

1 Χώροι πηλίκια

Έστω X διανυσματικός χώρος και Y διανυσματικός υπόχωρος του X . Για κάθε $x \in X$ θεωρούμε το σύμπλοκο \hat{x} σχετικά με τον Y ,

$$\hat{x}_{op} = \{x + y : y \in Y\} = x + Y$$

δηλαδή το \hat{x} είναι η παράλληλη μεταφορά του Y κατά το διάνυσμα x . Παρατηρούμε ότι

$$\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Ο χώρος X/Y (χώρος πηλίκιο του X πάνω από τον Y) είναι ο χώρος όλων των συμπλόκων (όλων των παραλλήλων μεταφορών του Y), δηλαδή

$$X/Y = \left\{ \hat{x} : x \in X \right\}$$

Με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού που ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$ και $\lambda \hat{x} = \widehat{\lambda x}$, $x, y \in X$, $\lambda \in K$ ($K = R$ ή C), ο X/Y γίνεται όπως εύκολα εξακριβώνεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα K με μηδέν το σύμπλοκο $\hat{0} = Y$.

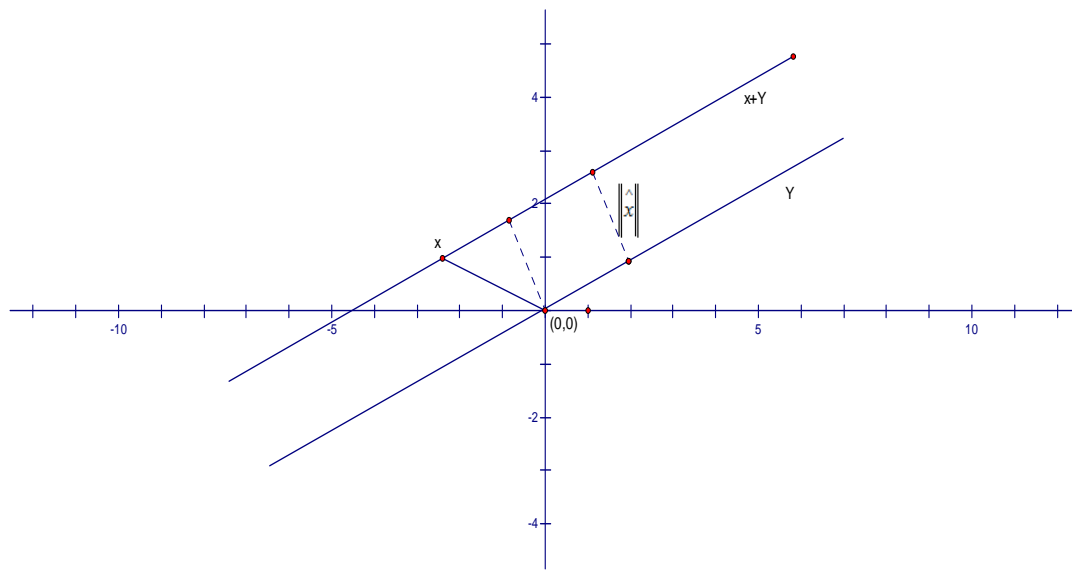
Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι επί πλέον ένας (διανυσματικός) χώρος με νόρμα, ας την συμβολίσουμε με $\|\cdot\|$, και ότι ο Y είναι κλειστός (διανυσματικός) υπόχωρος του.

Μπορούμε τότε να ορίσουμε μια νόρμα στον χώρο πηλίκιο X/Y ως εξής: Έστω

$$\hat{x} = x + Y \in X/Y,$$

$$\text{Θέτουμε} \quad (1) \quad \left\| \hat{x} \right\|_{op} = \inf \{ \|x + y\| : y \in Y \} = \inf \{ \|x - y\| : y \in Y \} = d(x, Y).$$

Όπως παρατηρούμε από τις ισότητες στην (1) η νόρμα του συμπλόκου \hat{x} ορίζεται να είναι η απόσταση του x από τον υποχώρο Y ή ακόμη η απόσταση του $0 \in X$ από το σύνολο



$x + Y$, (αφού $\|\hat{x}\| = \inf \{ \|0 - (x + y)\| : y \in Y \} = d(0, x + Y)$). Η νόρμα που ορίζεται από τις ισότητες στην (1) ονομάζεται νόρμα πηλίκου. Στο εξής οποτεδήποτε θεωρούμε έναν χώρο πηλίκου X / Y ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, θα θεωρούμε τον X / Y εφοδιασμένο με την νόρμα πηλίκου.

