ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ενότητα: Κατασκευή νέων τοπολογικών χώρων

Γεώργιος Κουμουλλής

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

4 Κατασκευή νέων τοπολογικών χώρων

Στα πρώτα κεφάλαια εξετάσαμε κάποια παραδείγματα τοπολογικών χώρων, καθώς και κάποιες μεθόδους ορισμού μίας τοπολογίας μέσω «εσωτερικών» εννοιών, όπως της βάσης και του συστήματος περιοχών (Θεώρημα 1.1.15, Πρόταση 1.1.18, Θεώρημα 2.1.4, Θεώρημα 2.1.9). Η Θεωρία μας, όμως, αποδεικνύεται ουσιαστικά γονιμότερη. Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να περιγράψουμε μεθόδους κατασκευής νέων τοπολογικών χώρων από ήδη υπάρχοντες.

4.1 Υπόχωροι τοπολογικών χώρων

Η πρώτη και, μάλλον, φυσιολογικότερη κατασκευή ενός νέου χώρου από έναν ήδη υπάρχοντα είναι αυτή του υποχώρου, δηλαδή ο εφοδιασμός κάποιου τυχόντος υποσυνόλου του χώρου με τοπολογία. Έστω, λοιπόν, $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$ τυχόν. Μία πρώτη ιδέα θα ήταν να εξετάσουμε την οικογένεια των ανοικτών συνόλων του X που περιέχονται στο A, $\mathcal{S} = \{G \subseteq A : \ G \in \mathcal{T}\}$ για υποψήφια τοπολογία του A. Όμως αυτή η οικογένεια αποτυγχάνει να είναι τοπολογία στη γενική περίπτωση (γιατί; δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη για το A, ώστε η $\mathcal{S}$ να είναι τοπολογία στο A). Μία πιο προσεκτική προσέγγιση μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Η οικογένεια $\mathcal{T}_A = \{A \cap G : \ G \in \mathcal{T}\}$ είναι τοπολογία στο A (γιατί;) και καλείται σχετική τοπολογία του A (ως προς την $\mathcal{T}$). Ο τοπολογικός χώρος $(A,\mathcal{T}_A)$ λέγεται υπόχωρος του X και τα στοιχεία της $\mathcal{T}_A$ λέγονται ανοικτά σύνολα στο A.*

Σημειώνουμε ότι κάθε τοπολογική έννοια στο A αναφέρεται στην τοπολογία $\mathcal{T}_A$. Για παράδειγμα, ένα $F \subseteq A$ είναι κλειστό στο A αν είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{T}_A$ (δηάδή $A \setminus F \in \mathcal{T}_A$). Χάριν ευκολίας, για ένα $B \subseteq A$, θα συμβολίζουμε με $\mathrm{cl}_A B$ και $\mathrm{int}_A B$ τα $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_A} B$ και $\mathrm{int}_{\mathcal{T}_A} B$ αντίστοιχα. Επίσης θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{N}_x^A$ το $\mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}_A}$, για κάθε $x \in A$. Τέλος, ας παρατηρήσουμε ότι $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}$.

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $\mathcal{B}$ είναι βάση (αντίστοιχα υποβάση) για την $\mathcal{T}$, τότε η $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : \ B \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση (αντίστοιχα υποβάση) για την $\mathcal{T}_A$.*

Απόδειξη: Αφού $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, έχουμε ότι $\mathcal{B}_A \subseteq \mathcal{T}_A$. Έστω τώρα $U \in \mathcal{T}_A$. Τότε $U = A \cap G$ για κάποιο $G \in \mathcal{T}$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$, $G = \bigcup_{i\in I} B_i$ για κάποια $(B_i)_{i\in I}$ υποοικογένεια της $\mathcal{B}$. Άρα

$$U = A \bigcap \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$$

και η $(A \cap B_i)_{i\in I}$ είναι υποοικογένεια της $\mathcal{B}_A$. Συνεπώς, η $\mathcal{B}_A$ είναι βάση για την $\mathcal{T}_A$.

Η περίπτωση της υποβάσης αφήνεται ως άσκηση.

Παραδείγματα 4.1.3. *(α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε $(\mathcal{T}_\rho)_A = \mathcal{T}_{\rho|_{A\times A}}$. Πράγματι, έχουμε:*

$$B_\rho(x,\varepsilon) \cap A = B_{\rho|_{A\times A}}(x,\varepsilon) \quad \forall\, x \in A, \varepsilon > 0,$$

όπου η $\{B_{\rho|_{A\times A}}(x,\varepsilon) : \ x \in A, \varepsilon > 0\}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}_{\rho|_{A\times A}}$ και η $\{B_\rho(x,\varepsilon) : \ x \in A, \varepsilon > 0\}$ είναι βάση για την $(\mathcal{T}_\rho)_A$. Αυτό διότι, αν $G \cap A \in (\mathcal{T}_\rho)_A$, όπου $G \in \mathcal{T}_\rho$ και $x \in G \cap A$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G$, άρα $x \in B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \subseteq G \cap A$.

(β) Από την Πρόταση 4.1.2, ο υπόχωρος $[0,1]$ του $\mathbb{R}$ έχει βάση την

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{(a,b)\cap[0,1]:\ a,b\in\mathbb{R} \text{ με } a<b\}\\ &= \{(a,b):\ 0\le a<b\le 1\}\bigcup\{[0,b):\ b\in[0,1]\}\bigcup\{(a,1]:\ a\in[0,1]\}\cup\{[0,1]\}.\end{aligned}$$

(γ) Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A\subseteq B\subseteq X$. Τότε $(\mathcal{T}_B)_A=\mathcal{T}_A$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_B)_A &= \{U\cap A: U\in\mathcal{T}_B\}\\ &= \{(G\cap B)\cap A: G\in\mathcal{T}\}\\ &= \{G\cap A: G\in\mathcal{T}\}\\ &= \mathcal{T}_A\end{aligned}$$

Πρόταση 4.1.4. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A\subseteq X$.*

(i) Αν $F\subseteq A$, τότε το F είναι κλειστό στο A αν και μόνο αν υπάρχει σύνολο K, κλειστό στο X, ώστε $F=A\cap K$.

(ii) Για κάθε $B\subseteq A$, $\mathrm{cl}_A B=(\mathrm{cl}_X B)\cap A$.

