28ο Μάθημα

Ασκήσεις (από το φυλλάδιο, με τον κ. Χελιώτη)

(1) Σε πόλη $(n+1)$ ατόμων ένα άτομο επιλέγει τυχαία ένα από τα υπόλοιπα και λέει μία φημολογία. Το δεύτερο άτομο κάνει το ίδιο, και η διαδικασία συνεχίζεται όμοια.
Να βρεθούν οι πιθανότητες:
(α) η φημολογία να επωθεί r φορές χωρίς να γυρίσει σε αυτόν που την άρχισε.
(β) η φημολογία να επωθεί r $(\leq n)$ φορές χωρίς να ακουστεί από άτομο που την ξέρει ήδη.

ΛΥΣΗ

(α) $\dfrac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}} = \dfrac{n(n-1)^{r-1}}{n^r}$ (από πολλ. αρχή)

(β) $\dfrac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = \dfrac{(n)_r}{n^r}$

② Σε ένα ράφι τοποθετούνται με τυχαία σειρά

6 Βιβλία Μαθηματικών
4 Βιβλία Φυσικής
3 Βιβλία Ιστορία
7 Βιβλία ξένων γλωσσών
10 Λεξικά (δηλ. 30 Βιβλία)

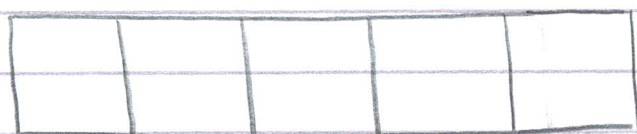
Ποια η πιθανότητα όλα τα Βιβλία του ίδιου είδους να τοποθετηθούν μαζί;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Δυνατοί τρόποι $= 30!$

Ευνοϊκοί τρόποι $= \underset{\text{καθορισμός σειράς θεμάτων}}{5!}\ \underset{\text{Μαθ.}}{6!}\ \underset{\text{Φυσ.}}{4!}\ \underset{\text{Ιστ.}}{3!}\ \underset{\text{Ξ.Γ.}}{7!}\ \underset{\text{Λεξικά}}{10!}$

Πιθανότητα $= \dfrac{5!\,6!\,4!\,3!\,7!\,10!}{30!}$



Μαθ. Φυσ. Ιστ. Ξ.Γ. Λεξικοί

← Μια δυνατή τοποθέτηση των Βιβλίων

(3) Σε ένα διαγωνισμό παίρνουν μέρος n ζευγάρια. Αν πρόκειται να απονεμηθούν τυχαία στους $2n$ διαγωνιζόμενους n βραβεία, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει βραβείο ακριβώς ένα από τα δύο άτομα σε κάθε ζευγάρι.

ΛΥΣΗ

2 επιλογές για κάθε ζευγάρι.

$$\frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$$

(4) Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n φορές. $(n \geq 2)$
Να βρεθούν οι πιθανότητες:
α) να εμφανισθεί το 6 τουλάχιστον 2 φορές.
β) να εμφανισθεί το 6 τουλάχιστον 2 φορές και να μην εμφανισθεί καθόλου το 1.

(Έχει μπει σε εξετάσεις)

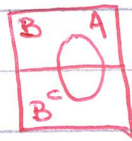
ΛΥΣΗ

α) Έστω X = ο αριθμός εμφανίσεων του 6 στις n ρίψεις.

$(P(B) = P(\Omega) - P(B^c))$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1)\right) = 1 - \left(\frac{5^n}{6^n} + \frac{5^{n-1} \cdot n}{6^n}\right)$$

β) $A = \{\text{δεν εμφανίζεται το } 1\}$, $B = \{X \geq 2\}$



$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$ ($A \cap B$, $A \cap B^c$ είναι ξένα με ένωση το A)

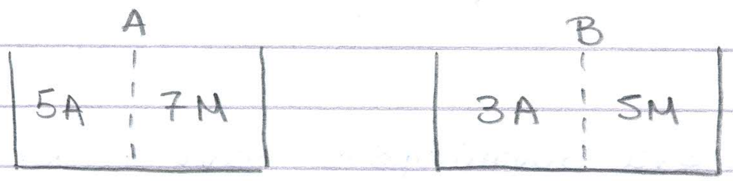
$P(A) = \frac{5^n}{6^n}$

$$P(A \cap B^c) = P(A \cap (\{X=0\} \cup \{X=1\})) = P((A \cap \{X=0\}) \cup (A \cap \{X=1\})) =$$
$$= P(A \cap \{X=0\}) + P(A \cap \{X=1\}) = \frac{4^n}{6^n} + \frac{n 4^{n-1}}{6^n}$$

