ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ενότητα: Συνεκτικότητα

Γεώργιος Κουμουλλής

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

8 Συνεκτικότητα

8.1 Συνεκτικοί Χώροι

Ο ορισμός της συνεκτικότητας είναι, μάλλον, φυσιολογικός. Θα έλεγε κανείς ότι ένας τοπολογικός χώρος διασπάται, αν μπορεί να εκφραστεί ως ξένη ένωση δύο ανοικτών συνόλων. Αν αυτό είναι αδύνατο, ο χώρος θα χαρακτηρίζεται από μία ισχυρή έννοια «συνοχής». Από αυτή την απλή ιδέα καταλήγει κανείς στον τυπικό ορισμό.

Ορισμός 8.1.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται συνεκτικός αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά, ανοικτά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A, B του X, ώστε $X = A \cup B$. Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου καλείται συνεκτικό, αν είναι συνεκτικός χώρος με τη σχετική τοπολογία.*

Παρατήρηση 8.1.2. *Είναι σαφές ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι συνεκτικός αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά, κλειστά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A, B του X, ώστε $X = A \cup B$.*

Παρότι ο ορισμός δίνει μία καλή διασθητική προσέγγιση της έννοιας, συχνά δεν είναι εύχρηστος για να ελέγξει κανείς τη συνεκτικότητα ενός τοπολογικού χώρου. Η ακόλουθη Πρόταση μας προσφέρει κάποια επιπλέον κριτήρια.

Πρόταση 8.1.3. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι συνεκτικός χώρος.

(ii) Τα μόνα υποσύνολα του X που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά είναι τα $\emptyset, X$.

(iii) Δεν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση $f : X \to \{0, 1\}$ (όπου το $\{0, 1\}$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία).

Απόδειξη: (i)⇒(ii) Έστω ένα $A \subseteq X$ το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό. Τότε $X = A^c \cup A$, όπου τα A, A^c είναι ανοικτά και ξένα μεταξύ τους. Όμως ο X είναι συνεκτικός, άρα πρέπει $A = \emptyset$ ή $A^c = \emptyset$. Επομένως $A = \emptyset$ ή $A = X$.

(ii)⇒(iii) Αν υπάρχει $f : X \to \{0, 1\}$ συνεχής και επί συνάρτηση, τότε το σύνολο $A = f^{-1}(\{0\})$ είναι ανοικτό, κλειστό. Αφού η f είναι επί, έχουμε ότι $A \neq \emptyset$ και $A \neq X$, πράγμα άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση f.

(iii)⇒(i) Αν ο χώρος X δεν είναι συνεκτικός, υπάρχουν μη κενά, ανοικτά και ξένα μεταξύ τους σύνολα $A, B \subseteq X$, ώστε $X = A \cup B$. Τότε, η χαρακτηριστική συνάρτηση του A, $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, είναι συνεχής και επί (γιατί;), πράγμα άτοπο. Άρα ο X είναι συνεκτικός.

Παραδείγματα 8.1.4. *(α) Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αφού $\mathbb{Q} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

(β) Ο χώρος του Sierpinski (Παράδειγμα 1.1.5 (γ)) είναι συνεκτικός, αφού δεν υπάρχουν μη κενά, ξένα, ανοικτά υποσύνολα που η ένωσή τους να ισούται με το χώρο.

(γ) Ο χώρος $\mathbb{R}_S$ δεν είναι συνεκτικός, αφού το σύνολο $(-\infty, a]$ είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 8.1.5. *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, με $a \leq b$, το κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη: Αν $a = b$, τότε το διάστημα $[a, b]$ είναι μονοσύνολο, το οποίο είναι προφανώς συνεκτικό. Έστω ότι $a < b$. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι το $[a, b]$ δεν είναι συνεκτικό σύνολο, δηλαδή ότι υπάρχουν μη κενά, κλειστά και ξένα μεταξύ τους σύνολα $A, B \subseteq [a, b]$, ώστε $[a, b] = A \cup B$. Το σύνολο A είναι μη κενό. κλειστό και φραγμένο, επομένως υπάρχει το $s = \sup A \in A$ ($a \leq s \leq b$). Αν υποθέσουμε ότι $s \neq b$, αφού το A είναι συγχρόνως ανοικτό σύνολο, υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$, ώστε $(s, s + \varepsilon) \subseteq A$. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού τότε θα είχαμε ότι $s < s + \frac{\varepsilon}{2} \in A$. Άρα $s = b \in A$. Εντελώς ανάλογα, δείχνει κανείς ότι $\sup B = b \in B$, δηλαδή ότι $b \in A \cap B$, πράγμα άτοπο. Επομένως το σύνολο $[a, b]$ είναι συνεκτικό.