(iii) Για κάθε $x\in A$, $\mathfrak{N}_x^A=\{U\cap A:\ U\in\mathfrak{N}_x\}$.

(iv) Αν (x_λ) δίκτυο στο A και $x\in A$, τότε $x_\lambda\to x$ ως προς $\mathcal{T}_A \iff x_\lambda\to x$ ως προς $\mathcal{T}$.

Απόδειξη: (i) Έστω ότι το F είναι κλειστό στο A. Άρα το $A\setminus F$ είναι ανοικτό στο A, δηλαδή $A\setminus F=A\cap G$ για κάποιο $G\in\mathcal{T}$. Παίρνοντας συμπληρώματα ως προς A έχουμε:

$$F=A\setminus(A\cap G)=A\setminus G=A\cap G^c,$$

όπου το $K:=G^c$ είναι κλειστό στο X.

Αντίστροφα, έστω ότι $F=A\cap K$, όπου K κλειστό στο X. Παίρνοντας συμπληρώματα ως προς A έχουμε:

$$A\setminus F=A\setminus(A\cap K)=A\setminus K=A\cap K^c,$$

όπου το $G:=K^c$ είναι ανοικτό στο X. Άρα το $A\setminus F\in\mathcal{T}_A$ κι επομένως το F είναι κλειστό στο A.

(ii) Έστω $B\subseteq A$. Από το (i), το $(\mathrm{cl}_X B)\cap A$ είναι κλειστό στο A και προφανώς περιέχει το B. Άρα $(\mathrm{cl}_X B)\cap A\supseteq \mathrm{cl}_A B$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν F είναι ένα κλειστό σύνολο στο A και $F\supseteq B$, τότε $F\supseteq(\mathrm{cl}_X B)\cap A$. Πράγματι, από το (i), $F=A\cap K$ για κάποιο K κλειστό στο X. Έχουμε

$$B\subseteq F\subseteq K\Longrightarrow \mathrm{cl}_X B\subseteq K\Longrightarrow(\mathrm{cl}_X B)\cap A\subseteq K\cap A=F.$$

(iii) Έστω $x\in A$ και $U\in\mathfrak{N}_x$. Τότε $x\in U^\circ\cap A\subseteq U\cap A$, όπου $U^\circ\cap A\in\mathcal{T}_A$. Επομένως $U\cap A\in\mathfrak{N}_x^A$. Άρα $\mathfrak{N}_x^A\supseteq\{U\cap A:\ U\in\mathfrak{N}_x\}$.

Αντίστροφα, έστω $V\in\mathfrak{N}_x^A$. Τότε $x\in\mathrm{int}_A V=A\cap G$ για κάποιο $G\in\mathcal{T}$. Θέτουμε $U=G\cup V$. Τότε $U\in\mathfrak{N}_x$ (αφού $x\in G\subseteq U$ και $G\in\mathcal{T}$) και

$$U\cap A=(G\cap A)\cup(V\cap A)=(\mathrm{int}_A V)\cup V=V.$$

Άρα $\mathfrak{N}_x^A\subseteq\{U\cap A:\ U\in\mathfrak{N}_x\}$. Συνεπώς $\mathfrak{N}_x^A=\{U\cap A:\ U\in\mathfrak{N}_x\}$.

(iv) Έπεται άμεσα από το (iii).

Παρατηρήσεις 4.1.5. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $B \subseteq A \subseteq X$.*

(α) $\mathrm{int}_A B \subseteq (\mathrm{int}_X B) \cap A$, αφού $(\mathrm{int}_X B) \cap A \in \mathcal{T}_A$ και περιέχεται στο B. Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει γενικά η ισότητα. Για παράδειγμα, έχουμε

$$\mathbb{Q} = \mathrm{int}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} \supsetneqq (\mathrm{int}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset.$$

(β) Αν το A είναι ανοικτό στο X, τότε το B είναι ανοικτό στο A αν και μόνο αν $B \in \mathcal{T}$. Πράγματι,

$(\Rightarrow)$ *$B = A \cap G$ για κάποιο $G \in \mathcal{T}$. Άρα το B είναι ανοικτό στο X, ως τομή δύο ανοικτών.*

$(\Leftarrow)$ *$B = A \cap B$, άρα B ανοικτό στο A.*

(γ) Όμοια αποδεικνύεται ότι αν το A είναι κλειστό στο X, τότε το B είναι κλειστό στο A αν και μόνο αν το B είναι κλειστό στο X.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι Προτάσεις 4.1.2 και 4.1.4(i)-(iii) κάνουν εμφανή μία πρακτική περιγραφή της σχετικής τοπολογίας του A, αλλά οι τοπολογικές μας απαιτήσεις από έναν καλό ορισμό σχετικής τοπολογίας δεν έχουν καλυφθεί. Είδαμε ότι για ένα δίκτυο με τιμές στον υπόχωρο, η σύγκλιση δεν αλλάζει, είτε εξεταστεί στην τοπολογία του χώρου, είτε σε αυτήν του υποχώρου (όταν το υποψήφιο όριο βρίσκεται στον υπόχωρο - Πρόταση 4.1.4(iv)). Θα αναμέναμε και μία ανάλογα καλή συμπεριφορά από τις συνεχείς συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα, να είναι συνεχής συνάρτηση (στην τοπολογία του υποχώρου) ο περιορισμός μίας συνεχούς συνάρτησης. Αυτού του τύπου αποτελέσματα περιγράφονται στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 4.1.6. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και μία συνάρτηση $f : X \to Y$.*

(i) *Αν η f είναι συνεχής και $A \subseteq X$, τότε η $f|_A : A \to Y$ είναι συνεχής.*

(ii) *Αν $f(X) \subseteq B \subseteq Y$, τότε η $f : X \to B$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η $f : X \to Y$ είναι συνεχής.*

(iii) *Αν I είναι αυθαίρετο σύνολο και $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, όπου τα A_i είναι ανοικτά στο X για $i \in I$, τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η $f|_{A_i}$ είναι συνεχής για κάθε $i \in I$.*

(iv) *Αν $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, όπου τα F_i είναι κλειστά για $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η $f|_{F_i}$ είναι συνεχής για $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Απόδειξη: (i) Για κάθε $G \subseteq Y$ ανοικτό, $(f|_A)^{-1}(G) = A \cap f^{-1}(G)$, όπου $f^{-1}(G)$ ανοικτό στο X. Άρα, το $(f|_A)^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο A κι επομένως η $f|_A$ είναι συνεχής.