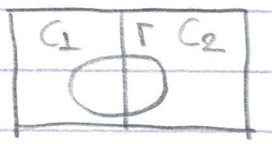
Θεώρημα ολικής πιθανότητας → Για πειράματα που γίνονται σε δύο ή περισσότερα βήματα

(5) Μια κάλπη Α περιέχει 5 άσπρα και 7 μαύρα σφαιρίδια. Μια κάλπη Β περιέχει 3 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την Α και το τοποθετούμε στην Β. Έπειτα επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την Β. Ποια η πιθανότητα το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι άσπρο;

ΛΥΣΗ



Έστω C_1 = {το σφαιρίδιο που επιλέγω από την Α είναι άσπρο}.



C_2 = {το σφαιρίδιο που επιλέγω από την Α είναι μαύρο}.

Γ = {το δεύτερο σφαιρίδιο είναι άσπρο}.

$$
\begin{aligned}
P(\Gamma) &= P(\Gamma \cap C_1) + P(\Gamma \cap C_2) \\
&= P(C_1)\cdot P(\Gamma | C_1) + P(C_2) P(\Gamma | C_2) \\
&= \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{9} + \frac{7}{12}\cdot\frac{3}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(A\cap B) &= P(A)\cdot P(B|A) \\
&= P(B)\cdot P(A|B)
\end{aligned}
$$

6) Μια κάλπη περιέχει 6 λάμπες τύπου A και
4 λάμπες τύπου B.

(Έχει μπει παρόμοια σε εξετάσεις)

Ο χρόνος ζωής μιας λάμπας τύπου A ακολουθεί την κατανομή $\exp\left(\frac{1}{3}\right)$

Ο χρόνος ζωής μιας λάμπας τύπου B ακολουθεί την κατανομή $\exp\left(\frac{1}{20}\right)$

Επιλέγουμε από το κουτί μία λάμπα στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει χρόνο ζωής ≥ 10.

__ΛΥΣΗ__

Αν $X \sim Exp(\lambda)$ τότε $P(X \geq x) = \int_x^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda x}$ (*)

Έστω W ο χρόνος ζωής της λάμπας που επιλέγουμε

$C_1 = \{$επιλέγουμε λάμπα τύπου A$\}$
$C_2 = \{$επιλέγουμε λάμπα τύπου B$\}$

$$
\begin{aligned}
P(W \geq 10) &= P(\{W \geq 10\} \cap C_1) + P(\{W \geq 10\} \cap C_2) \\
&= P(C_1) \cdot P(W \geq 10 \mid C_1) + P(C_2) P(W \geq 10 \mid C_2) \\
&= \frac{6}{10} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{3} \cdot 10}}_{\text{λόγω } (*)} + \frac{4}{10} \underbrace{e^{-1/20 \cdot 10}}_{\text{λόγω } (*)}
\end{aligned}
$$

7 Το συρτάρι Σ_1 περιέχει 3 χρυσά κ' 3 αργυρά νομίσματα
— " — Σ_2 — " — 3 — " — 6 — " — " —

Κλέφτης ανοίγει στην τύχη (στα σκοτεινά) ένα συρτάρι και παίρνει 2 νομίσματα
(α) Ποια η πιθανότητα να είναι και τα 2 χρυσά;
(β) Αν κατά τη σύλληψή του διαπιστωθεί ότι έχει κλέψει δύο χρυσά νομίσματα, ποια είναι η πιθανότητα να έχει ανοίξει το συρτάρι Σ_1;

ΛΥΣΗ

(α) Έστω B το ενδεχόμενο να πήρε δύο χρυσά νομίσματα και A το ενδεχόμενο να ανοίξει το Σ_1.
και

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A^c)$$
$$= P(A)\cdot P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{17}{120}$$

