Βασική άλγεβρα

Δευτέρα 27/10/2014

Ομάδες

1) Ομάδα είναι ένα μη-κενό σύνολο G με μία πράξη

$G \times G \longrightarrow G$ (εσωτερική)

$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 * g_2$ με:

α) $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ προσεταιριστική

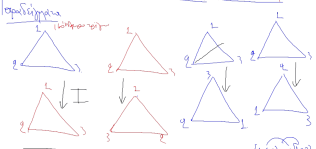
β) $\exists\, e \in G$ με $g * e = e g = g \ \forall g \in G$, e το λέμε ουδέτερο

γ) $\forall \alpha \in G \ \exists\, \alpha' \in G$ με $\alpha \alpha' = \alpha' \alpha = e$ το α' το λέμε "συμμετρικό" του α (συνήθως αντίστροφο ή αντίθετο ανάλογα με την πράξη)

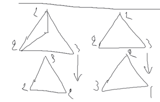
δ) Αν επιπλέον ισχύει $\alpha\beta = \beta\alpha$ στην G τότε η G ονομάζεται αβελιανή ή μεταθετική

Παραδείγματα

ισόπλευρο τρίγωνο



$\{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$



$\{I, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi, \varphi^2\}$

Διεδρική ομάδα D_3

Ομάδα συμμετριών του ισόπλευρου τριγώνου

$\theta_1 \circ \theta_2$: $1 \xrightarrow{\theta_2} 3 \xrightarrow{\theta_1} 2$, $2 \xrightarrow{\theta_2} 2 \xrightarrow{\theta_1} 3$, $3 \xrightarrow{\theta_2} 1 \xrightarrow{\theta_1} 1$

$\theta_2 \circ \theta_1$: $1 \xrightarrow{\theta_1} 1 \xrightarrow{\theta_2} 3$

$\theta_1 \circ \theta_2 = \varphi$

$\theta_2 \circ \theta_1 = \varphi^2$

$\theta_1 \circ \theta_2 \neq \theta_2 \circ \theta_1$

$\theta_1^{-1} = \theta_1$

$\theta_2^{-1} = \theta_2$

$\theta_3^{-1} = \theta_3$

θ_1 : $1 \to 1 \xrightarrow{\theta_1} 1$, $2 \to 3 \longrightarrow 2$, $3 \to 2 \longrightarrow 3$

$\theta_1^2 = \theta_1 \circ \theta_1 = I$

$\varphi \circ (\varphi \circ \varphi) = I$

$\Longrightarrow \varphi^{-1} = \varphi^2$

$(\varphi \circ \varphi)^{-1} = \varphi$

άρα η D_3 είναι μη-αβελιανή ομάδα με 6 στοιχεία

λέμε ότι η D_3 είναι ομάδα τάξης 6 μη-αβελιανή.

Παράδειγμα $(\mathbb{Z}_6, +)$, $\mathbb{Z}_6 = \{0 \pmod 6, 1 \pmod 6, 2 \pmod 6, 3 \pmod 6, 4 \pmod 6, 5 \pmod 6\}$

5 4 3 2 1

$(\mathbb{Z}_6, +)$ αβελιανή ομάδα τάξης 6.

Παράδειγμα $(U(\mathbb{Z}_7), \cdot)$ ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$

$U(\mathbb{Z}_7) = \{1 \pmod 7, 2 \pmod 7, 3 \pmod 7, 4 \pmod 7, 5 \pmod 7, 6 \pmod 7\}$

1 4 5 2 3 6

άρα το $(U(\mathbb{Z}_7), \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα τάξης 6

Παράδειγμα $S_3 = \{\theta : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\},\ 1\text{-}1 \text{ και επί}\}$

1 2 ... ν

1 2 ... ν

ν·

Σημ. Με S_ν συμβολίζουμε την ομάδα των μεταθέσεων $\{1,2,3,\dots,\nu\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,\nu\}$ 1-1 και επί με πράξη τη σύνθεση $|S_\nu| = \nu!$

$|S_3| = 6$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \delta_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \delta_2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \delta_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f^2 = f \circ f$$

$\delta_1 \circ \delta_2 \neq \delta_2 \circ \delta_1$

$\delta_1^{-1} = \delta_1$, $\delta_2^{-1} = \delta_2$, $\delta_3^{-1} = \delta_3$, $f^{-1} = f^2$, $(f^2)^{-1} = f$

$(S_3, \circ)$ μη-αβελ. ομάδα τάξης 6.