Στο παράδειγμα του σχήματος ο X είναι το Ευκλείδειο επίπεδο R^2 , ο Y ένας γνήσιος μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του (δηλαδή μία ευθεία που διέρχεται από το $(0, 0)$) και ο χώρος πηλίκου X / Y είναι το σύνολο όλων των ευθειών του επιπέδου που είναι παράλληλες με την ευθεία Y . Η νόρμα κάθε τέτοιας ευθείας είναι η απόστασή της από το σημείο $(0, 0)$ του R^2 .

Πρόταση 1.1 Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υποχώρος του, τότε η νόρμα πηλίκου του X / Y είναι (πράγματι) μία νόρμα στον διανυσματικό χώρο X / Y .

Απόδειξη. Αν $x \in X$ τότε $\|x\| = d(x, Y) \geq 0$ και ακόμη ότι αν

$$\|\hat{x}\| = 0 \Leftrightarrow d(x, Y) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{Y} = Y \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{0} = Y.$$

Έστω $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$ και $x \in X$. Τότε έχουμε, $\|\lambda \hat{x}\| = d(\lambda x, Y) =$

$$\begin{aligned} \inf \{ \|\lambda x - y\| : y \in Y \} &= \inf \left\{ \left| \lambda \cdot \left\| x - \frac{1}{\lambda} y \right\| \right| : y \in Y \right\} = |\lambda| \inf \left\{ \left\| x - \frac{1}{\lambda} y \right\| : y \in Y \right\} \\ &= |\lambda| \cdot \inf \{ \|x - y\| : y \in Y \} = |\lambda| \cdot d(x, Y) = |\lambda| \cdot \|\hat{x}\|. \end{aligned}$$

Αν $\lambda = 0$ η αποδεικτέα σχέση είναι

προφανής.

Αποδεικνύουμε τώρα την τριγωνική ανισότητα. Έστω $x, y \in X$. Παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος $z_1, z_2 \in Y$ ισχύει ότι: $\|(x + y) - (z_1 + z_2)\| \leq \|x - z_1\| + \|y - z_2\|$, συνεπώς,

$$d(x + y, Y) \leq \|(x + y) - (z_1 + z_2)\| \leq \|x - z_1\| + \|y - z_2\|, \forall z_1, z_2 \in Y.$$

Έπεται ότι,

$$\begin{aligned} d(x + y, Y) &\leq \inf \{ \|x - z_1\| + \|y - z_2\| : z_1, z_2 \in Y \} \\ &= \inf \{ \|x - z_1\| : z_1 \in Y \} + \inf \{ \|y - z_2\| : z_2 \in Y \} = d(x, Y) + d(y, Y). \end{aligned}$$

Ισοδύναμα, $\|\hat{x + y}\| \leq \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|.$

Ορισμός 1.2 Έστω Y διανυσματικός υποχώρος του διανυσματικού χώρου X . Τότε η απεικόνιση πηλίκο η κανονική απεικόνιση του X επί του X/Y είναι η απεικόνιση π που ορίζεται από τον τύπο $\pi(x) = \hat{x} = x + Y$.

Παρατηρούμε ότι η π είναι μια γραμμική απεικόνιση, με $\text{Ker}\pi = Y$ και βέβαια $\pi(X) = X/Y$

Λήμμα 1.3 Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υποχώρος του X και $\pi: X \rightarrow X/Y$ η κανονική απεικόνιση. Τότε η εικόνα μέσω της π της ανοικτής μοναδιαίας σφαίρας του X είναι η ανοικτή μοναδιαία σφαίρα του X/Y . Δηλαδή $\pi(\hat{B}_X) = \hat{B}_{X/Y}$.

