ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Το θεώρημα του Dvoretzky - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

8.4 Ασκήσεις

1. Έστω $g_1,\dots,g_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας Ω και έστω $\{e_1,\dots,e_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

(α) Έστω $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$. Δείξτε ότι

$$\|G\|_q := \left(\int_{\Omega} \left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\right\|^q d\omega\right)^{1/q} = c_{n,q}M_q(X)$$

όπου

$$M_q(X)=\left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^q\, d\sigma(x)\right)^{1/q},$$

και υπολογίστε τις σταθερές $c_{n,1}$ και $c_{n,2}$.

(β) Δείξτε ότι, αν $1\leq k\leq n$,

$$\int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^k g_i(\omega)e_i\right\| d\omega \leq \int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\right\| d\omega.$$

(γ) Δείξτε ότι, αν Y είναι ένας k-διάστατος υπόχωρος του X, τότε

$$M_1(Y)\leq c\sqrt{n/k}\,M_1(X),$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

2. Έστω $f: S^{n-1}\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά 1 και έστω L ο μέσος Lévy της f.

(α) Δείξτε ότι, για κάθε $t>0$,

$$\begin{aligned}(\sigma\otimes\sigma)\{(x,y)\in S^{n-1}\times S^{n-1} : |f(x)-f(y)|\geq t\}) &\leq 2\sigma(\{x\in S^{n-1}: |f(x)-L|\geq t/2\})\\ &\leq c_1\exp(-c_2t^2n).\end{aligned}$$

(β) Έστω $\mathbb{E}(f)=\int_{S^{n-1}} f(x)\,d\sigma(x)$. Δείξτε ότι, για κάθε $a\in\mathbb{R}$,

$$\int_{S^{n-1}} \exp(a^2|f(x)-\mathbb{E}(f)|^2)\,d\sigma(x) \leq \int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} \exp(a^2(f(x)-f(y))^2)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y).$$

(γ) Δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} \exp(a^2(f(x)-f(y))^2)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \leq ca^2\int_0^{\infty} te^{a^2t^2-ct^2n}dt,$$

και, επιλέγοντας $a\simeq\sqrt{n}$, δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} \exp(a^2(f(x)-f(y))^2)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \leq c_2,$$

όπου $c_1,c_2>0$ απόλυτες σταθερές.

(δ) Δείξτε ότι, για κάθε $t>0$,

$$\sigma(\{x : |f(x)-\mathbb{E}(f)|\geq t\})\leq c_3\exp(-c_4t^2n),$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ απόλυτες σταθερές.

3. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Συμβολίζουμε με b τη μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leq b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\max\left\{M_1, c_1\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\} \leq M_q \leq \max\left\{2M_1, c_2\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\}$$

για κάθε $q \in [1, n]$, όπου c_1, c_2 είναι απόλυτες θετικές σταθερές.

(α) *Υπόδειξη για την δεξιά ανισότητα.* Η συνάρτηση $\|\cdot\| : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Από τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα έπεται ότι

$$\sigma(x \in S^{n-1} : |\,\|x\| - M_1\,| > t) \leq 2\exp(-ct^2 n/b^2)$$

για κάθε $t > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα στον $L^q(S^{n-1})$,

$$M_q - M_1 \leq \|\,\|x\| - M_1\,\|_q.$$

(β) *Υπόδειξη για την αριστερή ανισότητα.* Υπάρχει $z \in S^{n-1}$ ώστε $B_X \subseteq \{y : |\langle y, z\rangle| \leq 1/b\}$. Συνεπώς,

$$\{x \in S^{n-1} : \|x\| \geq t\} \supseteq C_t := \{x \in S^{n-1} : |\langle x, z\rangle| \geq t/b\}$$

για κάθε $t > 0$. Χρησιμοποιήστε την

$$M_q = \left(q\int_0^\infty t^{q-1}\sigma(\{x : \|x\| \geq t\})\,dt\right)^{1/q} \geq \left(q\int_0^\infty t^{q-1}\sigma(C_t)\,dt\right)^{1/q}.$$

4. Έστω $x_1, \ldots, x_t \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in S^{n-1}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{t} |\langle y, x_i\rangle \geq t.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε όλα τα διανύσματα της μορφής $z(\varepsilon) = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i x_i$ όπου $\varepsilon_i = \pm 1$, και επιλέξτε ένα με τη μεγαλύτερη δυνατή Ευκλείδεια νόρμα.

5. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Έστω $t(X)$ ο μικρότερος φυσικός t για τον οποίο υπάρχουν $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$ ώστε

$$(*) \qquad \frac{1}{2}M\|x\|_2 \leq \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\|U_i(x)\| \leq 2M\|x\|_2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$t(X) \geq \frac{1}{4}(b/M)^2,$$

όπου b η μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leq b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Υπόδειξη. Υποθέστε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιους $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$. Θεωρήστε $x_0 \in S^{n-1}$ με $\|x_0\| = b$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4 για τα $x_i = U_i^{-1}(x_0)$.

6. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ και $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Υποθέτουμε ότι $v(B_X) \leq n^\alpha$ και $v(B_{Y^*}) \leq n^\beta$ για κάποιους $\alpha, \beta \geq 1$, όπου $v(P)$ είναι το πλήθος των κορυφών ενός πολυτόπου P. Δείξτε ότι

$$d(X, Y) \leq c\sqrt{\alpha + \beta}\sqrt{nlogn}.$$

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι
$$\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n \subseteq B_X \subseteq B_2^n \subseteq B_Y \subseteq \sqrt{n}B_2^n.$$
Παρατηρήστε ότι, για κάθε $U \in O(n)$, ισχύουν οι $\|U^{-1} : Y \to X\| \leq n$ και
$$\|U : X \to Y\| = \sup_{x \in B_X} \|U(x)\|_Y = \max_{x \in \mathrm{ext}(B_X)} \max_{y^* \in \mathrm{ext}(B_{Y^*})} |\langle U(x), y^* \rangle|,$$
όπου $\mathrm{ext}(P)$ είναι το σύνολο των κορυφών του πολυτόπου P. Για σταθερά x, y^* και $\varepsilon > 0$ εκτιμήστε το
$$\nu(\{U \in O(n) : |\langle U(x), y^* \rangle| \geq \varepsilon\}).$$

7. Έστω $1 \leq k \leq n$ και έστω $f_k : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση
$$f_k(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}.$$
Δηλαδή, $f_k(x) = \|P_k(x)\|_2$, όπου P_k η ορθογώνια προβολή στον $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$.

(α) Δείξτε ότι ο μέσος Lévy $\mathrm{med}(f_k)$ ικανοποιεί την
$$\mathrm{med}(f_k) \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{n}}$$
αν $k \geq C log n$, όπου $C > 0$ (αρκετά μεγάλη) απόλυτη σταθερά.

(β) Έστω $u \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι, για κάθε $t \in (0,1)$,
$$\nu_{n,k}(\{F \in G_{n,k} : |\, \|P_F(u)\|_2 - \mathrm{med}(f_k)\, | \geq t \cdot \mathrm{med}(f_k)\}) \leq c_1 \exp(-c_2 t^2 k).$$
(γ) Έστω $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχουν $k \leq c log n$ (όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά) και $F \in G_{n,k}$ ώστε
$$\frac{1}{2}\mathrm{med}(f_k)\|x_i - x_j\|_2 \leq \|P_F(x_i) - P_F(x_j)\|_2 \leq 2\mathrm{med}(f_k)\|x_i - x_j\|_2$$
για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

8. Έστω P ένα συμμετρικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $X = (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_P)$. Γράφουμε $f(P)$ για το πλήθος των $(n-1)$-διάστατων εδρών του και $v(P)$ για το πλήθος των κορυφών του.

(α) Δείξτε ότι $k(X) \leq log f(P)$ και $k(X^*) \leq log v(P)$.

(β) Δείξτε ότι $log f(P) \cdot log v(P) \geq cn$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

9. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K και ότι $(|K|/|B_2^n|)^{1/n} = A$.

(α) Δείξτε ότι
$$\int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|U\theta\|^n \|\theta\|^n} \sigma(d\theta)\nu(dU) = A^{2n}.$$

(β) Για κάθε $U \in O(n)$ και $\theta \in S^{n-1}$ θέτουμε $N_U(\theta) = \frac{\|U\theta\| + \|\theta\|}{2}$. Δείξτε ότι υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε
$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{[N_U(\theta)]^{2n}} \sigma(d\theta) \leq A^{2n}$$
και συμπεράνατε ότι $N_U(\theta) \geq \frac{c}{A^2}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

(γ) Αν ο U ικανοποιεί το (β), δείξτε ότι
$$B_2^n \subseteq K \cap U(K) \subseteq 8A^2 B_2^n.$$