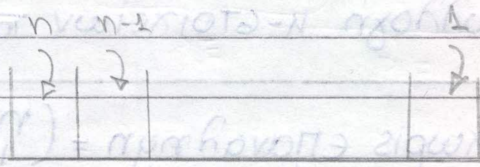
18/9/13

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΓΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Μεταθέσεις



$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$

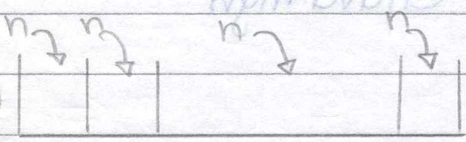
Μετάθεση του Ω είναι κάθε τοποθέτηση των στοιχείων του σε σειρά.

$\boxed{\#\ \text{μεταθέσεων } n \text{ στοιχείων} = n!}$

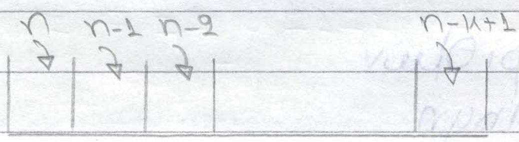
2. Διατάξεις

$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \rightarrow$ Διάταξη του Ω, n ανά k, $a_i \in \Omega$



$\boxed{\#\ \text{διατάξεων } n \text{ ανά } k \text{ με επανάληψη} = n^k}$



$\boxed{\#\ \text{διατάξεων } n \text{ ανά } k \text{ χωρίς επανάληψη} = \frac{n!}{(n-k)!}}$

3. Συνδυασμοί

$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$

$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $a_i \in \Omega$, συλλογή κ-στοιχείων του Ω μη διατεταγμένα.

$\boxed{\#\text{ συνδυασμών } n \text{ ανά } k \text{ χωρίς επανάληψη} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

$\boxed{\#\text{ συνδυασμών } n \text{ ανά } k \text{ με επανάληψη} = \left[{n \atop k}\right] = \binom{n+k-1}{k}}$

Απόδειξη

$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \xrightarrow{\cdot k!}$ Διαφορετικές διατάξεις

↳ συνδυασμός χωρίς επανάληψη

$\#$ συνδυασμών χωρίς επανάληψη $\times\, k! = \#$ διατάξεων χωρίς επανάληψη $= \frac{n!}{(n-k)!}$

4. Παράδειγμα

Παιχνίδι Λόττο

Συμπλήρωση δελτίου 6 αριθμών

1 2 3 ...

... 49

Κλήρωση 6 αριθμών
χωρίς επανάληψη

↕

Δελτίο Κλήρωσης

P(εξάρι) = ;

P(πεντάρι) = ;

Η κλήρωση γίνεται σειριακά αλλά δεν με ενδιαφέρει η σειρά.

Δειγματικός χώρος = Σύνολο αποτελεσμάτων κλήρωσης = Διατάξεις 49 ανά 6 χωρίς επανάληψη

$P(\text{εξάρι}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{6!}{(49)_6} = \frac{6!}{\frac{49!}{43!}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

$P(\text{πεντάρι}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{\binom{6}{5} 43 \cdot 6!}{(49)_6} = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}$

▶ Αν το Λόττο παιζόταν με επανάληψη τότε αναγκαστικά θα χρησιμοποιήσω διατάξεις.

$\{1,1,1,1,1,1\} \longleftarrow$ πιθανότητα $= \frac{1}{49^6}$

$\{1,2,3,4,5,6\} \longleftarrow$ πιθανότητα $= \frac{6!}{49^6}$

όχι ισοπίθανοι οι συνδυασμοί, οι διατάξεις είναι ισοπίθανες.

Παραδείγματα - Ασκήσεις

5. Το πρόβλημα των γενεθλίων

Να βρεθεί το ελάχιστο n ώστε "$P_n = P(n)$ = P(να υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα μεταξύ των n με γενέθλια την ίδια μέρα) $\geq 0,5$

$P_n = 1 - P$(σε n άτομα, όλα να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές ημέρες)

$= 1 - \frac{(365)_n}{365^n}$, $n \leq 365$

$(365)_n = 365 \cdot 364 \cdot \ldots (365-n+1)$

n	P_n
20	0.411
23	0.507
⋮	
50	0.970

6. Παράδειγμα

Ρίψη ζαριού 2 φορές

P(1η ρίψη άρτια)

P(1η ρίψη < 2η ρίψη)

P(μεγαλύτερη ρίψη = κ)

P(απόλυτη διαφορά ρίψεων ≤ κ)