Απόδειξη Έστω $x \in X$ με $\|x\| < 1$ τότε, $\|\pi(x)\| = \|x + Y\| = \inf \{\|x + y\| : y \in Y\} \leq \|x\| < 1$,

αφού $0 \in Y$. Έπεται ότι $\pi(\hat{B}_X) \subseteq \hat{B}_{X/Y}$. Έστω τώρα $x \in X$ με

$\|\pi(x)\| = \|x + Y\| = \inf \{\|x + y\| : y \in Y\} < 1$. Θεωρούμε $y_0 \in Y$ ώστε $\|x + y_0\| < 1$ και

θέτομε $x_1 = x + y_0$. Τότε έχουμε ότι, $\|x_1\| < 1$ και $x_1 + Y = (x + y_0) + Y = x + Y$. Επομένως

$\hat{x}_1 = \hat{x}$ ή $\pi(x_1) = \pi(x)$ με $\|x_1\| < 1$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}_{X/Y} \subseteq \pi(\hat{B}_X)$ και η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση 1.4 Σημειώνουμε ότι για τις κλειστές μοναδιαίες σφαίρες ισχύει ότι,

$\pi\left(\hat{B}_X\right) \subseteq \hat{B}_{X/Y}$ και ότι εν γένει δεν ισχύει ισότητα. Αυτό σημαίνει ότι ενδέχεται να

υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $d(x_0, Y) = 1 \Leftrightarrow \|\pi(x_0)\| = 1$ και $\|x_0 - y\| > 1, \forall y \in Y$. Από αυτό

συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει $x_1 \in X$ με $\|x_1\| \leq 1$ ώστε $\pi(x_1) = \pi(x_0)$. (Αν υπήρχε ένα

τέτοιο x_1 τότε $x_1 - x_0 \in Y$, άρα $x_1 = x_0 + y_0$ για κάποιο $y_0 \in Y$. Έπεται ότι

$\|x_1\| = \|x_0 + y_0\| \leq 1$, άτοπο. Πρβλ επίσης τις ασκήσεις.)

Σημειώνουμε ότι σε κάποιες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις ισχύει ισότητα στην παραπάνω σχέση, όπως θα διαπιστώσουμε αργότερα. (Πρβλ την παρατήρηση 1.6).

Θεώρημα 1.5 Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X . Τότε η κανονική απεικόνιση $\pi: X \rightarrow X/Y$ είναι συνεχής (με $\|\pi\| \leq 1$) γραμμική και επί του Y , η οποία είναι επιπλέον και ανοικτή. Αν $Y \neq X$, τότε $\|\pi\| = 1$.

Απόδειξη Η γραμμικότητα της π και το γεγονός ότι είναι επί του Y με $\text{ker}\pi = Y$ είναι προφανείς. Η συνέχεια της π έπεται αμέσως από το Λήμμα 1.3 ή και απευθείας αφού αν $\|x\| \leq 1$ τότε $\|x + Y\| \leq \|x\| \leq 1$, άρα $\|\pi\| \leq 1$.

Η π είναι ανοικτή από το Λήμμα αφού αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τότε,

$$\pi(B_X(x, \varepsilon)) = \pi(x + \varepsilon B_X) = \pi(x) + \varepsilon \pi(B_X) = \hat{x} + \varepsilon B_{X/Y} = B_{X/Y}(\hat{x}, \varepsilon).$$

Επομένως η π απεικονίζει τις περιοχές του τυχόντος σημείου $x \in X$ σε περιοχές του $\pi(x)$ και είναι άρα ανοικτή απεικόνιση.

Αν ο υποχώρος Y του X είναι διαφορετικός του X , δηλαδή $X \neq Y$ τότε (και μόνο τότε) ο χώρος πηλίκου X/Y είναι μη τετριμμένος ($X \neq 0$). Επομένως $B_{X/Y} \neq \{0\}$, και αν $y \in B_{X/Y}$ με $y \neq 0$ τότε υπάρχει $x \in B_X$ ώστε $\pi(x) = y$. Έπεται αμέσως από το Λήμμα 1.3 ότι $\|\pi\| = 1$.

Εύκολη συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι και το γνωστό αποτέλεσμα του Riesz:

Λήμμα (Riesz). Έστω X χώρος με νόρμα και Y γνήσιος κλειστός υποχώρος του X .