(ii) Για κάθε $G \subseteq Y$ ανοικτό στο Y έχουμε $f^{-1}(G) = f^{-1}(B \cap G)$, αφού $B \supseteq f(X)$, άρα έχουμε το συμπέρασμα.

(iii) Δείχνουμε διαδοχικά:

$(\Rightarrow)$ Προφανές, από (i).

($\Leftarrow$) Έστω $G \subseteq Y$ ανοικτό. Τότε έχουμε:

$$f^{-1}(G) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap f^{-1}(G) = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap f^{-1}(G)) = \bigcup_{i\in I}(f|_{A_i})^{-1}(G),$$

όπου κάθε $(f|_{A_i})^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο A_i, άρα και στο X (από την Παρατήρηση 4.1.5(β)). Άρα το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό, ως ένωση ανοικτών. Συνεπώς η f είναι συνεχής.

(iv) Ανάλογα με το (iii).

Πρόταση 4.1.7. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\tau : A \to X$, με $\tau(x) = x$ για κάθε $x \in A$. Τότε:*

(i) η τ είναι συνεχής και

(ii) η $\mathcal{T}_A$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο A ώστε η τ να είναι συνεχής.

Απόδειξη: (i) Για κάθε $G \in \mathcal{T}$, $\tau^{-1}(G) = G \cap A \in \mathcal{T}_A$ κι επομένως η τ είναι συνεχής.

(ii) Έστω $\mathcal{T}'$ τοπολογία στο A, ώστε η τ να είναι συνεχής. Τότε για κάθε $G \in \mathcal{T}$, $\tau^{-1}(G) = G \cap A \in \mathcal{T}'$. Επομένως $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}'$. Άρα η $\mathcal{T}_A$ είναι η μικρότερη τοπολογία ώστε η τ να είναι συνεχής.

4.2 Ασθενής τοπολογία ως προς μία οικογένεια συναρτήσεων

Σε αυτή την παράγραφο ξεκινούμε με ένα σύνολο X, το οποίο θέλουμε να εφοδιάσουμε με μία τοπολογία, τέτοια ώστε να καθίσταται συνεχής κάθε συνάρτηση μίας οικογένειας συναρτήσεων $(f_i)_{i\in I}$ (οι f_i παίρνουν τιμές σε κάποιους τοπολογικούς χώρους X_i). Αν το X εφοδιαστεί με μία αρκετά ισχυρή τοπολογία (όπως η διακριτή), τότε η ζητούμενη ιδιότητα θα ισχύει. Για το λόγο αυτό, φαίνεται ουσιαστικότερο να εστιάσουμε στη μικρότερη τοπολογία με την παραπάνω ιδιότητα.

Ορισμός 4.2.1. *Έστω X σύνολο, $(X_i,\mathcal{T}_i)$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και συναρτήσεις $f_i : X \to X_i$, για κάθε $i \in I$. Θέτουμε*

$$C = \{f_i^{-1}(G) : \ G \in \mathcal{T}_i, i \in I\}$$

Η τοπολογία $\mathcal{T}$ που έχει υποβάση την C καλείται ασθενής τοπολογία ως προς την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$.

Παρατηρήσεις 4.2.2. *(α) Η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο X ώστε κάθε f_i να είναι συνεχής (αφού η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την C).*

(β) Μία βάση για την $\mathcal{T}$ είναι η

$$\mathcal{B} = \left\{\bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_k) : \ i_k \in I, G_k \in \mathcal{T}_{i_k} \text{ για } k = 1,\ldots,n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Επίσης, αν $\mathcal{B}_i$ είναι βάση για την $\mathcal{T}_i$ για κάθε $i \in I$, τότε η

$$\mathcal{B}' = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_k) : \; i_k \in I, G_k \in \mathcal{B}_{i_k} \cup \{X_{i_k}\} \text{ για } k = 1, \ldots, n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι βάση για την $\mathcal{T}$. Πράγματι, $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ και κάθε στοιχείο της $\mathcal{B}$ είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}'$, αφού αν $x \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_k)$, όπου $G_k \in \mathcal{T}_{i_k}$ για $k = 1,2,\ldots,n$, τότε $f_{i_k}(x) \in G_k$ για κάθε k. Άρα υπάρχει $B_k \in \mathcal{B}_{i_k}$ ώστε $f_{i_k}(x) \in B_k \subseteq G_k$ για κάθε k. Συνεπώς $x \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(B_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_k)$, όπου $\bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(B_k) \in \mathcal{B}'$.

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, ώστε η $\mathcal{T}$ να είναι η ασθενής τοπολογία ως προς μία οικογένεια συναρτήσεων $f_i : X \to X_i$, $i \in I$.*

(i) Αν Z είναι τοπολογικός χώρος και $g : Z \to X$, τότε

$$g \text{ συνεχής} \iff f_i \circ g : Z \to X_i \text{ συνεχής για κάθε } i \in I.$$

(ii) Αν (x_λ) είναι δίκτυο στο X και $x \in X$, τότε

$$x_\lambda \to x \text{ στην } \mathcal{T} \iff f_i(x_\lambda) \to f_i(x) \text{ στην τοπολογία του } X_i, \text{ για κάθε } i \in I.$$

(iii) Αν $A \subseteq X$, τότε η σχετική τοπολογία $\mathcal{T}_A$ συμπίπτει με την ασθενή τοπολογία ως προς $(f_i|_A)_{i\in I}$.

Απόδειξη: (i) Έστω ότι η g είναι συνεχής. Τότε κάθε $f_i \circ g$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών. Έστω αντίστροφα ότι κάθε $f_i \circ g$ είναι συνεχής. Τότε για κάθε $i \in I$ και G ανοικτό στο X_i το $g^{-1}(f_i^{-1}(G)) = (f_i \circ g)^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο Z. Αφού η $C = \{f_i^{-1}(G) : \; G \subseteq X_i \text{ ανοικτό}, i \in I\}$ είναι υποβάση της $\mathcal{T}$, έπεται ότι η g είναι συνεχής.