(β) $$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \overset{\text{Τύπος Bayes}}{=} \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}}{\frac{17}{120}}$$

ερώτημα (α)

$$= \frac{12}{17} \quad \left(> \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{Τύπος Bayes} \to \text{Ανάποδη χρονική εξάρτηση}}$$

(με τον κ. Χελιώτη) 29ο Μάθημα 15/5/13

(3) Από κάλπη που περιέχει κλήρους $\{1, 2, \ldots, n\}$ εξάγονται χωρίς επανάθεση k κλήροι $(k \le n)$
Έστω X ο μεγαλύτερος αριθμός που εξάγεται.
Να υπολογιστούν:
(α) η συνάρτηση πιθανότητας της X
(β) η $E[X]$

(Από το φυλλάδιο της e-class)

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η X παίρνει τιμές $k, k+1, \ldots n$
Για $r \in \{k, k+1, \ldots, n\}$

$$f_X(r) = P(X=r) = P(X \le r) - P(X \le r-1)$$

$$= \frac{(r)_n}{(n)_k} - \frac{(r-1)_k}{(n)_k}$$

$$= \frac{r\cdot(r-1)\cdots(r-k+1) - (r-1)\cdots(r-1-k+1)}{(n)_k}$$

$$= \frac{r\cdot(r-1)\cdots(r-k+1) - (r-1)\cdots(r-1+1)(r-k)}{(n)_k}$$

$$= \frac{(r-1)\cdots(r-k+1)\cdot(r-r+k)}{(n)_k} = \frac{k(r-1)_{k-1}}{(n)_k}$$

<u>Άρα</u>
$$f_X(r) = \begin{cases} \dfrac{k(r-1)_{k-1}}{(n)_k} & \text{αν } r \in \{k, k+1, \ldots n\} \\ 0 & \text{αν } r \in \mathbb{R} \setminus \{k \ldots n\}. \end{cases}$$

(β) $$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x) = \sum_{r=k}^{n} r \frac{k(r-1)_{k-1}}{(n)_k} = \cdots = \frac{k}{k+1}(n+1)$$

3 f) Έστω X διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας

(Από το φυλλάδιο στο e-class)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} & , \text{αν } x \in \mathbb{N}\setminus\{0\} = \{1,2,\ldots\} \\ 0 & , \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus(\mathbb{N}-\{0\}) \end{cases}$$

Για ποια $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $E[X^a] < \infty$;

ΛΥΣΗ

$$E[X^a] = \sum_{x=1}^{\infty} x^a f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^a}{x(x+1)}$$

Η τελευταία σειρά έχει την ίδια συμπεριφορά με την $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^a}{x^2}$

$$\left(\text{κριτήριο σύγκρισης} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^a}{x(x+1)}}{\frac{x^a}{x^2}} = 1 \right)$$

Δηλαδή την $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2-a}}$

Αυτή έχει άθροισμα $< \infty$ αν και μόνο αν $2-a > 1$.

Δηλ. $a < 1$

4.3 Ένας σκοπευτής ρίχνει 10 βολές προς ένα στόχο. Η πιθανότητα να πετύχει 4 φορές είναι τριπλάσια της πιθανότητας να πετύχει 3.
Να υπολογιστεί η ευστοχία του σκοπευτή, δηλαδή η πιθανότητα να πετύχει στόχο σε μία δεδομένη βολή.

ΛΥΣΗ

Έστω p η ευστοχία του σκοπευτή και
X ο αριθμός επιτυχιών στις 10 βολές.
Δίνεται ότι $P(X=4)=3P(X=3)$ (*)

$X \sim Bin(10,p)$

Άρα η (*) $\Leftrightarrow \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = 3\binom{10}{3} p^3 (1-p)^7 = 0 \Rightarrow$

$Bin(n,p)=P(X=k)$
$=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\dfrac{1-p}{p} = \dfrac{\binom{10}{4}}{3\binom{10}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{p} - 1 = \dots \Leftrightarrow p = \dfrac{12}{19}$

Συνέχεια της άσκησης:
Να υπολογισθούν οι πιθανότητες σε 5 βολές να πετύχει στόχο.
(α) Δύο τουλάχιστον φορές.
(β) ή όλες ή καμία φορές
(γ) το πολύ 4 φορές αν είναι γνωστό ότι πέτυχε τουλάχιστον 2