Πρόταση 8.1.6. *Η ένωση κάθε οικογένειας συνεκτικών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X, με μη κενή τομή, είναι συνεκτικό σύνολο. Δηλαδή, αν κάθε $A_i \subseteq X$ είναι συνεκτικό σύνολο, για $i \in I$, και $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, τότε το σύνολο $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη: Αφού $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, υπάρχει $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \bigcup_{i \in I} A_i \to \{0, 1\}$. Αφού κάθε A_i είναι συνεκτικό σύνολο, κάθε $f|_{A_i}$ είναι σταθερή και ίση με $f(x_0)$ (αφού $x_0 \in A_i$, για κάθε $i \in I$). Άρα η f είναι σταθερή και κατά συνέπεια, όχι επί. Δηλαδή, δεν υπάρχει συνεχής, επί συνάρτηση $f : \bigcup_{i \in I} A_i \to \{0, 1\}$. Επομένως το σύνολο $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι συνεκτικό.

Ως πόρισμα των παραπάνω, μπορούμε να έχουμε την ταξινόμηση των συνεκτικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη τοπολογία).

Πόρισμα 8.1.7. *Ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός. Επιπλέον τα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς τα διαστήματα (με πεπερασμένα ή άπειρα άκρα)*[1].

Απόδειξη: Ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός, αφού $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} [-n, n] = [-1, 1] \neq \emptyset$ (για τη συνεκτικότητα όλων των διαστημάτων του $\mathbb{R}$ εργάζεται κανείς εντελώς ανάλογα). Έστω ένα $A \subseteq \mathbb{R}$, το οποίο δεν είναι διάστημα, δηλαδή υπάρχουν $x, y \in A$ με $x < y$ και $z \in \mathbb{R}$ με $x < z < y$, ώστε $z \notin A$. Τότε τα σύνολα $A_1 = A \cap (-\infty, z)$, $A_2 = A \cap (z, +\infty)$ είναι ανοικτά στο A, ξένα, μη κενά ($x \in A_1$ και $y \in A_2$) και $A = A_1 \cup A_2$. Άρα το σύνολο A δεν είναι συνεκτικό. Επομένως, κάθε συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι διάστημα.

Η ακόλουθη Πρόταση μας εξηγεί ότι αν σε ένα συνεκτικό σύνολο προσθέσουμε κάποια από τα οριακά του σημεία, το σύνολο που προκύπτει εξακολουθεί να είναι συνεκτικό.

Πρόταση 8.1.8. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$.*

(i) Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, τότε και το B είναι συνεκτικό.

(ii) Αν το A είναι συνεκτικό, τότε και το $\overline{A}$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη: (i) Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : B \to \{0, 1\}$. Αφού το A είναι συνεκτικό, η $f|_A$ είναι σταθερή. Επομένως, το $f(A) \subseteq \{0, 1\}$ είναι μονοσύνολο. Άρα και το $\overline{f(A)}$ είναι μονοσύνολο. Όμως η f είναι συνεχής, άρα

$$f(B) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

[1] Υπενθυμίζουμε ότι ένα I, υποσύνολο του $\mathbb{R}$, καλείται *διάστημα* αν για κάθε $x, y \in I$, με $x \leq y$, και $z \in \mathbb{R}$, με $x < z < y$, έπεται ότι $z \in I$. Αποτελεί απλή άσκηση να ελέγξει κανείς ότι τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τα σύνολα της μορφής: $[a, a] = \{a\}$ για $a \in \mathbb{R}$, $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) για $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ για $a \in \mathbb{R}$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ για $b \in \mathbb{R}$ και το $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

(όπου η κλειστότητα του A λαμβάνεται ως προς τη σχετική τοπολογία του B). Συνεπώς, το $f(B)$ είναι μονοσύνολο, δηλαδή η f δεν είναι επί. Άρα το B είναι συνεκτικό σύνολο.