Τότε : (α) Για κάθε $\theta > 0$ υπάρχει $x \equiv x_\theta \in S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ ώστε

$$d(x_\theta, Y) = \inf \{\|x_\theta - y\| : y \in Y\} \geq 1 - \theta$$

(β) Αν ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in S_X$ του οποίου η απόσταση από τον Y είναι η μέγιστη δυνατή, δηλαδή $d(x, Y) = 1$.

Απόδειξη (α) Υποθέτουμε χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα ότι $\theta \in (0, 1)$.

Θεωρούμε την κανονική απεικόνιση $\pi : X \rightarrow X/Y$. Επειδή ο Y είναι γνήσιος κλειστός υποχώρος του X έπεται ότι $\|\pi\| = 1$. Έτσι έχουμε,

$$1 = \|\pi\| = \sup \{\|\pi(x)\| : \|x\| = 1\} = \sup \left\{ \left\| \hat{x} \right\| : \|x\| = 1 \right\} = \sup \{d(x, Y) : \|x\| = 1\}.$$

Αν $0 < \theta < 1$, έπεται από τον χαρακτηρισμό του supremum (ενός φραγμένου συνόλου πραγματικών) ότι υπάρχει $x_\theta \in S_X$ ώστε $\left\| \hat{x}_\theta \right\| = d(x_\theta, Y) \geq 1 - \theta$.

(β) Έστω $z \in B_{X/Y}$ με $\|z\| = 1$, υπάρχει τότε $x_0 \in X$ με $\pi(x_0) = z$. Έπεται ότι,

$$d(x_0, Y) = \|\pi(x_0)\| = \|z\| = 1. \text{ Θεωρούμε μια ακολουθία } (y_n) \subseteq Y \text{ ώστε } \|x_0 - y_n\| \rightarrow 1,$$

είναι σαφές ότι η (y_n) είναι φραγμένη. Έτσι συμπεραίνουμε από την συμπάγεια των κλειστών σφαιρών του Y – αφού ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης – ότι η (y_n) έχει υπακολουθία συγκλίνουσα μέσα στον Y . Έστω $y_{k_n} \rightarrow y_0 \in Y$. Συνεπώς,

$\|x_0 - y_{k_n}\| \rightarrow \|x_0 - y_0\| = 1$. Θέτομε $x = x_0 - y_0$ και παρατηρούμε ότι, εφόσον $y_0 \in Y$, θα έχουμε ότι $\pi(x) = \pi(x_0)$ και $\|x\| = 1 = d(x_0, Y) = d(x, Y)$

Παρατήρηση 1.6 Παρατηρούμε ότι αυτό που στην πραγματικότητα αποδείξαμε στο δεύτερο μέρος του προηγούμενου Λήμματος είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα: Αν ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης υποχώρος του χώρου με νόρμα X και $\pi : X \rightarrow X/Y$ είναι η κανονική απεικόνιση, τότε $\pi(\hat{B}_X) = \hat{B}_{X/Y}$, (πρβλ και την παρατήρηση 1.4).

Υπενθυμίζουμε ακόμα ότι αν H είναι χώρος Hilbert και F γνήσιος κλειστός υποχώρος του H τότε για κάθε $x \in H$ με $x \notin F$ υπάρχει ακριβώς ένα $y \in F$ ώστε $\|x - y\| = d(x, F)$. Έτσι αν $d(x, F) = 1 = \|\pi(x)\|$, τότε θέτοντας $x_1 = x - y$ έχουμε ότι $\pi(x) = \pi(x_1)$ και $\|x_1\| = 1$. Συνεπώς και στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\pi(\hat{B}_H) = \hat{B}_{H/F}$. (Πρβλ. τα αποτελέσματα της παραγράφου 4.2 και την παρατήρηση 4.2.13.)

Πόρισμα 1.7 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης και

$X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \dots \subsetneq X_n \subsetneq \dots$, ακολουθία υποχώρων του X πεπερασμένης διάστασης.

Τότε : (α) Υπάρχει μία ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ έτσι ώστε, $1 = \|x_n\| = d(x_n, X_{n-1}), n \geq 2$.

