26º Μάθημα

24/4/13

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

① Ορισμός

- (X,Y) διακριτή με σ.π.π. $P_{X,Y}(x,y)$

$P_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y)$ ← Δεσμευμένη σ.π.π. της X δοθ. $Y=y$

$m_{X|Y}(y) = E[X \mid Y=y] = \sum_x x P_{X|Y}(x|y) = \sum_x x P(X=x \mid Y=y)$

Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος $Y=y$ } Αριθμός εξαρτώμενος από το y

- (X,Y) συνεχής με σ.π.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ ← Δεσμευμένη σ.π.π.π. της X δοθ. $Y=y$

$m_{X|Y}(y) = E[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx$

Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος $Y=y$

② Ιδιότητες της $E[X|Y=y]$

Ισχύουν όλες οι ιδιότητες της $E[X]$

π.χ.

$$E[aX+b|Y=y] = a\,E[X|Y=y] + b$$

$$E\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i \,\Big|\, Y=y\Big] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i|Y=y]$$

$$X \geq 0 \implies E[X|Y=y] \geq 0$$

Προσοχή!!! $E[X|Y+Z=w] \neq E[X|Y=w] + E[X|Z=w]$

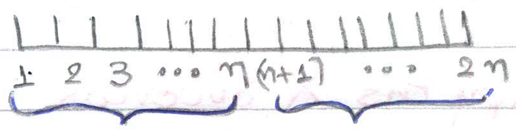
③ Παράδειγμα

$X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(n,p)$

X: # επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli 1,2,...,n με πιθανότητα επιτυχίας p

Y: # επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli n+1,n+2,...,2n με πιθανότητα επιτυχίας p

$$E[X|\underbrace{X+Y}_{Z}=m] = \;;$$



επιτ. στις πρώτες n δοκ. — # επιτ. στις τελευταίες n δοκιμές

X — Y

$$Z = X+Y \sim Bin(2n,p)$$

$$E[X|X+Y=m] = E[X|Z=m] = \sum_x x P_{X|Z}(x|m) =$$

$$= \sum_{x=0}^{m} x\,P(X=x|Z=m) = \sum_{x=0}^{m} x \frac{P(X=x, Y=m-x)}{P(Z=m)}$$

$$= \sum_{x=0}^{m} x \frac{\binom{n}{x}\cancel{p^x}\cancel{(1-p)^{n-x}}\binom{n}{m-x}\cancel{p^{m-x}}\cancel{(1-p)^{n-m+x}}}{\binom{2n}{m}\cancel{p^m}\cancel{(1-p)^{2n-m}}}$$

$$= \sum^{m} \cancel{x}$$

$$= \sum_{x=\cancel{0}\,1}^{m} x \frac{\binom{n}{x}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}} \overset{\text{Hypergeom}(n,2n,m)}{=} \frac{m}{2}$$

$$= \sum_{x=1}^{m} \frac{\cancel{x}\,\frac{n}{\cancel{x}}\binom{n-1}{x-1}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}}$$

$$\underset{y=x-1}{=} \frac{n}{\binom{2n}{m}} \sum_{y=0}^{m-1} \binom{n-1}{y}\binom{n}{m-1-y} \overset{\text{Τύπος Cauchy}}{=} \binom{2n-1}{m-1}$$

$$Z = X+Y \sim \mathrm{Bin}(2n,p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[X \mid X+Y=m] = \frac{n}{\binom{2n}{m}} \binom{2n-1}{m-1}$$

$$= \frac{n}{\frac{2n}{m}\cancel{\binom{2n-1}{m-1}}} \cancel{\binom{2n-1}{m-1}} = \frac{m}{2}$$

4 Παράδειγμα

(X, Y) συνεχής με δ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}$

$x, y > 0$

$E[X|Y=y] = ;$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ ← Δεσμευμένη σ.π.π. της $X|Y=y$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}\,dx$$

$$= e^{-y} \underbrace{\int_0^{\infty} \overbrace{\underset{=\lambda}{\frac{1}{y}} e^{-\frac{x}{y}}}^{\text{σ.π.π. της } Exp\left(\frac{1}{y}\right)} dx}_{1}$$

$\frac{1}{y} = \lambda$

$$f_Y(y) = 1 \cdot e^{-1y}, \quad y > 0 \qquad Y \sim Exp(1)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{y}} \cancel{e^{-y}}}{\cancel{e^{-y}}} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}, \quad x, y \geq 0$$

$$(X|Y=y) \sim Exp\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow E[X|Y=y] = y$$

Διαφορετικά

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}\,dx = y$$

⑤ Δεσμευμένη μέση τιμή δοθείσης τ.μ.

