμα  $X = Y \oplus Z$  με τους  $Y$  και  $Z$  κλειστούς υποχώρους του  $X$  δεν είναι αναγκαία και τοπολογικό ( πρβλ. άσκηση 3). Αν όμως ο  $X$  είναι χώρος Banach αυτό ισχύει, όπως θα αποδείξουμε ευθύς αμέσως. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μια ωραία εφαρμογή του θεωρήματος του κλειστού γραφήματος.

Θεώρημα 2.3 Έστω  $X$  χώρος Banach και  $Y$  κλειστός υποχώρος του  $X$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο  $Y$  είναι ( τοπολογικά ) συμπληρωματικός υποχώρος του  $X$ .

(ii) Υπάρχει κλειστός υποχώρος  $Z$  του  $X$  ώστε  $X = Y \oplus Z$  (δηλαδή  $Y \cap Z = \{0\}$  και  $X = Y + Z$ ).

Απόδειξη (i)  $\Rightarrow$  (ii) Έστω  $P: X \rightarrow X$  φραγμένη προβολή με  $P(X) = Y$ . Θέτουμε  $Z = \text{Ker}P$  τότε (όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει)  $X = Y \oplus Z$  και επειδή  $P$  συνεχής ο  $Z = P^{-1}(\{0\})$  είναι κλειστός υποχώρος του  $X$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Έστω  $X = Y \oplus Z$ , όπου  $Y, Z$  είναι κλειστοί υπόχωροι του  $X$ . Όπως γνωρίζουμε ο τελεστής  $P: X \rightarrow X: P(x) = y$  όπου  $x = y + z$  με  $y \in Y$  και  $z \in Z$  είναι γραμμική προβολή με  $P(X) = Y$  και  $Z = \text{Ker}P$ , θα αποδείξουμε ότι η  $P$  είναι και φραγμένη. Όμως επειδή ο  $X$  είναι χώρος Banach αρκεί, από το θεώρημα κλειστού γραφήματος, να αποδείξουμε ότι η  $P$  έχει κλειστό γράφημα. Έστω  $G_P = \{(x, P(x)): x \in X\}$  το γράφημα της  $P$ . Θεωρούμε μια ακολουθία  $(x_n, y_n), n \geq 1$  στοιχείων του  $G_P$  και  $(x, y) \in X \times X$  ώστε  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ . Τότε βέβαια  $x_n \rightarrow x$  και  $y_n = P(x_n) \rightarrow y$ . Επειδή ο  $Y$  είναι κλειστός στον  $X$  έπεται ότι  $y \in Y$  και άρα  $P(y) = y$ .

Παρατηρούμε ότι

$P(x_n - y_n) = P(x_n - P(x_n)) = P(x_n) - P(P(x_n)) = P(x_n) - P(x_n) = 0, n \geq 1$ . Έπεται ότι,  $x_n - y_n \in \text{Ker}P = Z, n \geq 1$  και επειδή ο  $Z$  είναι κλειστός στον  $X$ , θα έχουμε ότι  $x - y \in Z$ , αφού  $x_n - y_n \rightarrow x - y$ .

Συνεπώς,  $P(x - y) = 0 \Leftrightarrow P(x) = P(y) = y$  και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάποιες συνέπειες του θεωρήματος 2.3.

Πρόταση 2.4 Έστω  $X$  χώρος Banach και  $Y$  κλειστός υποχώρος του  $X$  πεπερασμένης συνδιάστασης. Τότε κάθε αλγεβρικό συμπλήρωμα του  $Y$  είναι και τοπολογικό συμπλήρωμα του  $Y$ . Ειδικότερα ο  $Y$  είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του  $X$ .

Απόδειξη Έστω  $Z$  ένα αλγεβρικό συμπλήρωμα του  $Y$ , δηλαδή  $X = Y \oplus Z$ . Από την υπόθεσή μας ο  $Z$  είναι πεπερασμένης διάστασης και επομένως κλειστός υπόχωρος του  $X$ . Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται το συμπέρασμα.