(β) Ιδιαίτερα έχουμε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο με νόρμα υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq S_X$ ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n \neq m$

Απόδειξη. (α) Έστω $x_1 \in X_1$ με $\|x_1\| = 1$. Προχωρώντας με επαγωγή και με την βοήθεια του ισχυρισμού (β) του Λήμματος Riesz για το ζεύγος X_{n-1}, X_n επιλέγουμε την ακολουθία (x_n) με τις ζητούμενες ιδιότητες. Από αυτό που μόλις αποδείξαμε έπεται εύκολα και η ύπαρξη μιας ακολουθίας $(x_n) \subseteq S_X$ ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n, m \in N$ με $n \neq m$.

Παρόλα αυτά θα δώσουμε και μια απευθείας απόδειξη αυτού του ισχυρισμού.

(β) Έστω λοιπόν $x_1 \in S_X$, θέτομε $X_1 = \langle x_1 \rangle \subsetneq X$. Από το Λήμμα του Riesz

υπάρχει $x_2 \in S_X : d(x_2, X_1) = 1$. Θέτομε $X_2 = \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq X$ και συνεχίζουμε με επαγωγή.

Αν τα $x_1, \dots, x_n \in S_X$ έχουν ορισθεί θέτομε $X_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ και επειδή $\dim X_n < \infty$ και $\dim X = \infty$ υπάρχει $x_{n+1} \in S_X$ ώστε $d(x_{n+1}, X_n) = 1$. Από την κατασκευή μας είναι φανερό ότι $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ και $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n \neq m$.

Παρατηρήσεις 1) Έστω X χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης

(α) Είναι δυνατό να αποδειχθεί με χρήση του θεωρήματος Hahn-Banach ότι υπάρχει $(x_n) \subseteq X$ ώστε $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ και $\|x_n - x_m\| > 1, \forall n \neq m$. (δες το [D] σελίδα 7).

(β) Επίσης αποδεικνύεται (Θεώρημα των Odell-Elton, δες το [D] σελίδα 240) ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ και $\|x_n - x_m\| \geq 1 + \delta, \forall n \neq m$

Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έπεται ένας σημαντικός χαρακτηρισμός των χώρων με νόρμα πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 1.8 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο X είναι πεπερασμένης διάστασης

(ιι) Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα \hat{B}_X του X είναι συμπαγές σύνολο

Απόδειξη (ι) \Rightarrow (ιι) Είναι γνωστό ότι αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση τότε η \hat{B}_X είναι συμπαγές σύνολο.

(ιι) \Rightarrow (ι) Αν ο X είχε άπειρη διάσταση τότε από το προηγούμενο αποτέλεσμα θα υπήρχε μία ακολουθία $(x_n) \subseteq S_X$ ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n, m \in N$ με $n \neq m$

Είναι σαφές ότι η (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και αυτό αντιφάσκει με το γεγονός ότι η (x_n) περιέχεται στο συμπαγές σύνολο \hat{B}_X .

Παρατήρηση 1.9 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y κλειστός υποχώρος του X .

Θεωρούμε την κανονική απεικόνιση $\pi : X \rightarrow X/Y$

(α) Αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x' \in X$ ώστε $\pi(x') = \pi(x)$ και $\|x'\| < \|\pi(x)\| + \varepsilon$.

Πράγματι, έστω $y_0 \in Y : \|x - y_0\| < d(x, Y) + \varepsilon = \|\pi(x)\| + \varepsilon$ θέτομε $x' = x - y_0$, τότε $x' - x = -y_0 \in Y$ και άρα $\pi(x) = \pi(x')$, επίσης $\|x'\| = \|x - y_0\| < \|\pi(x)\| + \varepsilon$.

(β) Αν $x_1, x_2 \in X$ και $z \in \pi(x_1) = x_1 + Y$ τότε, $d(z, \pi(x_2)) = \|\pi(x_1) - \pi(x_2)\|$.

Πράγματι, αν $z \in x_1 + Y$ τότε,

$$\begin{aligned} d(z, \pi(x_2)) &= \inf \{ \|z - (x_2 + y)\| : y \in Y \} = \inf \{ \|(z - x_2) - y\| : y \in Y \} = \left\| z - \hat{x}_2 \right\| = \left\| \hat{z} - \hat{x}_2 \right\| \\ &= \left\| \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \right\| = \|\pi(x_1) - \pi(x_2)\|, \text{ εφόσον } z \in x_1 + Y \Leftrightarrow \hat{z} = \hat{x}_1. \end{aligned}$$

Θεώρημα 1.10 Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός υποχώρος του X , τότε ο χώρος πηλίκο X/Y είναι χώρος Banach.