Δειγματικος χώρος $= \{(i,j) : 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6\}$

$|\Omega| = 36$

$P(1^{\eta}\text{ ρίψη άρτια}) = \frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 6}{36}$

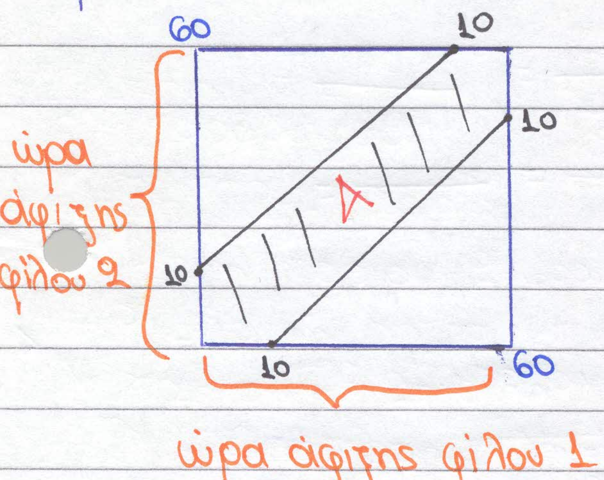
$P(1^{\eta}\text{ ρίψη} < 2^{\eta}\text{ ρίψη}) = \frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36}$

$P(\text{μεγαλύτερη ρίψη} = \kappa) = \frac{\kappa^2 - (\kappa-1)^2}{36} = \frac{2\kappa - 1}{36}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, 6$

$P(\text{απόλυτη διαφορά ρίψεων} \le \kappa) = \frac{\overset{0}{6} + 2\cdot\overset{1}{5} + 2\cdot\overset{2}{4} + \dots + 2(6-\kappa)}{36}, \quad 0 \le \kappa \le 5$

7. Παράδειγμα

Δυο φίλοι λένε να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι. Ποια είναι η πιθανότητα να μη στηθεί κανένας παραπάνω από 10'.



Δειγματικός χώρος

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 60,\ 0 \leq y \leq 60\}$$

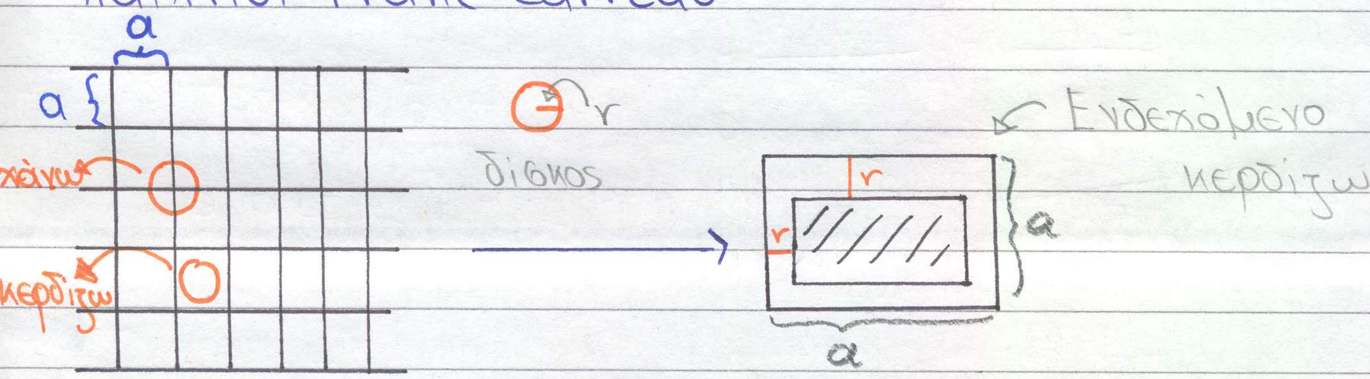
$$A = \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 60,\ |x-y| \leq 10\}$$

$$P(A) = \frac{\text{Εμβαδόν } A}{\text{Εμβαδόν } \Omega} = \frac{3600-2500}{3600} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$$

$$(x,y) \in A \Rightarrow |y-x| \leq 10 \Leftrightarrow x-10 \leq y \leq x+10.$$

8. Παράδειγμα

Παιχνίδι Franc-Carreau



Ω: Δειγματικός χώρος = τετράγωνο πλευράς a

$$P(\text{κερδίζω}) = \frac{\text{Εμβαδό ενδεχ. κερδίζω}}{\text{Εμβαδό } \Omega} = \frac{(a-2r)^2}{a^2}$$

Τυχαία ρίψη του κέντρου του δίσκου.