(ii) Αν $x_\lambda \to x$, τότε $f_i(x_\lambda) \to f_i(x)$ για κάθε $i \in I$, αφού οι συναρτήσεις f_i είναι συνεχείς. Έστω αντίστροφα, ότι $f_i(x_\lambda) \to f_i(x)$ για κάθε $i \in I$ κι έστω G ανοικτή περιοχή του x. Αφού η $\mathcal{B}$ (της Παρατήρησης 4.4.2(β)) είναι βάση για την $\mathcal{T}$, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ και $G_1 \subseteq X_{i_1}, G_2 \subseteq X_{i_2}, \ldots, G_n \subseteq X_{i_n}$ ανοικτά, ώστε $x \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_k) \subseteq G$. Άρα $f_{i_k}(x) \in G_k$ για κάθε $k = 1,2,\ldots,n$. Αφού $f_{i_k}(x_\lambda) \to f_{i_k}(x)$ για $k = 1,2,\ldots,n$, έπεται ότι υπάρχει $\lambda_k \in \Lambda$ ώστε $f_{i_k}(x_\lambda) \in G_k$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_k$ για $k = 1,2,\ldots,n$. Επιλέγουμε $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $\lambda_0 \geq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Τότε για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ έχουμε $f_{i_k}(x_\lambda) \in G_k$ για κάθε $k = 1,2,\ldots,n$, δηλαδή $x_\lambda \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_k) \subseteq G$. Επομένως $x_\lambda \to x$.

(iii) Για κάθε $i \in I$ και $G \in \mathcal{T}_i$ έχουμε $f_i^{-1}(G) \cap A = (f_i|_A)^{-1}(G)$, όπου η οικογένεια $\{f_i^{-1}(G) \cap A : \; i \in I, G_i \subseteq X_i \text{ ανοικτό}\}$ είναι υποβάση για την $\mathcal{T}_A$ και η οικογένεια $\{(f_i|_A)^{-1}(G) : \; i \in I, G_i \subseteq X_i \text{ ανοικτό}\}$ είναι υποβάση της ασθενούς τοπολογίας ως προς την οικογένεια συναρτήσεων $(f_i|_A)_{i\in I}$.

4.3 Τοπολογία γινόμενο

Αν $(X,\mathcal{T})$και $(Y,\mathcal{T}')$ είναι δύο τοπολογικοί χώροι, αναμενόμενο είναι να οδηγηθεί κανείς στην αναζήτηση μίας τοπολογίας στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$, η οποία θα είναι, κατά μία έννοια, συμβατή με τις τοπολογίες των συνόλων X και Y. Μία υποψήφια έννοια συμβατότητας είναι η απαίτηση να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις προβολής στις συντεταγμένες κάθε σημείου. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε τα ανοικτά σύνολα του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ να παράγονται από τα γινόμενα των ανοικτών συνόλων των X και Y (δηλαδή η οικογένεια $\{U \times V : U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{T}'\}$ να είναι βάση για την τοπολογία γινόμενο). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στην απόδοση τοπολογίας στο καρτεσιανό γινόμενο, όχι δύο τοπολογικών χώρων, αλλά μίας αυθαίρετα μεγάλης οικογένειας τοπολογικών χώρων. Αν και στην πεπερασμένη περίπτωση δεν παρουσιάζεται κάποια διαφορά, στη γενική περίπτωση καρτεσιανού γινομένου θα απαιτήσουμε την πρώτη έννοια συμβατότητας, όπως θα φανεί στον Ορισμό 4.3.1. Θα πρέπει δε να σημειωθεί, ότι η κατασκευή της τοπολογίας γινόμενο είναι μία κατασκευή εξέχουσας σημασίας για τη Γενική Τοπολογία.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι σύνολα, το καρτεσιανό γινόμενο των X_i ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} X_i &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\} \\ &= \left\{ x : \{1,2,\ldots,n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} x_i : x(i) \in X_i \text{ για } i = 1,2,\ldots,n \right\}\end{aligned}$$

Ορισμός 4.3.1. *Έστω I αυθαίρετο σύνολο και $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια συνόλων. Τότε το σύνολο*

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \text{ με } x(i) \in X_i \text{ για κάθε } i \in I \right\}$$

καλείται καρτεσιανό γινόμενο της οικογένειας $(X_i)_{i\in I}$. Τα στοιχεία του $\prod_{i\in I} X_i$ συμβολίζονται με $x = (x_i)_{i\in I}$, όπου $x_i = x(i)$ για κάθε $i \in I$. Τα x_i λέγονται συντεταγμένες του x. Η συνάρτηση $\pi_i : X \to X_i$ με $\pi_i(x) = x_i$ για κάθε $x \in X$ καλείται προβολή $i-$τάξης. Αν $X_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$, τότε $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ (από αξίωμα της επιλογής). Αν $X_i = Y$ για κάθε $i \in I$, τότε το $\prod_{i\in I} X_i$ συμβολίζεται με Y^I και καλείται δύναμη του Y.

Ορισμός 4.3.2. *Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, όπου I αυθαίρετο σύνολο. Η ασθενής τοπολογία του $X = \prod_{i\in I} X_i$ ως προς την οικογένεια $(\pi_i)_{i\in I}$ των προβολών, καλείται καρτεσιανή τοπολογία ή τοπολογία γινόμενο και ο τοπολογικός χώρος X καλείται χώρος γινόμενο της οικογένειας $(X_i)_{i\in I}$.*

Ας εντοπίσουμε όσα έχουμε αναφέρει για την ασθενή τοπολογία στην ειδική περίπτωση της καρτεσιανής τοπολογίας. Η καρτεσιανή τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο X ώστε κάθε προβολή $\pi_i : X \to X_i$ να είναι συνεχής. Μία υποβάση για την $\mathcal{T}$ είναι η

$$C = \{\pi_i^{-1}(G) : G \in \mathcal{T}_i, i \in I\}.$$

Μια βάση για την $\mathcal{T}$ είναι η

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \left\{\bigcap \pi_{i_k}^{-1}(G_k) : i_k \in I, G_k \in \mathcal{T}_{i_k}, k = 1,2,\ldots,n \text{ και } n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \left\{\prod_{i\in I} G_i : G_i \in \mathcal{T}_i \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } |\{i \in I : G_i \neq X_i\}| < \infty\right\}\end{aligned}$$