Παρατήρηση 2.5 Έστω  $X$  χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης και  $Y$  ένας (διανυσματικός) υπόχωρος του  $X$  πεπερασμένης συνδιάστασης, τότε ο  $Y$  δεν είναι αναγκαία κλειστός. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό συναρτησοειδές  $\Lambda: X \rightarrow K$  που δεν είναι φραγμένο (επειδή ο  $X$  έχει άπειρη διάσταση, υπάρχει πάντοτε ένα τέτοιο συναρτησοειδές). Τότε το υπερεπίπεδο  $Y = \text{Ker}\Lambda$  είναι (ως γνωστόν) ένα πυκνό υποσύνολο του  $X$ .

Επομένως η υπόθεση ότι ο  $Y$  είναι κλειστός στην προηγούμενη πρόταση είναι αναγκαία.

Πρόταση 2.6 Έστω  $X$  ένας χώρος Banach και  $Y$  ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του  $X$ . Τότε ο  $Y$  είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του  $X$ .

Απόδειξη Ο  $Y$  είναι βέβαια κλειστός στον  $X$  αφού έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω  $\dim Y = n$  και  $\{y_1, \dots, y_n\}$  μια αλγεβρική βάση του  $Y$  ( μια βάση Hamel ). Για κάθε

$k = 1, 2, \dots, n$ , θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές,  $\Lambda_k : Y \rightarrow K : \Lambda_k \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \right) = \lambda_k$

και παρατηρούμε ότι, εφόσον ο  $Y$  έχει πεπερασμένη διάσταση, το  $\Lambda_k$  είναι φραγμένο συναρτησοειδές. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει  $F_k : X \rightarrow K$  φραγμένο γραμμικό

συναρτησοειδές ώστε  $F_k|_Y = \Lambda_k, k = 1, 2, \dots, n$ . Θέτουμε,  $Z = \bigcap_{k=1}^n \text{Ker} F_k$ . Ο  $Z$  είναι

κλειστός υπόχωρος του  $X$  θα αποδείξουμε ότι  $X = Y \oplus Z$ . Καταρχήν παρατηρούμε ότι,

$Y \cap Z = \{0\}$ . Πράγματι, έστω  $\omega \in Y \cap Z$ , εφόσον  $\omega \in Y$  θα έχουμε ότι,  $\omega = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j$ , για

κάποια  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Από την άλλη μεριά επειδή  $\omega \in Z$  θα έχουμε ότι για κάθε

$k = 1, 2, \dots, n$ ,  $0 = F_k(\omega) = \Lambda_k(\omega) = \lambda_k$ , και συνεπώς  $\omega = 0$ . Έστω τώρα  $x \in X$ . Θέτουμε

$y = \sum_{j=1}^n F_j(x) y_j \in Y$  και παρατηρούμε ότι  $x - y \in Z$ . Πράγματι, για κάθε  $k = 1, 2, \dots, n$

έχουμε ότι

$$F_k(x - y) = F_k(x) - F_k(y) = F_k(x) - \sum_{j=1}^n F_j(x) \cdot F_k(y_j) = F_k(x) - \sum_{j=1}^n F_j(x) \cdot \Lambda_k(y_j) = F_k(x) - F_k(x) = 0, \left( \Lambda_k(y_j) = \delta_{kj}, 1 \leq k, j \leq n \right).$$

Έπεται ότι,  $x - y \in \text{Ker} F_k, \forall k = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow x - y \in \bigcap_{k=1}^n \text{Ker} F_k = Z$ . Έτσι καταλήγουμε στο

ότι,  $X = Y \oplus Z$  με τους  $Y, Z$  να είναι κλειστοί υπόχωροι του  $X$  και συνεπώς από το θεώρημα 2.3 ο  $Y$  είναι συμπληρωματικός στον  $X$ .