Έστω G ομάδα και $\alpha \in G$

Θεωρούμε τα α^1, $\alpha\alpha = \alpha^2$, $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$, …, $\alpha^k = \underbrace{\alpha \cdots \alpha}_{k}$, …

Αν $\alpha^n = e$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε μεταξύ των $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha^n = e$ επιλέγουμε το ελάχιστο.

Το ελάχιστο $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha^n = e$ το λέμε τάξη του στοιχείου α.

Αν δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha^n = e$ λέμε ότι το α έχει <u>άπειρη τάξη</u>

<u>Παραδείγματα</u> $D_3 = \{I, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi, \varphi^2\}$

Τάξη$(I) = 1$

Τάξη$(\theta_1) = 2$ διότι $\theta_1^2 = I$

Τάξη$(\theta_2) = 2$ ″ $\theta_2^2 = I$

Τάξη$(\theta_3) = 2$ ″

Τάξη$(\varphi) = 3$

Τάξη$(\varphi^2) = 3$

<u>Παράδειγμα</u> $(\mathbb{Z}, +)$ Τάξη$(0) = 1$

Τάξη(5) = άπειρο

γενικά Τάξη$(\nu) = \infty$ $\forall \nu \in \mathbb{Z}, \nu \neq 0$

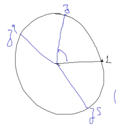
<u>Παράδειγμα</u> $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ Τάξη$(5) = \infty$, $5, 5^2, 5^3, \ldots$ $5^\nu \neq 1$ $\forall \nu$

Τάξη$(-1) = 2$

<u>Παράδειγμα</u> $\mathbb{C}_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\} = \{1, -1, i, -i\}$

Τάξη$(1) = 1$, Τάξη$(-1) = 2$, Τάξη$(i) = 4$, Τάξη$(-i) = 4$

<u>Παράδειγμα</u> $\mathbb{C}_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\} = \{1, \zeta = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5\}$



$\zeta^6 = 1$

Τάξη των στοιχ. της $\mathbb{C}_6$ =;

Τάξη$(1) = 1$

Τάξη$(\zeta) = 6$

Τάξη$(\zeta^2) = 3$

Τάξη$(\zeta^3) = 2$

Τάξη$(\zeta^4) = 3$

Τάξη$(\zeta^5) = 6$

$\zeta^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right)^3 = \cos\frac{2\pi \cdot 3}{6} + i\sin\frac{2\pi \cdot 3}{6}$

$= \cos\pi + i\sin\pi$

<u>Ορισμός</u> Έστω G ομάδα. Αν $\exists\, \alpha \in G \mid G = \{e, \alpha, \alpha^{-1}, \alpha^2, \alpha^{-2}, \ldots, \alpha^\nu, \alpha^{-\nu}, \ldots\}$ η ομάδα λέγεται κυκλική.

<u>Παράδειγμα</u> $(\mathbb{C}_6, \cdot)$, $(\mathbb{C}_4, \cdot)$ είναι κυκλικά

γράφουμε $\mathbb{C}_4 = \langle i \rangle = \langle -i \rangle$

Παράγεται η $\mathbb{C}_4$ από το i ή το $-i$

<u>Παράδειγμα</u> Η $(\mathbb{Z}, +)$ είναι κυκλική διότι

έχουμε $(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$

<u>Παράδειγμα</u> $(\mathbb{Z}_6, +) = \langle 1 \pmod 6 \rangle = \langle 5 \pmod 6 \rangle$

$\cancel{0}, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, 5$

<u>Παράδειγμα</u> $(\mathbb{Z}_4, +) = \{0 \pmod 4, 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4\}$

$= \langle 1 \pmod 4 \rangle = \langle 3 \pmod 6 \rangle$

<u>Παράδ.</u>

$(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ είναι κυκλική ή όχι;

$U(\mathbb{Z}_8) = \{1 \pmod 8, 3 \pmod 8, 5 \pmod 8, 7 \pmod 8\}$

$1 \pmod 8$	$3 \pmod 8$	$5 \pmod 8$	$7 \pmod 8$
τάξη 1	τάξη 2	τάξη 2	τάξη 2

Άρα η ομάδα $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ δεν είναι κυκλική

$(\mathbb{Z}_\nu, +)$, $(U(\mathbb{Z}_\nu), \cdot)$ $\nu \leq 10$