ΛΥΣΗ

(α) $P(r \geq 2) = 1 - P(r<2) = 1 - P(r=0) - P(r=1)$
$= 1 - (1-p)^5 - \binom{5}{1} p (1-p)^4$

(β) $P(r=5 \text{ ή } r=0) = P(r=5) + P(r=0) = p^5 + (1-p)^5$

(γ) $P(r \leq 4 \mid r \geq 2) = \dfrac{P(r \leq 4 \text{ και } r \geq 2)}{P(r \geq 2)}$

$= \dfrac{P(r=2)+P(r=3)+P(r=4)}{P(r \geq 2)}$ ← ερώτημα (α)

5.5 Έστω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

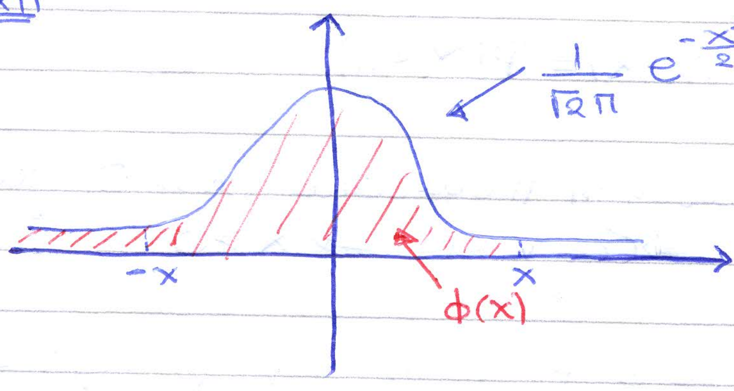
Αν $P(X>1{,}85)=0{,}2$ και $P(X>1{,}7)=0{,}9$

να βρεθούν τα μ, σ^2.

Δίνεται ότι $\Phi^{-1}(0{,}8)=0{,}85$ $\quad \Phi^{-1}(0{,}9)=1{,}29$

ΛΥΣΗ

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ← πυκνότητα της $N(0,1)$



$\Phi(x)+\Phi(-x)=1$

Η $Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$0{,}9 = P(X>1{,}7) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{1{,}7-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{1{,}7-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{1{,}7-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{1{,}7-\mu}{\sigma}\right) \xRightarrow{\Phi^{-1}(0{,}9)=1{,}29}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu-1{,}7}{\sigma} = 1{,}29$$

$$0{,}2 = P(X>1{,}85) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{1{,}85-\mu}{\sigma}\right) = 1-\Phi\left(\frac{1{,}85-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{1{,}85-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \xRightarrow[\Phi^{-1}(0{,}8)=0{,}85]{} \frac{1{,}85-\mu}{\sigma} = 0{,}85$$

Βρίσκουμε $\mu \simeq 1{,}79$, $\sigma \simeq 0{,}07$

5.17

SOS

Έστω $\theta>0$.

Υποθέτουμε ότι $U \sim U(0,1)$

(α) Δείξτε ότι τ.μ. $X = -\frac{1}{\theta}\log U \sim \exp(\theta)$

(β) Βρείτε την πυκνότητα της $Y = \log\frac{U}{1-U}$

ΛΥΣΗ

(α) Για $x \in \mathbb{R}$ $F_X(x) = P(X \le x)$

- Αν $x \le 0$ αυτή η πιθανότητα είναι 0 γιατί $U \in (0,1) \Rightarrow \log U < 0 \Rightarrow X > 0$

- Αν $x>0$, τότε $P(X\le x) = P\left(-\frac{1}{\theta}\log U \le x\right) =$

$= P(\log U \ge -\theta x) = P\left(U \ge e^{-\theta x}\right) = \int_{e^{-\theta x}}^{1} 1\, dt = 1 - e^{-\theta x}$

Άρα $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x\le 0 \\ 1-e^{-\theta x} & , x>0 \end{cases}$

και $f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & , x\le 0 \\ \theta e^{-\theta x} & , x>0 \end{cases}$