Σημείωση Η υπόθεση ότι ο  $X$  είναι χώρος Banach στα προηγούμενα δύο αποτελέσματα δεν είναι απαραίτητη ( αφήνεται ως άσκηση ).

Παρατηρήσεις 2.7 1) Έστω  $X$  απειροδιάστατος χώρος Banach. Ένας απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος  $Y$  του  $X$  δεν είναι αναγκαία συμπληρωματικός στον  $X$ , δηλαδή, δεν υπάρχει πάντοτε ένας κλειστός υπόχωρος  $Z$  του  $X$  ώστε  $X = Y \oplus Z$ . ( Βέβαια ο  $Y$  έχει πάντοτε ένα αλγεβρικό συμπλήρωμα ). Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ζεύγος  $Y = c_0$  και  $X = \ell^\infty$  ( θεώρημα Phillips, πρβλ το θεώρημα 5.15 του βιβλίου [F-H-H-M-P-Z]).

Σημειώνουμε ότι ο χώρος  $c_0$  είναι συμπληρωματικός σε οποιονδήποτε διαχωρίσιμο χώρο Banach εμφυτεύεται ισομορφικά ( θεώρημα Sobczyk, πρβλ το θεώρημα 5.14 του ίδιου βιβλίου ).

2) Υπενθυμίζουμε ότι αν  $H$  είναι ένας χώρος Hilbert και  $F$  κλειστός υπόχωρος του  $H$  τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμα  $F^\perp$  του  $F$  ( $F^\perp = \{x \in H : x \perp y, \forall y \in F\}$ ) είναι ένας κλειστός υπόχωρος του  $H$  που είναι τοπολογικό συμπλήρωμα του  $F$ , δηλαδή,  $H = F \oplus F^\perp$ . Σημειώνουμε ακόμη ότι η ορθογώνια προβολή  $P: H \rightarrow H$  με  $P(H) = F$  και  $\text{Ker}P = F^\perp$  έχει νόρμα ίση με το ένα ( $\|P\| = 1$ ).

Σημειώνουμε ότι, αν ένας χώρος Banach  $X$  έχει την ιδιότητα ότι κάθε κλειστός υπόχωρος του είναι συμπληρωματικός στον  $X$  τότε ο  $X$  είναι ισομορφικός με ένα χώρο Hilbert.

(Θεώρημα των Lindenstrauss και Tzatriri, πρβλ το θεώρημα 5.7)

3) Οι κλασικοί χώροι Banach  $\ell_p, 1 \leq p < +\infty, c_0$  και  $C[0,1]$  έχουν πολλούς απειροδιάστατους συμπληρωματικούς υποχώρους. Για παράδειγμα αν  $X = \ell_p, 1 \leq p < +\infty$  ή  $X = c_0$ , τότε κάθε απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του  $X$  περιέχει ένα κλειστό υπόχωρο συμπληρωματικό στον  $X$  και ισομορφικό με τον  $X$ . [πρβλ. [L-T] ή [F-H-H-M-P-Z] θεώρημα 6.23 και 6.24).

Παρόλα αυτά υπάρχουν απειροδιάστατοι χώροι Banach που δεν είναι διασπάσιμοι, δηλαδή δεν υπάρχει ένα ζεύγος απειροδιάστατων κλειστών υποχώρων  $Y$  και  $Z$  του  $X$  ώστε  $X = Y \oplus Z$ .

Περαιτέρω υπάρχουν απειροδιάστατοι χώροι Banach που έχουν την ιδιότητα αυτή κληρονομικά, δηλαδή κάθε απειροδιάστατος κλειστός υποχώρος τους είναι μη διασπάσιμος (Gowers-Maurey 1992, πρβλ το [F-H-H-M-P-Z] και την βιβλιογραφία που παρατίθεται εκεί). Είναι σαφές ότι οι χώροι αυτού του είδους βρίσκονται στον αντίποδα των χώρων Hilbert.

4) Για μια άλλη απόδειξη της πρότασης 2.6 δεξ και το παράρτημα 1.