Απόδειξη. Έστω (\hat{x}_n) ακολουθία Cauchy στον χώρο X / Y . Επιλέγουμε με επαγωγή μια υπακολουθία (\hat{x}_{n_k}) της (\hat{x}_n) ώστε να ισχύει,

$$(1) \left\| \hat{x}_{n_k} - \hat{x}_{n_{k+1}} \right\| < \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$$

(Για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N} : n > m \geq n_1$ τότε $\left\| \hat{x}_n - \hat{x}_m \right\| < \frac{1}{2}$. Κατόπιν για $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, επιλέγουμε $n_2 > n_1 : n > m \geq n_2$ τότε $\left\| \hat{x}_n - \hat{x}_m \right\| < \frac{1}{2^2}$. Συνεχίζουμε με επαγωγή και έτσι εντοπίζουμε μία υπακολουθία (n_k) των φυσικών αριθμών ώστε να ισχύει η (1)).

Ακολούθως επιλέγουμε με επαγωγή μία ακολουθία $z_{n_k} \in \hat{x}_{n_k}, k = 1, 2, \dots$, ώστε

$$\left\| z_{n_k} - z_{n_{k+1}} \right\| < \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$$

Έστω $z_{n_1} \in \hat{x}_{n_1}$, από την προηγούμενη παρατήρηση $d(z_{n_1}, \hat{x}_{n_2}) = \left\| \hat{x}_{n_1} - \hat{x}_{n_2} \right\| < \frac{1}{2}$

Έπεται ότι υπάρχει $z_{n_2} \in \hat{x}_{n_2}$ ώστε $\left\| z_{n_1} - z_{n_2} \right\| < \frac{1}{2}$. Επειδή $z_{n_2} \in \hat{x}_{n_2}$ έπεται ότι

$$d(z_{n_2}, \hat{x}_{n_3}) = \left\| \hat{x}_{n_2} - \hat{x}_{n_3} \right\| < \frac{1}{2^2} \text{ άρα υπάρχει } z_{n_3} \in \hat{x}_{n_3} \text{ ώστε } \left\| z_{n_2} - z_{n_3} \right\| < \frac{1}{2^2}. \text{ Προχωρούμε}$$

με επαγωγή στην επιλογή της (z_{n_n}) . Η (z_{n_n}) είναι μια ακολουθία Cauchy. Πράγματι, αν

$\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$. Αν $\lambda > \mu \geq k_0 + 1$ τότε,

$$\left\| z_{n_\lambda} - z_{n_\mu} \right\| \leq \left\| z_{n_\mu} - z_{n_{\mu+1}} \right\| + \dots + \left\| z_{n_{\lambda-1}} - z_{n_\lambda} \right\| \leq \frac{1}{2^\mu} + \dots + \frac{1}{2^{\lambda-1}} < \frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon. \text{ Επειδή ο } X \text{ είναι}$$

χώρος Banach υπάρχει $x \in X : z_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} x$. Από τη συνέχεια της κανονικής απεικόνισης

π , έπεται ότι $\pi(z_{n_k}) = \hat{x}_{n_k} \rightarrow \pi(x) = \hat{x}$ στον χώρο X / Y . Επειδή η (\hat{x}_n) είναι

ακολουθία Cauchy στον X / Y και έχει υπακολουθία συγκλίνουσα, έπεται ότι και η ίδια είναι συγκλίνουσα.

Παράδειγμα 1.11 Θεωρούμε τον χώρο ηλίκο ℓ_∞ / c_0 τότε η νόρμα ηλίκο δίνεται από τον

$$\left\| \hat{x} \right\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|, \text{ όπου } x \in \ell_\infty, x = (x_n).$$

Πράγματι, αν $x \in c_0 \Leftrightarrow \lim x_n = 0$ τότε, $\|\hat{x}\| = d(x, c_0) = 0 = \lim |x_n|$

Υποθέτουμε ότι $x = (x_n) \in \ell_\infty$ και $x \notin c_0$ ι, ισοδύναμα ότι $x = (x_n)$ είναι μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών η οποία δεν είναι μηδενική, δηλαδή ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| = a > 0 \text{ και } (x_n) \text{ φραγμένη.}$$