Άρα $X \sim \exp\theta$

(β) Για $x\in\mathbb{R}$,

$(1+e^x)>0$

$F_Y(x) = P\left(\log\frac{U}{1-U} \le x\right) = P\left(\frac{U}{1-U} \le e^x\right) = P\left(U \le \frac{e^x}{e^x+1}\right) =$

$= F_U\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow F_Y'(x) = F_U'\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\cdot\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' = f_U\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\cdot\frac{e^x(e^x+1)-e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Άρα Y έχει πυκνότητα $f_Y(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

5.15 $X \sim exp(\lambda)$. Ποια η κατανομή της $Y[X]$;

ΛΥΣΗ

Η Y είναι διακριτή τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Για $k \in \mathbb{N}$.

$$f_Y(x) = P(Y = k) = P([X] = k) = P(k \leq X \leq k+1)$$

$$= \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda s} ds = -e^{-\lambda s}\Big|_k^{k+1} = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}$$

$$= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) = (e^{-\lambda})^k (1 - e^{-\lambda})$$

Άρα $$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ (e^{-\lambda})^k (1 - e^{-\lambda}) & \text{αν } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Καθορίζουμε την κατανομή μιας τ.μ. X δίνοντας την συνάρτηση κατανομής F_X ή την f_X.
(η οποία είναι σ. πιθανότητας αν X διακριτή και συν. πυκνότητας αν X συνεχής)

17/5/13

Ασκήσεις

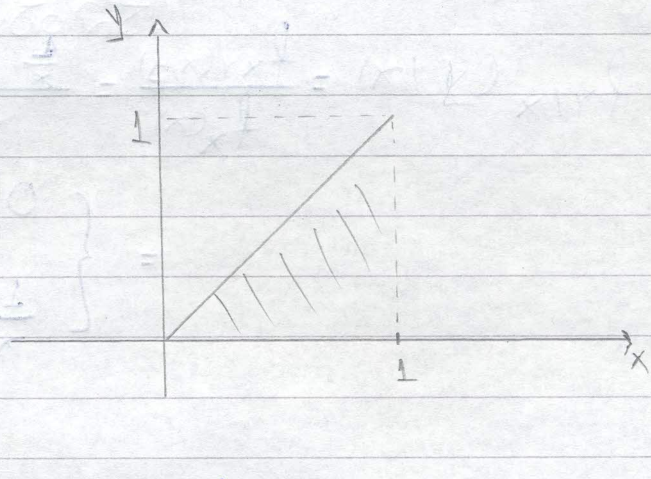
1. Ασκηση 6.6

X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{αν } 0<y<x<1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Να δείξετε ότι πράγματι η f είναι πυκνότητα.
(β) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X/Y}(\cdot/y)$, $f_{Y/X}(\cdot/x)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχουν νόημα.

Λύση



(α) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$

$= \int_0^1\int_0^x \frac{1}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$= \int_0^1 1\,dx = 1$

Επίσης ≥ 0. Άρα η f είναι πυκνότητα.

(β) Για $y \in \mathbb{R}$ $\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{για } y \in \mathbb{R}\setminus(0,1) \\ \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = -\log y & \text{για } y \in (0,1) \end{cases}$

Άρα $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in \mathbb{R}\setminus(0,1) \\ -\log y, & y \in (0,1) \end{cases}$

Άρα $f_{X/Y}(\ /y)$ ορίζεται ακριβώς για τα $y \in (0,1)$
(δηλαδή εκείνα που $f_Y(y) \neq 0$).

και $f_{X/Y}(x/y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{\frac{1}{x} 1_{0<y<x<1}}{-\log y}$

$$= \begin{cases} 0 , & x \in \mathbb{R} \setminus (y,1) \\ -\dfrac{1}{x\log y} , & x \in \mathbb{R}(y,1) \end{cases}$$

Όμοια $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 , & x \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \\ \int_0^x \frac{1}{x}\,dy = 1 , & x \in (0,1) \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 , & x \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \\ 1 , & x \in (0,1) \end{cases}$$

Άρα $f_{Y/X}(\ /x)$ ορίζεται ακριβώς για τα $x \in (0,1)$
(δηλαδή εκείνα που $f_X(x) \neq 0$)