(ii) Είναι άμεσο από το (i), για $B = \overline{A}$.

Παρατήρηση 8.1.9. *Το αντίστροφο της Πρότασης 8.1.8(ii) δεν είναι αληθές, δηλαδή υπάρχει συνεκτικό σύνολο με πυκνό, μη συνεκτικό υποσύνολο. Ένα απλό παραδειγμα αποτελεί το μη συνεκτικό σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ ως υποσύνολο της (συνεκτικής) πραγματικής ευθείας.*

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων «σέβονται» τα συνεκτικά σύνολα. Ιδιαίτερα, αν ένας τοπολογικός χώρος X είναι συνεκτικός, τότε κάθε τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός προς τον X είναι συνεκτικός. Συνέπεια αυτής της ιδιότητας αποτελεί το *Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής*.

Πρόταση 8.1.10. *Η εικόνα ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, με τον X να είναι συνεκτικός. Έστω συνάρτηση $f : X \to Y$ συνεχής και επί. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι ο Y δεν είναι συνεκτικός. Άρα θα υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση $g : Y \to \{0, 1\}$. Τότε η συνάρτηση $g \circ f : X \to \{0, 1\}$ είναι συνεχής και επί, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το ότι ο X είναι συνεκτικός. Επομένως, ο χώρος Y οφείλει να είναι συνεκτικός.

Πόρισμα 8.1.11 (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)**.** *Έστω X συνεκτικός τοπολογικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Η εικόνα $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 8.1.10, η εικόνα είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα είναι διάστημα (Πόρισμα 8.1.7).

Είναι φυσιολογικό να αναρωτηθεί κανείς για την αλληλεπίδραση της συνεκτικότητας με το γινόμενο τοπολογικών χώρων. Είναι εμφανές ότι αν το καρτεσιανό γινόμενο μίας οικογένειας τοπολογικών χώρων $(X_i)_{i\in I}$ είναι συνεκτικός χώρος, τότε κάθε χώρος X_i οφείλει να είναι συνεκτικός (αφού η αντίστοιχη προβολή π_i είναι συνεχής και επί συνάρτηση). Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές και αποτυπώνεται στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 8.1.12. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια μη κενών και συνεκτικών τοπολογικών χώρων. Ο χώρος γινόμενο $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη: Αρχικά θα δείξουμε το ζητούμενο υποθέτοντας ότι το I είναι πεπερασμένο σύνολο. Μάλιστα, αρκεί να το δείξουμε για $|I| = 2$ (το ζητούμενο για κάθε πεπερασμένο I έπεται στη συνέχεια με επαγωγή). Έστω X και Y συνεκτικοί τοπολογικοί χώροι και έστω ένα στοιχείο $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε το σύνολο

$$A_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$$

Τα σύνολα $\{x\} \times Y$, $X \times \{y_0\}$ είναι συνεκτικά (ως συνεχείς εικόνες των X και Y αντίστοιχα) και $X \times \{y_0\} \subseteq (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y_0\})$. Επομένως, το A_x είναι συνεκτικό σύνολο. Ακόμη, $(x_0, y_0) \in \bigcap_{x\in X} A_x$ και $X \times Y = \bigcup_{x\in X} A_x$. Άρα, ο χώρος $X \times Y$ είναι συνεκτικός.

Για τη γενική περίπτωση, επιλέγουμε ένα στοιχείο $z = (z_i)_{i\in I} \in X$ και για κάθε $J \subseteq I$ πεπερασμένο, θέτουμε το σύνολο

$$X_J = \{x = (x_i)_{i\in I} \in X : \ x_i = z_i \text{ για κάθε } i \in I \setminus J\}.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο X_J είναι ομοιομορφικό με το σύνολο $\prod_{i\in J} X_i$, το οποίο είναι συνεκτικό, ως πεπερασμένο γινόμενο συνεκτικών χώρων. Δηλαδή, κάθε X_J είναι συνεκτικό. Επίσης, έχουμε ότι $z \in X_J$ για κάθε πεπερασμένο $J \subseteq I$, άρα η τομή των συνόλων X_J είναι μη κενή. Επομένως το σύνολο