διότι

$$\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(G_k) = \prod_{i\in I} G_i, \text{ όπου } G_i = \begin{cases} G_k, & \text{αν } i = i_k,\ k = 1,2,\ldots,n \\ X_i, & \text{αν } i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}\end{cases}.$$

Η $\mathcal{B}$ καλείται *κανονική βάση* για την $\mathcal{T}$. Ακόμη, αν $\mathcal{B}_i$ είναι βάση για την $\mathcal{T}_i$ για κάθε $i \in I$, τότε βάση για την $\mathcal{T}$ αποτελεί και η

$$\begin{aligned}\mathcal{B}' &= \left\{\bigcap \pi_{i_k}^{-1}(G_k) : i_k \in I, G_k \in \mathcal{B}_{i_k} \cup \{X_{i_k}\}, k = 1,2,\ldots,n \text{ και } n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \left\{\prod_{i\in I} G_i : G_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\} \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } |\{i \in I : G_i \neq X_i\}| < \infty\right\}.\end{aligned}$$

Πρόταση 4.3.3. *Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $X = \prod_{i\in I} X_i$ με την καρτεσιανή τοπολογία $\mathcal{T}$.*

(i) Αν Z είναι τοπολογικός χώρος και $f : Z \to X$, τότε

$$f \text{ συνεχής} \iff \pi_i \circ f : Z \to X_i \text{ συνεχής για κάθε } i \in I.$$

(ii) Αν (x_λ) είναι δίκτυο στο X και $x \in X$, τότε

$$x_\lambda \to x \iff \pi_i(x_\lambda) \to \pi_i(x) \text{ για κάθε } i \in I.$$

(iii) Αν $A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$ και $A = \prod_{i\in I} A_i$, τότε η σχετική τοπολογία $\mathcal{T}_A$ του A ως προς $\mathcal{T}$ συμπίπτει με την καρτεσιανή τοπολογία του A όταν κάθε A_i έχει τη σχετική τοπολογία ως προς $\mathcal{T}_i$. Επιπλέον $\overline{A} = \overline{\left(\prod_{i\in I} A_i\right)} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

(iv) Για κάθε $i \in I$ η προβολή $\pi_i : X \to X_i$ είναι ανοικτή, αλλά όχι αναγκαία κλειστή.

Απόδειξη: (i), (ii) Άμεσα, από Πρόταση 4.2.3(i), (ii) αντίστοιχα.

(iii) Από την Πρόταση 4.2.3(iii), έχουμε ότι η $\mathcal{T}_A$ συμπίπτει με την ασθενή τοπολογία ως προς την οικογένεια $\pi_i|_A : A \to X_i$, $i \in I$. Όμως, η τελευταία είναι ίση με την ασθενή τοπολογία ως προς την οικογένεια $\pi_i|_A : A \to A_i$, $i \in I$ (γιατί;), δηλαδή είναι ίση με την καρτεσιανή τοπολογία του A.

Δείχνουμε ότι $\overline{\left(\prod_{i\in I} A_i\right)} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$. Παρατηρούμε αρχικά ότι $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ αν και μόνο αν $\pi_i(x) = x_i \in \overline{A_i}$, όπου κάθε $\pi_i^{-1}(\overline{A_i})$ είναι κλειστό (αφού κάθε π_i είναι συνεχής). Συνεπώς $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\overline{A_i})$, το οποίο είναι κλειστό, ως τομή κλειστών, άρα

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Αντίστροφα, έστω $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ και $B \in \mathcal{B}$, όπου $\mathcal{B}$ η κανονική βάση της $\mathcal{T}$, με $x \in B$. Αρκεί να δείξουμε ότι $B \cap \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Έχουμε ότι $B = \prod_{i\in I} G_i$, όπου $G_i \in \mathcal{T}_i$ για κάθε $i \in I$ και $|\{i \in I : G_i \neq X_i\}| < \infty$. Επίσης, για κάθε $i \in I$, $x_i \in \overline{A_i}$ (αφού $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$) και $x_i \in G_i$ (αφού $x \in \prod_{i\in I} G_i$). Επομένως $A_i \cap G_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$ κι έτσι, $\prod_{i\in I} A_i \cap G_i \neq \emptyset$, δηλαδή $(\prod_{i\in I} A_i) \cap (\prod_{i\in I} G_i) \neq \emptyset$. Άρα $\prod_{i\in I} A_i \cap B \neq \emptyset$.

(iv) Έστω $B \in \mathcal{B}$ με $B \neq \emptyset$. Τότε $B = \prod_{i\in I} G_i$, όπου $G_i \in \mathcal{T}_i$ και $G_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$. Άρα $\pi_i(B) = G_i$ ανοικτό στο X_i. Επομένως π_i ανοικτή.

Η $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι κλειστή. Πράγματι το $F = \{(x, 1/x) : x > 0\}$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ενώ το $\pi_1(F) = (0, +\infty)$ δεν είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 4.3.4. *Αν (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) είναι μετρικοί χώροι, τότε ο χώρος γινόμενο των $(X_1, \mathcal{T}_{\rho_1})$ και $(X_2, \mathcal{T}_{\rho_2})$ με την καρτεσιανή τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική $\rho((x, y), (x', y')) = \max\{\rho_1(x, x'), \rho_2(y, y')\}$, αφού*

$$B_\rho((x, y), \varepsilon) = B_{\rho_1}(x, \varepsilon) \times B_{\rho_2}(y, \varepsilon) \quad \forall (x, y) \in X_1 \times X_2,\ \varepsilon > 0$$

και οι οικογένειες $\{B_\rho((x, y), \varepsilon) : (x, y) \in X_1 \times X_2,\ \varepsilon > 0\}$ και $\{B_{\rho_1}(x, \varepsilon) \times B_{\rho_2}(y, \varepsilon) : x \in X_1,\ y \in X_2,\ \varepsilon > 0\}$ αποτελούν βάσεις για τις τοπολογίες $\mathcal{T}_\rho$ και $\mathcal{T}$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 4.3.5. *Έστω X_n, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία μετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων και ο χώρος $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ με την καρτεσιανή τοπολογία. Τότε ο X είναι μετρικοποιήσιμος.*

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω ρ_n μετρική στο X_n ώστε η $\mathcal{T}_{\rho_n}$ να είναι η τοπολογία του X_n. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\rho_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (αντικαθιστώντας τη ρ_n με την $\min(\rho_n, 1)$). Ορίζουμε $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n), \text{ για κάθε } x = (x_n),\ y = (y_n) \in X.$$

Η ρ είναι καλά ορισμένη μετρική στο X (γιατί;). Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{T}_\rho = \mathcal{T}$, όπου $\mathcal{T}$ η καρτεσιανή τοπολογία του X.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x, y \in X$ έχουμε $\rho_n(\pi_n(x), \pi_n(y)) = \rho_n(x_n, y_n) \leq 2^n \rho(x, y)$. Επομένως η $\pi_n : (X, \mathcal{T}_\rho) \to X_n$ είναι συνεχής. Αφού η $\mathcal{T}$ είναι η ελάχιστη τοπολογία στο X ώστε κάθε $\pi_n : (X, \mathcal{T}) \to X_n$ να είναι συνεχής, έπεται ότι $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\rho$.