Παρατηρούμε ότι: 1) Έστω $y = (y_n) \in c_0$ τότε

$\limsup |x_n - y_n| = \limsup |x_n| = a$ (Αν, $|x_{k_n} - y_{k_n}|, n \geq 1$, είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $|x_n - y_n|, n \geq 1$ τότε $y_{k_n} \rightarrow 0$, άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{k_n} - y_{k_n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{k_n}| \leq a$. Επειδή υπάρχει υπακολουθία (x_{m_n}) της (x_n) : $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{m_n}| = a$ έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{m_n} - y_{m_n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{m_n}| = a$, άρα έχουμε το συμπέρασμα).

$$2) \quad a \leq d(x, c_0) = \|\hat{x}\|$$

Πράγματι, αν $y = (y_n) \in c_0$ τότε από την (1) $a = \limsup_n |x_n - y_n| \leq \sup_{n \geq 1} |x_n - y_n| = \|x - y\| \Rightarrow a \leq d(x, c_0)$.

Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι $a < d(x, c_0)$.

Θέτουμε $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) \in c_0, n \geq 1$.

Έπεται ότι, $a < d(x, c_0) \leq \|x - x^n\| = \sup \{|x_k| : k \geq n+1\}, \forall n \geq 1$.

Συνεπώς, $a < d(x, c_0) \leq \lim_n \left[\sup \{|x_k| : k \geq n+1\} \right] = \lim_n \sup |x_n| = a$, έτσι έχουμε καταλήξει σε αντίφαση.

Πρόταση 1.12 Έστω X, Z χώροι Banach και $T : X \rightarrow Z$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί του Z . Τότε ο χώρος πηλίκου $X / \text{Ker}T$ είναι ισομορφος του Z .

Απόδειξη Ορίζουμε $F : X / \text{Ker}T \rightarrow Z$ με $F(x + \text{Ker}T) = T(x)$. Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι ένας (καλά ορισμένος) γραμμικός τελεστής ο οποίος είναι φραγμένος, 1-1 και επί του Z . Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης θα έχουμε το συμπέρασμα.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $T = F \circ \pi$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Z \\ \pi \downarrow & \nearrow F & \\ X / \text{Ker}T & & \end{array}$$

(I) Ο T είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής .

Έστω $x, x' \in X$ ώστε,

$$x + \text{Ker}T = x' + \text{Ker}T \Leftrightarrow x - x' \in \text{Ker}T \Leftrightarrow T(x - x') = 0 \Leftrightarrow T(x) = T(x').$$
 Άρα ο

T είναι καλά ορισμένος. Ο T είναι επίσης γραμμικός αφού,

$$F(\lambda(x + \text{Ker}T) + \mu(y + \text{Ker}T)) = F(\lambda x + \mu y + \text{Ker}T) = T(\lambda x + \mu y) =$$

$$\lambda T(x) + \mu T(y) = \lambda F(x + \text{Ker}T) + \mu F(y + \text{Ker}T).$$

(II) Ο T είναι 1-1 και επί του Z . Έστω

$$F(x + \text{Ker}T) = F(y + \text{Ker}T) \Leftrightarrow T(x) = T(y) \Leftrightarrow T(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \text{Ker}T$$

$\Leftrightarrow x + \text{Ker}T = y + \text{Ker}T$. Ο T είναι επί, αφού αν $z \in Z$ τότε (ο T είναι επί) υπάρχει

$$x \in X = T(x) = z, \text{ άρα } F(x + \text{Ker}T) = z.$$

(III) Ο T είναι φραγμένος, με $\|F\| = \|T\|$. Έστω $x + \text{Ker}T \in X / \text{Ker}T$. Για κάθε $\varepsilon > 0$

μπορούμε να επιλέξουμε $y \in x + \text{Ker}T$ με $\|y\| < \|x + \text{Ker}T\| + \varepsilon$ (παρατήρηση 1.9).

Συνεπώς $\|F(x + \text{Ker}T)\| = \|F(y + \text{Ker}T)\| = \|T(y)\| \leq \|T\| \cdot \|y\| < \|T\|(\|x + \text{Ker}T\| + \varepsilon)$.