$$Y = \bigcup \{X_J : \ J \subseteq I \text{ πεπερασμένο}\}$$

είναι συνεκτικό. Αλλά το σύνολο Y είναι πυκνό στο X (γιατί;). Από την Πρόταση 8.1.8 έχουμε ότι ο X είναι συνεκτικός χώρος.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο κάνοντας αναφορά σε μία διαφορετική έννοια συνεκτικότητας, η οποία γενικεύει κατά ουσιαστικό τρόπο τη συνεκτικότητα των διαστημάτων του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 8.1.13. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος X και $x, y \in X$. Ένα μονοπάτι του χώρου X, από το x στο y, είναι μία συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to X$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, ώστε $f(a) = x$ και $f(b) = y$. Ο X καλείται κατά μονοπάτια συνεκτικός αν κάθε δύο σημεία του χώρου συνδέονται με κάποιο μονοπάτι στο X.*

Παρατηρήσεις 8.1.14. *(α) Αν ένας τοπολογικός χώρος X είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός, τότε είναι και συνεκτικός. Πράγματι, έστω προς άτοπο, ότι υπάρχει μία διάσπαση του χώρου $X = A \cup B$ (όπου τα $A, B \subseteq X$ είναι ανοικτά με $A \cap B = \emptyset$). Έστω ένα μονοπάτι στο X, $f : [a.b] \to X$. Το $f([a,b])$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X, ως συνεχής εικόνα συνεκτικού συνόλου, άρα περιέχεται εξόλοκλήρου είτε στο σύνολο A, είτε στο σύνολο B. Επομένως, δεν υπάρχει μονοπάτι που να συνδέει σημεία του A με σημεία του B (γιατί;), πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ο χώρος είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός.*

(β) Η εικόνα ενός κατά μονοπάτια συνεκτικού τοπολογικού χώρου μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Αυτό είναι άμεσο, καθώς η συνεχής εικόνα ενός μονοπατιού είναι μονοπάτι (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

(γ) Ως πεδίο ορισμού ενός μονοπατιού μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε κλειστό διάστημα μας εξυπηρετεί (αφού όλα τα κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους).

Παραδείγματα 8.1.15. *(α) Η κλειστή μοναδιαία μπάλα του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$, $B^n = B^n(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_2 \leq 1\}$ είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό σύνολο. Πράγματι, για $x, y \in B^n$ ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad f(t) = (1-t)x + ty.$$[2]

Η f είναι συνεχής και για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε ότι $\|f(t)\|_2 \leq (1-t)\|x\|_2 + t\|y\|_2 \leq 1$, άρα $f([0,1]) \subseteq B^n$. Επομένως η f είναι ένα μονοπάτι της B^n από το x στο y. Με ανάλογο επιχείρημα δείχνει κανείς ότι κάθε ανοικτή και κάθε κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό σύνολο.

(β) (the topologist's sine curve) Ορίζουμε το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$,

$$S = \{(x, \text{ημ}(\tfrac{1}{x}) : \ x \in (0,1]\}.$$

Αφού το σύνολο S είναι συνεχής εικόνα του συνεκτικού συνόλου $(0,1]$, είναι και το ίδιο συνεκτικό σύνολο. Επομένως, η κλειστότητά του, $\overline{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι επίσης συνεκτικό σύνολο. Μάλιστα, εύκολα ελέγχει κανείς ότι $\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\overline{S}$ δεν είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό, άρα το αντίστροφο της Παρατήρησης 8.1.14(α) δεν είναι αληθές.