Αντίστροφα, έστω $G \in \mathcal{T}_\rho$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ (όπου $\mathcal{B}$ η κανονική βάση της $\mathcal{T}$) ώστε $x \in B \subseteq G$ (διότι τότε το G θα είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$, άρα $G \in \mathcal{T}$). Έστω $x = (x_n) \in G$. Αφού $G \in \mathcal{T}_\rho$, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq G$. Θέτουμε $B = \bigcap_{n=1}^{k} \pi_n^{-1}(B_{\rho_n}(x_n, \varepsilon/2))$, όπου k αρκετά μεγάλο ώστε $1/2^k < \varepsilon/2$. Τότε $B \in \mathcal{B}$, $x \in B$ και για κάθε $y = (y_n) \in B$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^k}
\end{aligned}$$

$$< \quad \varepsilon$$

Άρα $y \in B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G$. Συνεπώς $B \subseteq G$.

Πρόταση 4.3.6. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος ώστε η $\mathcal{T}$ να είναι η ασθενής τοπολογία ως προς μία οικογένεια συναρτήσεων $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, που διαχωρίζει τα σημεία του X (δηλαδή, για κάθε $x, y \in X$, με $x \neq y$, υπάρχει $i \in I$ ώστε $f_i(x) \neq f_i(y)$). Θέτουμε $\varphi : X \to \prod_{i \in I} X_i$ με $\varphi(x) = (f_i(x))_{i\in I}$. Τότε η φ είναι (τοπολογική) εμφύτευση, δηλαδή η $\varphi : X \to \varphi(X)$ είναι ομοιομορφισμός των X και $\varphi(X)$, όπου ο χώρος $\varphi(X)$ έχει τη σχετική τοπολογία.*

Απόδειξη: Αφού η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, η φ είναι $1-1$. Άρα η $\varphi : X \to \varphi(X)$ είναι $1-1$ και επί. Έστω (x_λ) δίκτυο στο X και $x \in X$. Τότε:

$$\begin{aligned} x_\lambda \to x \quad &\iff \quad f_i(x_\lambda) \to f_i(x) \text{ για κάθε } i \in I \text{ (από Πρόταση 4.2.3(ii))} \\ &\iff \quad (f_i(x_\lambda))_{i\in I} \to (f_i(x))_{i\in I} \text{ στο } \varphi(X) \text{ (από Πρόταση 4.3.3(ii), (iii))} \\ &\iff \quad \varphi(x_\lambda) \to \varphi(x) \text{ στο } \varphi(X). \end{aligned}$$

Από το χαρακτηρισμό της συνέχειας με δίκτυα, έπεται ότι η $\varphi : X \to \varphi(X)$ και η $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ είναι συνεχείς.

4.4 Τοπολογία πηλίκο

Στην Τοπολογία εμφανίζονται συχνά καταστάσεις κατά τις οποιές καλούμαστε να κατασκευάσουμε πολύπλοκα αντικείμενα από απλούστερα, χρησιμοποιώντας μεθόδους «συγκόλλησης». Αυτές οι καταστάσεις ενδέχεται με μία πρώτη ματιά να φαίνονται διαφορετικές, αλλά ουσιαστικά αποτελούν εκφάνσεις μίας γενικής κατασκευής. Η έννοια της τοπολογίας πηλίκο ουσιαστικά εμπεριέχει την τυπική περιγραφή αυτής της κατασκευής.

Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο X. Έστω $\widetilde{X} = X/\sim$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την $\sim$ (μπορούμε να σκεφτόμαστε την κατασκευή του $\widetilde{X}$ ως μία «συγκόλληση» τμημάτων του X, συγκεκριμένα ταυτίζουμε τα στοιχεία του X που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας). Σκοπός μας είναι να εφοδιάσουμε το σύνολο $\widetilde{X}$ με μία τοπολογία, τέτοια ώστε η δημιουργία του $\widetilde{X}$ από το X να γίνεται με συνεχή τρόπο. Ουσιαστικά, απαιτούμε να είναι συνεχής η κανονική προβολή $\pi : X \to \widetilde{X}$ με $x \mapsto [x]$, όπου $[x]$ η κλάση ισοδυναμίας του x. Αν εφοδιάσουμε το $\widetilde{X}$ με την τετριμμένη τοπολογία, τότε προφανώς η π θα είναι συνεχής. Όμως μία τέτοια κατάσταση δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον και για το λόγο αυτό, θα πρέπει να αναζητήσουμε ισχυρότερες τοπολογίες στο $\widetilde{X}$. Αν $\mathcal{T}_\pi$ είναι η επιθυμητή τοπολογία στο $\widetilde{X}$, τότε, από τη συνέχεια της π, έχουμε ότι $\mathcal{T}_\pi \subseteq \{U \subseteq \widetilde{X} : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$. Αλλά μπορεί εύκολα κανείς να ελέγξει ότι η οικογένεια $\{U \subseteq \widetilde{X} : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$ είναι μία τοπολογία στο $\widetilde{X}$. Καταλήγουμε έτσι στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.4.1. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο X και $\widetilde{X} = X/\sim$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την $\sim$. Η τοπολογία*

$$\mathcal{T}_\pi = \{U \subseteq \widetilde{X} : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

του $\widetilde{X}$ (όπου π η κανονική προβολή του X) καλείται τοπολογία πηλίκο και ο χώρος $(\widetilde{X},\mathcal{T}_\pi)$ είναι ένας χώρος πηλίκο του X.