$m_{X|Y}(y) = E[X|Y=y]$: Δεσμευμένη μέση τιμή της X $\underbrace{\text{δοθέντος ότι } Y=y}_{\text{αριθμός εξαρτ. από το } y}$

$E[X|Y] = m_{X|Y}(Y)$: Δεσμευμένη μέση τιμή της X $\underbrace{\text{δοθείσης της } Y}_{\text{τ.μ. συνάρτηση της } Y}$

⑥ Θεώρημα διπλής μέσης τιμής

$$E[X] = E[E[X|Y]] = E[m_{X|Y}(Y)] =$$

$$= \begin{cases} \sum_y E[X|Y=y]\, P_Y(y) & , Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\uparrow \atop m_{X|Y}(y)}{E[X|Y=y]}\, f_Y(y)\, dy & , Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

7 Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης: ◦ Ρίχνω ζάρι
◦ Ρίψη νομίσματος όσες φορές δείξει το ζάρι

$X = \#$ κεφαλιών στις ρίψεις

$E[X] = ;$

$P[X=x]$ ⟷ Δύσκολο

$E[X] = \sum_x x P[X=x]$

Y = αριθμός που έφερε το ζάρι

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{y=1}^{6} E[X|Y=y]\, P[Y=y] \quad (1)$$

Όμως $P[Y=y] = \frac{1}{6}$, $y = 1, 2, \ldots, 6$ (2)

$(X|Y=y) \sim Bin(y, \frac{1}{2})$

$\Downarrow$

$E[X|Y=y] = y \cdot \frac{1}{2} = \frac{y}{2}$ (3)

Άρα από (1), (2), (3) $\Rightarrow E[X] = \sum_{y=1}^{6} \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \sum_{y=1}^{6} y = \frac{1}{12} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$

⑧ Παράδειγμα (Μέση Τιμή Γεωμετρικής)

Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας P

X = # δοκιμών μέχρι την $1^{η}$ επιτυχία

$X \sim Geom(p)$

$P(X=x) = (1-p)^{x-1} \cdot p \quad , x \geq 1$

$\Downarrow$

$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \; ; = \frac{1}{p}$

Y = Αποτέλεσμα της $1^{ης}$ δοκιμής $\left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow \text{επιτυχία} \\ 0 \rightarrow \text{αποτυχία} \end{array} \right)$

$E[X] = \sum_{y} E[X|Y=y] P[Y=y]$

$= \underbrace{P[Y=0]}_{1-p} \underbrace{E[X|Y=0]}_{1+E[X]} + \underbrace{P[Y=1]}_{p} \underbrace{E[X|Y=1]}_{1}$

(Μετά από κάθε επιτυχία το πείραμα αναγεννάται)

$= (1-p) \cdot (1+E[X]) + p \cdot 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \cdot E[X] = 1 \Leftrightarrow E[X] = \frac{1}{p}$

① Παράδειγμα

Ένας φυλακισμένος

3 πόρτες:
- $1^{η}$ Άμεση Ελευθερία
- $2^{η}$ Πίσω στο κελί σε 3 μέρες
- $3^{η}$ — // — — // — 10 μέρες

Αν πίσω στο κελί, διαλέγει ξανά στην τύχη.