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει ένα μονοπάτι $f : [a,c] \to \overline{S}$ που να συνδέει την αρχή των αξόνων με ένα σημείο του S. Το σύνολο $\{t \in [a,c] : \ f(t) \in \{0\} \times [-1,1]\}$ είναι κλειστό και φραγμένο, συνεπώς διαθέτει

[2] Η συνάρτηση f παραμετρικοποιεί το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία x, y

ένα μέγιστο στοιχείο b, με $b < c$ (γιατί;). Τότε, ο περιορισμός της f στο διάστημα $[b,c]$ απεικονίζει το σημείο b σε ένα σημείο του συνόλου $\{0\}\times[-1,1]$ και $f((b,c]) \subseteq S$. Για λόγους απλότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διάστημα $[b,c]$ είναι το διάστημα $[0,1]$. Έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(t) = (x(t), y(t))$. Τότε $x(0) = 0$, $x(t) > 0$ και $y(t) = \text{ημ}(\frac{1}{x(t)})$ για κάθε $t > 0$. Όμως, αν πάρει κανείς μία ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $t_n \to 0$ και $y(t_n) = (-1)^n$ (κατασκευάστε μία τέτοια ακολουθία), θα έχουμε ότι η ακολουθία $y(t_n)$ δε συγκλίνει, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με τη συνέχεια της f.

8.2 Τοπικά συνεκτικοί χώροι και συνεκτικές συνιστώσες

Στην περίπτωση που έχουμε ένα μη συνεκτικό τοπολογικό χώρο X, υπάρχει ένας φυσιολογικός τρόπος να τον διασπάσουμε σε συνεκτικά (ή κατά μονοπάτια συνεκτικά) υποσύνολά του.

Ορισμός 8.2.1. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος X. Ορίζουμε μία σχέση στο X θέτοντας:*

$$x \sim y \iff \text{υπάρχει συνεκτικός υπόχωρος του } X \text{ που να περιέχει τα } x, y.$$

Η '$\sim$' είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο X (γιατί;) και οι κλάσεις ισοδυναμίας της καλούνται συνεκτικές συνιστώσες του X.

Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου περιγράφονται καλύτερα από το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 8.2.2. *Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου X είναι ξένοι συνεκτικοί υπόχωροι του X, τέτοιοι ώστε η ένωσή τους να είναι ο ίδιος ο χώρος X, καθώς και κάθε συνεκτικό υποσύνολο του X να τέμνει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα.*

Απόδειξη: Ως κλάσεις ισοδυναμίας, οι συνεκτικές συνιστώσες είναι ξένες και η ένωσή τους είναι ο χώρος X. Έστω ένα τυχόν συνεκτικό $A \subseteq X$ (με $A \neq \emptyset$). Τότε, για ένα $x \in A$, το A τέμνει τη συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το x. Έστω, προς άτοπο, ότι το A τέμνει δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες, έστω C_1, C_2, και έστω σημεία $x_1 \in A\cap C_1$ και $x_2 \in A\cap C_2$. Τότε από τον ορισμό της $\sim$ έχουμε ότι $x_1 \sim x_2$. Συνεπώς $C_1 = C_2$. Δηλαδή, το συνεκτικό σύνολο A τέμνει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα του X.

Μένει να δείξουμε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι συνεκτικό σύνολο. Έστω C μία συνεκτική συνιστώσα του X και $x_0 \in C$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in C$, $x_0 \sim x$, επομένως υπάρχει συνεκτικός υπόχωρος A_x του X που να περιέχει τα x_0, x. Όμως κάθε A_x τέμνει μονάχα τη συνεκτική συνιστώσα C, δηλαδή $A_x \subseteq C$. Έτσι έχουμε ότι $C = \bigcup_{x\in C} A_x$. Αφού τα σύνολα A_x είναι συνεκτικά και το x_0 περιέχεται στην τομή τους, έχουμε ότι το C είναι συνεκτικό σύνολο.

Παρατηρήσεις 8.2.3. *(α) Το Θεώρημα 8.2.2 μας επιτρέπει να ορίσουμε ισοδύναμα τις συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου X, ως τα μεγιστικά συνεκτικά υποσύνολά του (δηλαδή ένα σύνολο C είναι συνεκτική συνιστώσα του X αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και για κάθε συνεκτικό συνολο A, με $C \subseteq A \subseteq X$, έπεται ότι $A = C$).*

(β) Αν ένας χώρος είναι συνεκτικός, τότε προφανώς αποτελείται από μία συνεκτική συνιστώσα.

Μία εντελώς ανάλογη κατασκευή μπορεί να ακολουθήσει κανείς για την τοπικά συνεκτική περίπτωση.