Εφόσον η ανισότητα ισχύει για κάθε θετικό ε , έπεται ότι,

$$\|F(x + \text{Ker}T)\| \leq \|T\| \cdot \|x + \text{Ker}T\|.$$

Συνεπώς $\|F\| \leq \|T\|$ και ο F είναι φραγμένος. Επειδή δε,

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|F(x + \text{Ker}T)\| \leq \sup_{\|x + \text{Ker}T\| \leq 1} \|F(x + \text{Ker}T)\| = \|F\|, \text{ συμπεραίνουμε}$$

ότι, $\|F\| = \|T\|$

Πόρισμα 1.13 Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X υπάρχει ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος Y του $\ell_1(N)$ ώστε ο χώρος πηλίκου $\ell_1(N)/Y$ να είναι ισόμορφος με τον X .

Απόδειξη Ως γνωστό επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T: \ell_1(N) \rightarrow X$ ο οποίος είναι επί του X . Θέτομε $Y = \text{Ker}T$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε το συμπέρασμα.

Παρατήρηση 1.14 Υπενθυμίζουμε εν συντομία το αποτέλεσμα που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο Πόρισμα, δηλαδή ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach X είναι συνεχής γραμμική εικόνα του ℓ_1 . Έστω $D = \{x_n, n \geq 1\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της B_X .

Ορίζουμε $T : \ell_1 \rightarrow X$ με $T((\lambda_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$, επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα ο T είναι ένας καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής ο οποίος είναι φραγμένος με $\|T\| \leq 1$. Αποδεικνύεται ακόμη ότι ο T είναι και επί του Y . Έστω $x \in B_X \Leftrightarrow \|x\| < 1$, εφόσον το D είναι πυκνό υπάρχει στην B_X (η B_X δεν έχει μεμονωμένα σημεία) υπακολουθία (x_{m_n}) της (x_n) με $x_{m_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Θέτομε $z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_{m_n}, n \geq 1$ (όπου (e_n) η συνήθης βάση του ℓ_1), τότε $z_n \in B_{\ell_1}$ και $T(z_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, άρα $x \in \overline{T(B_{\ell_1})}$. Έτσι αποδείξαμε ότι $B_X \subseteq \overline{T(B_{\ell_1})}$. Από ένα γνωστό Λήμμα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης έπεται ότι $B_X \subseteq T(B_{\ell_1})$ από όπου συμπεραίνουμε ότι ο T είναι επί του X . Αξίζει να σημειωθεί ότι ισχύει προφανώς και η σχέση $T(B_{\ell_1}) \subseteq B_X$, και συνεπώς $B_X = T(B_{\ell_1})$. Έπεται ότι αν $F : \ell_1 / Y \rightarrow X$, όπου $Y = \text{Ker}T$, είναι ο τελεστής του θεωρήματος 1.12, τότε $F(B_{\ell_1/Y}) = T(B_{\ell_1}) = B_X$. Από όπου έπεται ότι ο F είναι μια ισομετρία (γιατί;) και άρα ο X είναι ισομετρικά ισομορφος με ένα πηλίκο του χώρου ℓ_1 .

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα εφαρμογή των χώρων πηλίκων είναι και η ακόλουθη.

Πρόταση 1.15 Έστω X χώρος με νόρμα, Z κλειστός υποχώρος του X και Y υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο $Y + Z$ είναι κλειστός υποχώρος του X .

Απόδειξη. Έστω $\pi : X \rightarrow X/Z$ η κανονική απεικόνιση. Ο $\pi(Y)$ είναι πεπερασμένης διάστασης υποχώρος του X/Z και άρα κλειστός υποχώρος του X/Z . Αφού η π είναι συνεχής ο $\pi^{-1}(\pi(Y))$ είναι κλειστός υποχώρος του X . Παρατηρούμε ότι,
 $x \in \pi^{-1}(\pi(Y)) \Leftrightarrow \pi(x) \in \pi(Y) \Leftrightarrow \exists y \in Y : \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x - y \in Z \Leftrightarrow x \in Y + Z$.

Έπεται ότι $Y + Z = \pi^{-1}(\pi(Y))$ και ο $Y + Z$ είναι κλειστός υποχώρος του X .