Παρατήρηση 4.4.2. *Η $\mathcal{T}_\pi$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο $\widetilde{X}$ ώστε η κανονική προβολή $\pi : X \to \widetilde{X}$ να είναι συνεχής.*

Πρόταση 4.4.3. *Έστω τοπολογικοί χώροι X, Y και $\widetilde{X}$ ένας χώρος πηλίκο του χώρου X. Τότε, μία συνάρτηση $f : \widetilde{X} \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η $f \circ \pi$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Άμεσο, αφού η π είναι συνεχής.

$(\Leftarrow)$ Από τον ορισμό της τοπολογίας πηλίκο έχουμε ότι ένα σύνολο V είναι ανοικτό στο X αν και μόνο αν το $\pi(V)$ είναι ανοικτό στο $\widetilde{X}$. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του Y. Τότε, από τη συνέχεια της $f \circ \pi$, το σύνολο $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο X. Άρα, το σύνολο $\pi[(f \circ \pi)^{-1}(U)]$ είναι ανοικτό στο $\widetilde{X}$. Όμως, αφού η κανονική προβολή είναι **επί** του $\widetilde{X}$, ισχύει ότι $\pi[(f \circ \pi)^{-1}(U)] = \pi(\pi^{-1}(f^{-1}(U))) = f^{-1}(U)$. Δηλαδή, το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο $\widetilde{X}$. Συνεπώς η f είναι συνεχής.

Πρόταση 4.4.4. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ η οποία είναι σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$. Τότε υπάρχει μοναδική $\tilde{f} : \widetilde{X} \to Y$ με $f = \tilde{f} \circ \pi$. Δηλαδή υπάρχει μοναδική $\tilde{f}$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ \widetilde{X} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη: Για κάθε $[x] \in \widetilde{X}$ ορίζουμε $\tilde{f}([x]) = f(x)$. Τότε η f είναι καλά ορισμένη (γιατί;) και προφανώς $f = \tilde{f} \circ \pi$. Από την Πρόταση 4.4.3, η $\tilde{f}$ είναι συνεχής, αφού η $\tilde{f} \circ \pi = f$ είναι συνεχής. Η μοναδικότητα αφήνεται ως άσκηση.

Για να γίνει κατανοητό το πώς μπορούμε να αναγνωρίζουμε ένα χώρο πηλίκο, είναι απαραίτητο να εισάγουμε και να μελετήσουμε την έννοια της αποικόνισης πηλίκο.

Ορισμός 4.4.5. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση $p : X \to Y$ καλείται απεικόνιση πηλίκο ή συνάρτηση ταύτισης αν υπάρχει σχέση ισοδυναμίας, $\sim$, στο X και ομοιομορφισμός $\varphi : \widetilde{X} \to Y$ (όπου ο χώρο πηλίκο $\widetilde{X}$ είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία πηλίκο) έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ \widetilde{X} \arrow[ur, dashed, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 4.4.6. *Μία απεικόνιση πηλίκο p είναι προφανώς συνεχής και επί. Επιπλέον, ένα $U \subseteq Y$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν το $p^{-1}(U) \subseteq X$ είναι ανοικτό (γιατί;).*

Το ακόλουθο Θεώρημα κάνει φανερό το ότι οι παραπάνω ιδιότητες χαρακτηρίζουν τις απεικονίσεις πηλίκο.

Θεώρημα 4.4.7. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $p : X \to Y$ μία συνεχής και επί συνάρτηση. Η p είναι απεικόνιση πηλίκο αν και μόνο αν, ισχύει ότι ένα $U \subseteq Y$ είναι ανοικτό ακριβώς όταν το $p^{-1}(U) \subseteq X$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη: Το ευθύ είναι γνωστό από την Παρατήρηση 4.4.6. Δείχνουμε το αντίστροφο. Ορίζουμε στο X τη σχέση: για $x, y \in X$, $x \sim y \iff p(x) = p(y)$. Η $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο X και από τον ορισμό της $\sim$, η p είναι σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας. Από την Πρόταση 4.4.4, υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $\tilde{p} : \widetilde{X} \to Y$, τέτοια ώστε $p = \tilde{p} \circ \pi$. Από την κατασκευή της, η $\tilde{p}$ είναι $1-1$ και επί. Μένει να δείξουμε ότι η $\tilde{p}$ είναι ανοικτή. Έστω $U \subseteq \widetilde{X}$ ανοικτό. Από την υπόθεση, για να δείξουμε ότι το $\tilde{p}(U) \subseteq Y$ είναι ανοικτό, αρκεί να δείξουμε ότι το $p^{-1}(\tilde{p}(U)) \subseteq X$ είναι ανοικτό. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} p^{-1}(\tilde{p}(U)) &= (\tilde{p} \circ \pi)^{-1}(\tilde{p}(U)) \\ &= \pi^{-1}(\tilde{p}^{-1}(\tilde{p}(U))) \\ &= \pi^{-1}(U) \quad (\text{αφού η } \tilde{p} \text{ είναι } 1-1) \end{aligned}$$

το οποίο είναι ανοικτό, αφού η π είναι συνεχής.

Παρατήρηση 4.4.8. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $p : X \to Y$ μία συνεχής και επί συνάρτηση. Αν η p είναι ανοικτή (ή κλειστή) συνάρτηση, τότε, από το Θεώρημα 4.4.7, είναι απεικόνιση πηλίκο. Γενικά, δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή υπάρχουν απεικονίσεις πηλίκο που δεν είναι ούτε ανοικτές ούτε κλειστές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, αν $X = \mathbb{R}$ (με τη συνήθη τοπολογία), $Y = \{0, 1\}$ (με την τοπολογία $\{Y, \emptyset, \{0\}\}$) και $\phi = \chi_{[0,+\infty)}$, η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $[0, +\infty)$. Η ϕ είναι απεικόνιση πηλίκο, αλλά δεν είναι ούτε ανοικτή, ούτε κλειστή, αφού $\phi((0, +\infty)) = \{1\}$ όχι ανοικτό και $\phi((-\infty, -1]) = \{0\}$ όχι κλειστό στο Y.*