Ορισμός 8.2.4. *Σε έναν τοπολογικό χώρο X ορίζουμε μία σχέση θέτοντας $x \sim_p y$ αν υπάρχει μονοπάτι στο X, από το x στο y. Η σχέση '$\sim_p$' είναι σχέση ισοδυναμίας και οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας καλούντα κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες του X.*

Ας εξετάσουμε ότι η σχέση $\sim_p$ είναι πράγματι μία σχέση ισοδυναμίας στο X.

- $x \sim_p x$ για κάθε $x \in X$, αφού το μονοπάτι $f : [0,1] \to X$ με $f(t) = x$ για κάθε $t \in [0,1]$ συνδέει το x με τον εαυτό του.

- Έστω $x, y \in X$ με $x \sim_p y$. Τότε υπάρχει μονοπάτι $f : [0,1] \to X$ με $f(a) = x$ και $f(b) = y$. Θέτουμε $g : [0,1] \to X$ με $g(t) = f(1-t)$. Εύκολα ελέγχει κανείς ότι η g είναι μονοπάτι στο X, απο το y στο x. Επομένως $y \sim_p x$.

- Έστω $x, y, z \in X$ με $x \sim_p y$ και $y \sim_p z$. Τότε υπάρχουν αντίστοιχα μονοπάτια $f_1 : [0,1] \to X$, $f_2 : [1,2] \to X$ με $f_1(0) = x$, $f_1(1) = y = f_2(1)$ και $f_2(2) = z$. Θέτουμε τη συνάρτηση $g : [0,2] \to X$ με
$$g(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{αν } t \in [0,1] \\ f_2(t), & \text{αν } t \in (1,2] \end{cases}.$$
Τότε η g είναι συνεχής (Πρόταση 4.1.6(iv)), $g(0) = x$ και $g(2) = z$. Επομένως η g είναι μονοπάτι στο X, από το x στο z, και έτσι, $x \sim_p z$.

Θεώρημα 8.2.5. *Οι κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου X είναι κατά μονοπάτια συνεκτικά, ξένα υποσύνολα του X, τέτοια ώστε η ένωσή τους να είναι ο ίδιος ο χώρος X, καθώς και κάθε κατά μονοπάτια συνεκτικό υποσύνολο του X να τέμνει ακριβώς μία κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα.*

Απόδειξη: Είναι ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 8.2.2 και αφήνεται ως άσκηση.

Παρατήρηση 8.2.6. *Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός τοπολογικού χώρου X είναι κλειστό σύνολο (αυτό έπεται από τη μεγιστικότητα των συνεκτικών συνιστωσών και το ότι η κλειστότητα ενός συνεκτικού συνόλου είναι επίσης συνεκτικό σύνολο). Επιπλέον, αν ο X έχει πεπερασμένες στο πλήθος συνεκτικές συνιστώσες, τότε κάθε μία από αυτές είναι και ανοικτό σύνολο (γιατί;). Εν γένει, μία συνεκτική συνιστώσα ενός τοπολογικού χώρου δεν οφείλει να είναι ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, στο σύνολο $\mathbb{Q}$ (με την επαγόμενη από τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$) κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι μονοσύνολο, επομένως δεν μπορεί να είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.*

Με το ακόλουθο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι δεν ισχύουν ανάλογες καλές ιδιότητες για τις κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες. Δηλαδή, μία κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα ενός τοπολογικού χώρου δεν οφείλει να είναι ούτε ανοικτό, αλλά ούτε και κλειστό σύνολο.

Παράδειγμα 8.2.7. *Ο χώρος $\overline{S}$ του παραδείγματος 8.1.15(β) είναι συνεκτικός αλλά όχι κατά μονοπάτια συνεκτικός. Οι κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες του είναι τα σύνολα $\{0\} \times [-1,1]$ και S. Το S είναι ανοικτό σύνολο στο $\overline{S}$ αλλά όχι κλειστό, ενώ το $\{0\} \times [-1,1]$ είναι κλειστό αλλά όχι ανοικτό.*

Η συνεκτικότητα είναι μία χρήσιμη ιδιότητα για έναν τοπολογικό χώρο, αλλά δεν είναι λίγες οι φορές που η ιδιότητα που ουσαστικά μας ενδιαφέρει είναι η ικανότητα του χώρου να διαθέτει οσοδήποτε «λεπτές», συνεκτικές περιοχές για τα σημεία του.