και $f_{Y/X}(y/x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{\frac{1}{x} 1_{0<y<x<1}}{1}$

$$= \begin{cases} 0 , & y \in \mathbb{R} \setminus (0,x) \\ \dfrac{1}{x} , & y \in (0,x) \end{cases}$$

2. Άσκηση 7.2

Έστω X, Y τ.μ. με από κοινού πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} -xy, & \text{αν } (x,y) \in \underbrace{(-1,0)\times(0,1)} \cup \underbrace{(1,2)\times(-1,0)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

τετράγωνα

(α) να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X+Y<0)$

(β) να υπολογιστεί η $E[XY]$

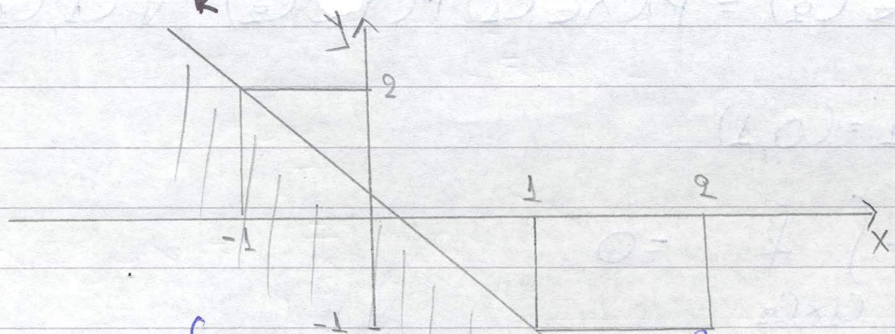
(γ) είναι οι X, Y ανεξάρτητες

Λύση

- Η f είναι χρήσιμη για δύο υποθέσεις:

(i) $P((X,Y)\in A) = \int_A \int f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \quad \forall A \subset \mathbb{R}^2$

(ii) $E(g(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2}\int g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \quad \forall \; : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



α) Έστω $A = \{(x,y)\in \mathbb{R} : x+y<0\}$

$$P(X+Y<0) = P((X,Y)\in A) \overset{(i)}{=} \int_A\int f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{A_1}\int (-xy)\,dxdy$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x} (-xy)\,dydx$$

$$= -\int_{-1}^{0} x \int_{0}^{-x} y\,dy\,dx = -\int_{-1}^{0} x\,\frac{x^2}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x^3\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

(β) $E[XY] = \int\int_{\mathbb{R}^2} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{(-1,0)\times(0,1)} xy(-xy)\,dx\,dy$

$$+\int\int_{(1,2)\times(-1,0)} xy(-xy)\,dx\,dy = -\frac{8}{9}$$

(γ)

$P(X\in C_1, Y\in C_2) = P(X\in C_1)\,P(X\in C_2)$

$\Downarrow$

Δεν είναι ανεξάρτητες γιατί αν ήταν θα είχαμε

(*) $P(X\in C_1, Y\in C_2) = P(X\in C_1)\,P(Y\in C_2)$, $\forall\, C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Για $C_1=(1,2)$, $C_2=(0,1)$

$P(X\in C_1, Y\in C_2) = \int_{C_1\times C_2} f = 0$

ενώ $P(X\in C_1) = \int\int_{(1,2)\times(-1,0)} (-xy)\,dx\,dy > 0$

και

$P(Y\in C_2) = \int\int_{(-1,0)\times(1,2)} (-xy)\,dx\,dy > 0$

Άρα η (*) δεν ισχύει.

Άσκηση 7.3.

X, Y, Z τυχαίες μεταβλητές με $E[X^2], E[Y^2] < \infty$, $Z \sim N(0,1)$
$Cov(X,Y) = 1$ και η Z ανεξάρτητη από τις X, Y.