Το Θεώρημα 4.4.7 δεν αποτελεί μόνο μία μέθοδο για να εντοπίσουμε ένα χώρο πηλίκο του X, αλλά και μέσα από την απόδειξή του, αποκτούμε ένα διαφορετικό τρόπο προσέγγισης την έννοιας του χώρου πηλίκο. Έστω Z ένα σύνολο και μία επί συνάρτηση $\phi : X \to Z$. Θα θέλαμε να εφοδιάσουμε το Z με τη μεγαλύτερη δυνατή τοπολογία $\mathcal{T}_\phi$, έτσι ώστε η ϕ να είναι συνεχής. Δουλεύοντας, όπως ακριβώς και στην αρχή της παραγράφου, καταλήγουμε στην εξής τοπολογία:

$$\mathcal{T}_\phi = \{U \subseteq Z : \ \phi^{-1}(U) \text{ ανοικτό στο } X\}.$$

Όμως, εύκολα ελέγχει κανείς ότι η τοπολογία $\mathcal{T}_\phi$ καθιστά τη ϕ όχι μόνο συνεχή, αλλά και απεικόνιση πηλίκο, αφού ικανοποιεί την ισοδύναμη συνθήκη του Θεωρήματος 4.4.7. Δηλαδή, ο χώρος $(Z, \mathcal{T}_\phi)$ είναι ομοιομορφικός με ένα χώρο πηλίκο του X, ο οποίος περιγράφεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.7. Για λόγους απλότητας, στο εξής θα λέμε ότι ο $(Z, \mathcal{T}_\phi)$ είναι χώρος πηλίκο του X, που επάγεται από τη συνάρτηση ϕ.

Πρόταση 4.4.9. *Έστω X, Y, Z τοπολογικοί χώροι. Αν ο Y είναι χώρος πηλίκο του X και ο Z είναι χώρος πηλίκο του Y, τότε ο Z είναι χώρος πηλίκο του X. Συγκεκριμένα, αν η τοπολογία πηλίκο του Y επάγεται από μία συνάρτηση $f : X \to Y$ και η τοπολογία πηλίκο του Z επάγεται από μία συνάρτηση $g : Y \to Z$, τότε η $g \circ f : X \to Z$ είναι απεικόνιση πηλίκο.*

Απόδειξη: Για κάθε $U \subseteq Z$ ισχύει η ισότητα $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G)$. Επομένως το G είναι ανοικτό $\iff$ το $g^{-1}(G) \subseteq Y$ είναι ανοικτό $\iff$ το $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G) \subseteq X$ είναι ανοικτό. Άρα η $g \circ f$ είναι απεικόνιση πηλίκο.

Έστω τώρα X τοπολογικός χώρος, Y σύνολο και $\phi : X \to Y$ μία συνάρτηση επί του Y. Σε ένα $A \subseteq Y$ μπορούμε να ορίσουμε τις εξής τοπολογίες:

- τη σχετική τοπολογία $(\mathcal{T}_\phi)_A$, του A ως προς την τοπολογία πηλίκο $\mathcal{T}_\phi$ του Y που επάγεται από τη συνάρτηση ϕ.
- την τοπολογία πηλίκο $\mathcal{T}_{\phi|A}$ του A που επάγεται από τη συνάρτηση $\phi|A := \phi|_{\phi^{-1}(A)} : \phi^{-1}(A) \to A$.

Αφού η συνάρτηση $\phi|A$ είναι συνεχής αν το A έχει εφοδιαστεί με τη σχετική τοπολογία κι αφού η $\mathcal{T}_{\phi|A}$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο A ώστε η $\phi|A$ να είναι συνεχής, έπεται ότι $(\mathcal{T}_\phi)_A \subseteq \mathcal{T}_{\phi|A}$. Γενικά, όμως δεν ισχύει ισότητα.

Πρόταση 4.4.10. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $\phi : X \to Y$ μία συνάρτηση επί του συνόλου Y και $A \subseteq Y$. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) Το A είναι ανοικτό ή κλειστό στο Y (ως προς την τοπολογία πηλίκο $\mathcal{T}_\phi$),

(ii) Η ϕ είναι ανοικτή ή κλειστή,

τότε ισχύει ότι $(\mathcal{T}_\phi)_A = \mathcal{T}_{\phi|A}$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι $(\mathcal{T}_\phi)_A \supseteq \mathcal{T}_{\phi|A}$.

(i) Έστω ότι το A είναι ανοικτό. Έστω $G \subseteq A$ με $G \in \mathcal{T}_{\phi|A}$. Τότε το σύνολο $(\phi|A)^{-1}(G) = \phi^{-1}(G) \cap \phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο $\phi^{-1}(A)$ και αφού το $\phi^{-1}(A)$ είναι ανοικτό στο X, από Παρατήρηση 4.1.5(β), το $\phi^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο X. Συνεπώς, $G \in \mathcal{T}_\phi$ και εφ'οσον $G \subseteq A$, έχουμε ότι $G \in (\mathcal{T}_\phi)_A$. Άρα $\mathcal{T}_{\phi|A} \subseteq (\mathcal{T}_\phi)_A$.

Για την περίπτωση που το A είναι κλειστό εργαζόμαστε ανάλογα.

(ii) Έστω ότι η ϕ είναι ανοικτή συνάρτηση. Έστω $G \subseteq A$ με $G \in \mathcal{T}_{\phi|A}$. Αφού το σύνολο $(\phi|A)^{-1}(G) = \phi^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο $\phi^{-1}(A)$, υπάρχει $U \subseteq X$ ώστε $\phi^{-1}(G) = U \cap \phi^{-1}(A)$. Τότε $G = \phi(U) \cap A$, και αφού η ϕ είναι ανοικτή, το $\phi(U)$ είναι ανοικτό στο Y. Άρα $G \in (\mathcal{T}_\phi)_A$ και συνεπώς $\mathcal{T}_{\phi|A} \subseteq (\mathcal{T}_\phi)_A$.

Για την περίπτωση που η ϕ είναι κλειστή εργαζόμαστε ανάλογα.

Κλείνουμε εισάγοντας ένα συμβολισμό, ο οποίος θα φανεί χρήσιμος στο μέλλον. Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ορίζουμε την εξής διαμέριση

$$\{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{A\},$$

και έστω $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που επάγεται από την παραπάνω διαμέριση. Το χώρο πηλίκο $X/\sim$ θα τον συμβολίζουμε με X/A. Ουσιαστικά, κατά την κατασκευή του X/A όλα τα σημεία του A ταυτίζονται μεταξύ τους.