Ορισμός 8.2.8. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος X. Ο X καλείται*

(i) τοπικά συνεκτικός στο $x \in X$, αν το x διαθέτει βάση περιοχών από συνεκτικά σύνολα.

(ii) τοπικά συνεκτικός, αν είναι τοπικά συνεκτικός σε κάθε σημείο του.

(iii) *τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός στο $x \in X$, αν το x διαθέτει βάση περιοχών από κατά μονοπάτια συνεκτικά σύνολα.*

(iv) *τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός, αν είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός σε κάθε σημείο του.*

Παραδείγματα 8.2.9. *(α) Κάθε συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι και τοπικά συνεκτικό σύνολο.*

(β) Το σύνολο $[-1,0) \cup (0,1] \subseteq \mathbb{R}$ είναι τοπικά συνεκτικό, αλλά όχι συνεκτικό.

(γ) Ο χώρος $\overline{S}$ είναι συνεκτικός, αλλά όχι τοπικά συνεκτικός.

(δ) Το σύνολο $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε συνεκτικό, ούτε τοπικά συνεκτικό.

Πρόταση 8.2.10. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$, κάθε συνεκτική συνιστώσα του U είναι ανοικτό σύνολο στο X.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός και έστω ένα ανοικτό $U \subseteq X$. Αν C είναι μία συνεκτική συνιστώσα του U και $x \in C$, υπάρχει συνεκτική περιοχή V του x, με $V \subseteq U$. Αφού όμως το V είναι συνεκτικό σύνολο, πρέπει $V \subseteq C$. Επομένως η συνεκτική συνιστώσα C είναι ανοικτό σύνολο.

Αντίστροφα, έστω ότι οι συνεκτικές συνιστώσες κάθε ανοικτού συνόλου είναι επίσης ανοικτά σύνολα. Έστω ένα $x \in X$ και $U \in \mathfrak{N}_x$. Αν C είναι η συνεκτική συνιστώσα του U που περιέχει το x, τότε το C είναι συνεκτικό και ανοικτό (από την υπόθεση) σύνολο με $x \in C \subseteq U$. Επομένως το x διαθέτει βάση περιοχών από συνεκτικά σύνολα, δηλαδή ο X είναι τοπικά συνεκτικός χώρος στο x. Αφού το $x \in X$ ήταν τυχόν, ο X είναι τοπικά συνεκτικός.

Ανάλογα αποδεικνύει κανείς την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 8.2.11. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$, κάθε κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα του U είναι ανοικτό σύνολο στο X.*

Η σχέση μεταξύ συνεκτικότητας και κατά μονοπάτια συνεκτικότητας αποτυπώνεται στο ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 8.2.12. *Σε έναν τοπολογικό χώρο X, κάθε κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα περιέχεται σε μία συνεκτική συνιστώσα του X. Αν επιπλέον ο X είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός, τότε οι συνεκτικές συνιστώσες και οι κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες ταυτίζονται.*

Απόδειξη: Έστω C μία συνεκτική συνιστώσα του X και έστω ένα $x \in C$. Αν P είναι η κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα του X που περιέχει το x, αφού η P είναι συνεκτικό σύνολο, έπεται ότι $P \subseteq C$. Επιθυμούμε να δείξουμε ότι αν ο X είναι τοπικά κατά μοονοπάτια συνεκτικός, τότε $P = C$. Έστω, προς άτοπο, ότι $P \subsetneq C$. Κάθε κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα του X που τέμνει το C θα περιέχεται σε αυτό. Αν θέσουμε Q την ένωση ολων αυτών των κατά μονοπάτια συνεκτικών συνιστωσών του X (που περιέχονται στο C) εκτός της P, θα έχουμε ότι $C = P \cup Q$. Αφού ο X είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός, κάθε κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα του X είναι ανοικτό σύνολο. Επομένως, η P (ως συνιστώσα) και το Q (ως ένωση κατά μονοπάτια συνεκτικών συνιστωσών) είναι ανοικτά σύνολα (και προφανώς ξένα). Άρα συνιστούν μία διάσπαση του C, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με τη συνεκτικότητα του C. Συνεπώς, $P = C$.