$X =$ χρόνος ως την ελευθερία

$E[X] = ;$

$$P[X=0] = \frac{1}{3}$$

$$P[X=1] = P[X=2] = 0$$

$$P[X=3] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

(Διαλέγεις πρώτα την $2^{η}$ πόρτα κ' μετά την $1^{η}$)

$$P[X=4] = P[X=5] = 0$$

$$P[X=6] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

$$P[X=30] = \ldots$$

Άρα $P[X=x]$ δύσκολο

$$E[X] = \sum_x x P[X=x]$$

Έστω Y η πόρτα που διαλέγει αρχικά

$$E[X] = \sum_y E[X|Y=y]\, P[Y=y]$$

$$E[X] = \underbrace{P[Y=1]}_{1/3}\cdot\underbrace{E[X|Y=1]}_{0} + \underbrace{P[Y=2]}_{1/3}\cdot\underbrace{E[X|Y=2]}_{3+E[X]} + \underbrace{P[Y=3]}_{1/3}\underbrace{E[X|Y=3]}_{10+E[X]}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(3+E[X]) + \frac{1}{3}\cdot(10+E[X]) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}E[X] = \frac{13}{3} \Leftrightarrow E[X] = 13$$

26/4/13 27º Μάθημα

Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής και Εφαρμογές

① Θεώρημα

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \begin{cases} \sum_y P[Y=y]\,E[X|Y=y], & Y \text{ διακρ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,E[X|Y=y], & Y \text{ συνεχή} \end{cases}$$

Απόδειξη (X,Y διακριτές)

$$\sum_y P[Y=y]\,E[X|Y=y] = \sum_y P[Y=y] \underbrace{\sum_x x P[X=x|Y=y]}_{E[X|Y=y]}$$

$$= \sum_y \sum_x x \underbrace{P[Y=y]P[X=x|Y=y]}_{P[Y=y,X=x] = P_{X,Y}(x,y)}$$

$$= \sum_x x \underbrace{\sum_y p_{X,Y}(x,y)}_{P_X(x)} = E[X]$$

② Υπολογισμός μέσου πλήθους ρίψεων νομίσματος για παρατήρηση ακολουθίας συμβόλων.

Δίκαιο νόμισμα $\begin{pmatrix} K \to 1/2 \\ \Gamma \to 1/2 \end{pmatrix}$

$X_1 = \#$ ρίψεων μέχρι ΚΚ

$X_2 = \#$ ρίψεων μέχρι ΚΓ

$E[X_1] = ;$

$E[X_2] = ;$

$X = \#$ ρίψεων μέχρι Κ

$\sim Geom(1/2)$

$P[X=x] = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad , x = 1, 2, \ldots$

$E[X] = 2$

$Y_1 = \begin{cases} 1 & , \text{η } 1^{\eta} \text{ ρίψη Κ} \\ 0 & , \text{η } 1^{\eta} \text{ ρίψη Γ} \end{cases} \qquad Y_2 = \begin{cases} 1 & , \text{η } 2^{\eta} \text{ ρίψη Κ} \\ 0 & , \text{η } 2^{\eta} \text{ ρίψη Γ} \end{cases}$

$$E[X_1] = P(K)\, E[X_1|K] + P(\Gamma) \cdot E[X_1|\Gamma]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \underbrace{E[X_1|KK]}_{2} + \frac{1}{2} \underbrace{E[X_1|K\Gamma]}_{2+E[X_1]}\right) + \frac{1}{2} \underbrace{E[X_1|\Gamma]}_{1+E[X_1]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E[X_1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} E[X_1] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[X_1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} E[X_1] = \frac{3}{2} \Rightarrow E[X_1] = 6$$

$X_2 = \#$ ρίψεων ως ΚΓ

$$E[X_2] = P(K) \cdot E[X_1|K] + P(\Gamma)\, E[X_2|\Gamma] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 + E[\text{Να έρθουν } \Gamma]) + \frac{1}{2}(1 + E[X_2]) = \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{2}(1 + E[X_2])$$

$$\Leftrightarrow E[X_2] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[X_2] \Rightarrow E[X_2] = 4$$

③ Παράδειγμα

κότα γεννάει N αυγά

$N \sim Poisson(\lambda)$.

καθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα p

---

$(K|N=n) \sim Bin(n,p)$

$$P(N=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n=0,1,\dots$$

$$P(K=k|N=n) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n.$$

$$E[K|N=n] = \sum_k k P[K=k|N=n] = np$$

$$E[N|K=k] = \sum_{n=k}^{\infty} n P[N=n|K=k] = \sum_{n=k}^{\infty} n \frac{P[N=n,K=k]}{P(K=k)} \quad ①$$

$$P[N=n,K=k] = P[N=n]\,P[K=k|N=n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad ②$$

$$P[K=k] = \sum_{n=k}^{\infty} P[K=k, N=n] = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}(1-p)^n$$

$$\overset{j=n-k}{=\!=} e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!\cancel{(1-p)^k}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+j}}{j!}(1-p)^{\cancel{k+j}}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}$$

$$= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \quad ③, \quad k=0,1,\dots$$

$(K \sim Poisson(\lambda p))$

Άρα ① $\xRightarrow[③]{②}$ $E[N|K=k] = \sum_{n=k}^{\infty} \dfrac{n \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}{e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}} =$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}\frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}(n-k)!}\cancel{p^k}(1-p)^{n-k}}{e^{-\lambda p}\frac{(\lambda \cancel{p})^k}{\cancel{k!}}}$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \sum_{n=k}^{\infty} n \frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\overset{j=n-k}{=} e^{-\lambda(1-p)} \sum_{j=0}^{\infty} (k+j)\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

$$= k \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} + \lambda(1-p) = k + \lambda(1-p)$$

$E[K] = \lambda p$

④ Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης

Διαδοχικές Ρίψεις (ανεξάρτητες) νομίσματος

$$\begin{pmatrix} P(K) = p \\ P(\Gamma) = 1-p \end{pmatrix}$$

$E[T_r] = ;$

T_r = # ρίψεων ώσπου να δούμε r συνεχόμενες "Κ"

π.χ. $r=4$

Κ Γ Γ Κ Κ Γ Κ Κ Γ Γ Γ Γ Γ Κ Κ Γ $\boxed{\text{Κ Κ Κ Κ}}$ Γ Κ Γ Γ Κ Γ Κ

$1^{ος}$ Τρόπος Δέσμευση στον αριθμό ρίψεων που έρχονται "Γ" για πρώτη φορά

$$E[T_r] = \sum_{x=1}^{\infty} P[X=x]\, E[T_r \mid X=x]$$

Όμως $P[X=x] = p^{x-1}(1-p) \quad , x \geq 1$

$$E[T_r \mid X=x] = \begin{cases} r & , x \geq r+1 \\ x + E[T_r] & , 1 \leq x \leq r \end{cases}$$

Άρα $E[T_r] = \sum_{x=1}^{r} p^{x}(1-p)\,(x + E[T_r]) + \sum_{x=r+1}^{\infty} p^{x-1}(1-p)\, r$

$\Leftrightarrow E[T_r] = \ldots$

$2^{ος}$ Τρόπος

$$E[T_r] = E[\,E[T_r \mid T_{r-1}]\,] = \sum_{x} P[T_{r-1}=x]\, E[T_r \mid T_{r-1}=x]$$

$$E[T_r \mid T_{r-1}=x] = p(x+1) + (1-p)(x+1+E[T_r])$$
$$= x+1+(1-p)E[T_r]$$

Άρα $E[T_r] = \sum_{x} P[T_{r-1}=x]\,(x+1+\overset{(1-p)\cdot}{}E[T_r])$

$= E[T_{r-1}] + 1 + (1-p)\,E[T_r] \Rightarrow$

$\Rightarrow E[T_r] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} E[T_{r-1}] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} E[T_{r-2}]\right)$

$= \ldots = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^r}$

⑤ Μέση τιμή Τυχαίου Αθροίσματος Τυχαίων Μεταβλητών

$X_1, X_2, X_3, \dots$ ανεξάρτητοι και ίσου τ.μ.
με $E[X_i] = \mu_x$
N τ.μ. ακέραια ≥ 0, ανεξ. των X_i με $E[N] = \mu_N$

Προσοχή!

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] \neq \sum_{i=1}^{N} E[X_i] = N \cdot \mu_x \quad \text{για } N \text{ τ.μ.}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right]\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[N=n]\, E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[N=n] \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$= E[N]\, \mu_x$$

$$= \mu_N \cdot \mu_x$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]\, \mu_x$$