Να υπολογιστεί η $Cov(XZ^2, Y+Z)$

Λύση

$$Cov(XZ^2, Y+Z) \overset{\text{σαν διγραμμική}}{=} Cov(XZ^2, Y) + Cov(XZ^2, Z)$$

$$= E[XZ^2Y] - E[XZ^2]E[Y] + E[XZ^2Z] - E[XZ^2]E[Z]$$

$$= E[XY]E[Z^2] - E[X]E[Z^2]E[Y] + E[X]E[Z^3] - E[X]E[Z^2]E[Z]$$

↑ Z: ανεξάρτητη από X, Y

$$= E[Z^2]\left(E[XY] - E[X]E[Y] + E[X]E[Z^3]\right)$$

$$= Cov(X,Y) + E[X]E[Z^3]$$

$$= 1 + E[X]E[Z^3]$$

$$E[Z^3] = \int_{\mathbb{R}} x^3 f_Z(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{Περιττή}}\,dx = 0$$

$Z \sim N(0,1)$
$E[Z] = 0$
$Var[Z] = 1$
$\Rightarrow E[Z^2] - E[Z]^2 = 1$
$\Rightarrow E[Z^2] = 1$

3. Άσκηση 7.6

Επιλέγουμε έναν αριθμό X ομοιόμορφα τυχαία στο σύνολο $\{1,2,\dots,20\}$ και θέτουμε $Y = 21 - X$.

(α) Ποια είναι η κατανομή της Y;
(β) Τι πρόσημο περιμένουμε να έχει η $Cov(X,Y)$; Να αποδείξετε τυπικά ποιο είναι αυτό.

Λύση

(α) Η Y είναι διακριτή τ.μ., άρα αρκεί να βρούμε την συνάρτηση πιθανότητας f_Y

Η Y παίρνει τιμές στο $A = \{1,2,\dots,20\}$

Άρα $f_Y(y) = P(Y=y) = 0$ αν $y \notin A$

Ενώ αν $y \in A$ τότε
$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(21 - X = Y) = P(\underbrace{X = 21 - Y}_{\in \{1,2,\dots,20\}}) = 1/20$$

Άρα
$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } y \in \mathbb{R} \setminus A \\ \frac{1}{20} & \text{αν } y \in A \end{cases}$$

(β) Περιμένουμε $Cov(X,Y) < 0$ γιατί όταν η X παίρνει "μεγάλη" τιμή τότε η Y παίρνει "μικρή" τιμή
"μικρή" "μεγάλη"

$$Cov(X,Y) = Cov(X, 21 - X) = Cov(X, 21) - Cov(X,X)$$

$$= 0 - \underbrace{Var[X]}_{>0} < 0$$

- Χρησιμοποιήσαμε ότι για σταθερά $a \in \mathbb{R}$
$Cov(X, a) = 0$ αφού $Cov(X, a) = E[Xa] - E[X]E[a]$
$= aE[X] - aE[X]$
$= 0$

- Επίσης $Var[X] > 0$ γιατί η X δεν είναι σταθερή τυχαία μεταβλητή (γενικά $Var[W] \geq 0$, $\forall W$)

4. Άσκηση 7.10

X_1, X_2 : ανεξάρτητες, $X_1, X_2 \sim exp(\mu)$.
Να βρεθούν οι $Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2)$, $(X_1+X_2, 2X_1+3X_2)$.
Είναι οι X_1+X_2, $2X_1+3X_2$ ανεξάρτητες;
Δίνεται ότι $E[X_1] = \frac{1}{\mu}$, $Var[X_1] = \frac{1}{\mu^2}$

Λύση

$$Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = Cov(X_1, 2X_1) + Cov(X_1, 3X_2) + Cov(X_2, 2X_1) + Cov(X_2, 3X_2)$$
$$= 2\,Cov(X_1, X_1) + 3\,Cov(X_1, X_2) + 2\,Cov(X_2, X_1) + 3\,Cov(X_2, X_2)$$
$$= 2\,Var[X_1] + 0 + 0 + 3\,Var[X_2]$$
$$= 5\frac{\mu}{2} \quad 5\frac{1}{\mu^2}$$

Επειδή $Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) \neq 0$ τότε

Τέλος, $\rho(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = \dfrac{Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2)}{\sqrt{Var(X_1+X_2)}\sqrt{Var(2X_1+3X_2)}}$

Ο αριθμητής $Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = 5/\mu^2$

$$Var[X_1+X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2\,Cov[X_1, X_2) = 2/\mu^2$$

$$Var[2X_1+3X_2] = Var[2X_1] + Var[3X_2] + 2\,Cov(2X_1, 3X_2) =$$

$$= 4\,Var[X_1] + 9\,Var[X_2] = 13/\mu^2$$

Άρα $\rho(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = \frac{5}{\sqrt{26}}$