

ΕΚΠΑ-ΝΟΠΕ-ΤΟΕ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διδάσκων: Στ. Κώτσιος

4^η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1^η: Να βρεθεί ένα σύστημα 2 επί 3, $Ax = b$, του οποίου η γενική λύση να

$$\text{είναι } x = w \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w \in \mathbf{R}.$$

Άσκηση 2^η: Να διερευνηθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 3x - y - z &= a \\ 5x - 3y + bz &= 4 \end{aligned}$$

Για τις διάφορες τιμές των a, b .

Άσκηση 3^η: Να επιλυθεί με την μέθοδο της απαλοιφής με μερική οδήγηση, το σύστημα:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 3x + y - z &= 2 \\ 5x - y + z &= 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 4^η: Να επιλυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z + w &= 0 \\ 8x + 12y - 9z + 8w &= 0 \\ 4x + 6y + 3z - 2w &= 0 \\ 2x + 3y + 9z - 7w &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 5^η: Να επιλυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \\ 4x - 5y &= -1 \\ 7x - 11y &= -4 \end{aligned}$$

Άσκηση 6^η: Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ έτσι, ώστε

$$T(1, 1, 1) = T(1, 1, -1) = (0, 0, 0) \text{ και } T(-1, 0, 1) = (2, 0, -2).$$

(i) Προσδιορίστε τον τύπο του γραμμικού μετασχηματισμού T . (ii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας και μία βάση του πυρήνα του T .

Άσκηση 7^η: Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 2y + z, y^a + b, 2x + y + 2z).$$

Να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbf{R}$, ώστε η f να είναι γραμμική.

Άσκηση 8^η: Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, που ορίζεται από τη σχέση $f(A) = A + A^T$, είναι γραμμική και να βρείτε βάση του πυρήνα και της εικόνας της f .

Άσκηση 9^η: Θεωρείστε τον γραμμικό μετασχηματισμό αναστροφής κάθε 2 επί 2 πίνακα και βρείτε τον πίνακα του, ως προς την κανονική βάση των πινάκων.

Άσκηση 10^η: Έστω V το σύνολο των πολυωνύμων τρίτου βαθμού. Θεωρούμε την απεικόνιση που στέλνει κάθε τέτοιο πολυώνυμο στην δεύτερη παράγωγο του. Δείξτε ότι είναι γραμμική και βρείτε τον πίνακα της ως προς την βάση: $1, t, t^2, t^3$. Ποιός είναι ο πυρήνας της;

Άσκηση 11^η: Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, 3y - z, x - y + 2z)$$

Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της. Είναι η f αντιστρέψιμη; Αν ναι να υπολογισθεί η αντίστροφος της.