



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Χωρικές σχέσεις και Γεωμετρικές Έννοιες στην Προσχολική Εκπαίδευση

Ενότητα 6: Γεωμετρικά σχήματα και μεγέθη δύο και  
τριών διαστάσεων

Δημήτρης Χασάπης

**Τμήμα Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική  
Ηλικία**

# Γεωμετρικές σχέσεις

**Οι γεωμετρικές σχέσεις**  
μετρική θεώρηση του χώρου

- Απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία / μήκος
- Επίπεδα σχήματα / εμβαδόν
- Στερεά σχήματα / όγκος



# Van Hiele: Επίπεδα συγκρότησης και ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης

Τα επίπεδα διακρίνονται μεταξύ τους ως προς τα **αντικείμενα της σκέψης των παιδιών**

- 1. Τα γεωμετρικά σχήματα και η μορφή τους**
- 2. Οι τάξεις των γεωμετρικών σχημάτων**
- 3. Οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων.**
4. Οι σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων
5. Τα αξιωματικά συστήματα οργάνωσης της γεωμετρίας



# 1. Οπτική Θεώρηση / Αναγνώριση

- Τα παιδιά **αντιλαμβάνονται το χώρο** που υπάρχει γύρω τους **οπτικά**.
- **Αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα από τη συνολική τους μορφή**, ως ολότητες και όχι ως οντότητες που αποτελούνται από διάφορα μέρη.
- Μπορούν να διακρίνουν, να αναπαραγάγουν και να ονομάσουν τα διάφορα σχήματα, αλλά **δεν μπορούν να διακρίνουν τις ιδιότητες ενός γεωμετρικού σχήματος**.
- Για την περιγραφή τους χρησιμοποιούν οπτικά πρότυπα π.χ. ένα σχήμα είναι ορθογώνιο όταν μοιάζει με πόρτα κ.λ.π.



## 2. Περιγραφική Θεώρηση / Ανάλυση

- Τα παιδιά **μπορούν να αναλύσουν ένα γεωμετρικό σχήμα στα συστατικά του** και να εντοπίσουν σχέσεις μεταξύ τους.
- **Μπορούν να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες ενός σχήματος για να το αναγνωρίσουν** και να το ταξινομήσουν σε μια κατηγορία, π.χ. τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα.
- **Δεν μπορούν όμως να διακρίνουν σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες ιδιότητες του ίδιου σχήματος, π.χ. ανάμεσα στις πλευρές και στις γωνίες ενός τετραγώνου ούτε ανάμεσα στις ιδιότητες των διαφόρων σχημάτων, π.χ. τετράγωνου και ρόμβου.**



### 3. Άτυπη παραγωγική θεώρηση / Διάταξη – ταξινόμηση ιδιοτήτων

Τα παιδιά μπορούν να διακρίνουν

- **σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες ιδιότητες του ίδιου σχήματος,**

π.χ. ανάμεσα στις πλευρές και στις γωνίες ενός τετραγώνου καθώς και

- **ανάμεσα στις ιδιότητες των διαφόρων σχημάτων,**

π.χ. τετραγώνου και παραλληλόγραμμου.



# 4. Τυπική παραγωγική θεώρηση / απόδειξη

Τα παιδιά κατανοούν τους ορισμούς, τα αξιώματα, τα θεωρήματα και τις αποδείξεις.



# 5. Λογική αυστηρότητα

Τα παιδιά κατανοούν τη γεωμετρία ως ένα σύνολο ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους





Η μαθησιακή διαδικασία, η οποία οδηγεί από το ένα επίπεδο στο άλλο **έχει πέντε φάσεις.**



# 1η φάση: Διερεύνηση

## Έρευνα και εισαγωγή στις έννοιες μέσω υλικών.

- Αναπτύσσονται συζητήσεις για τις δραστηριότητες και τα αντικείμενα της μελέτης.
- Γίνονται παρατηρήσεις, δίνονται πληροφορίες, τίθενται ερωτήσεις και εισάγεται το κατάλληλο λεξιλόγιο.

## Παράδειγμα

- Τι είναι ρόμβος; Τετράγωνο; Παραλληλόγραμμο;
- Σε τι μοιάζουν μεταξύ τους;
- Σε τι διαφέρουν;



# 2η φάση: Κατευθυνόμενος προσανατολισμός

**Κατασκευάζονται σχήματα με κατάλληλα υλικά** και τα παιδιά καθοδηγούνται στην τεχνική κατασκευής ενός σχήματος και ασκούνται στην κατανόηση των χαρακτηριστικών του σχήματος.

## Παράδειγμα

- Ας κατασκευάσουμε ένα ρόμβο, ύστερα ένα μεγαλύτερο και ύστερα ένα μικρότερο.
- Από τι εξαρτάται το μέγεθος του ρόμβου ;

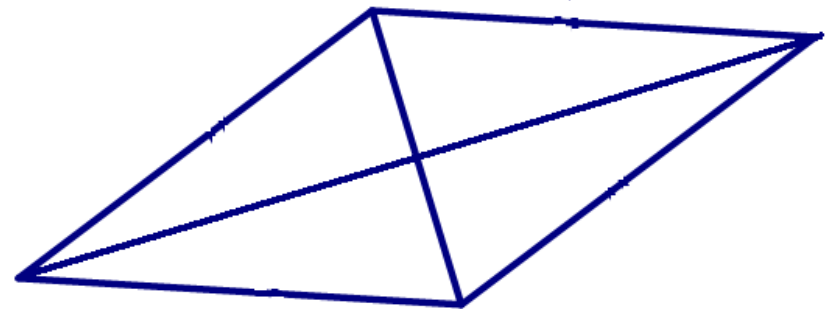


# 3η φάση: Ερμηνεία - επεξήγηση

Τα παιδιά συζητούν με τη/τον νηπιαγωγό για τα σχήματα που σχεδίασαν ή κατασκεύασαν και για τις ιδιότητες των σχημάτων αυτών.

## Παράδειγμα

- Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι άξονες συμμετρίας (διπλώνει)
- Οι απέναντι γωνίες του;

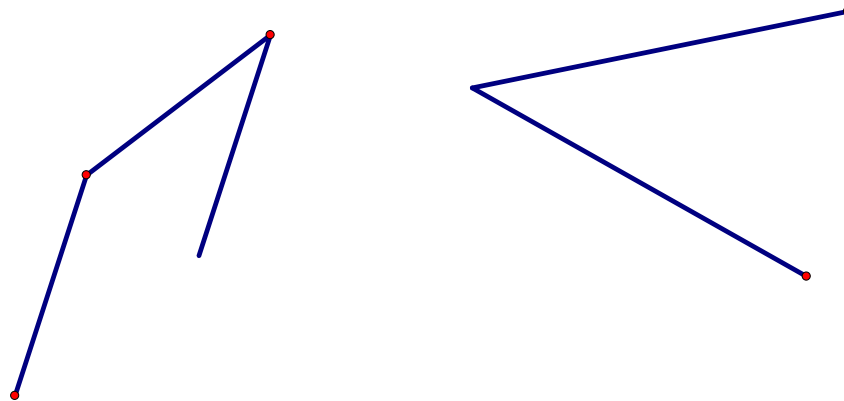


# 4η φάση: Ελεύθερος προσανατολισμός

Τα παιδιά εργάζονται ατομικά με δραστηριότητες που περιλαμβάνουν πολλά βήματα.

## Παράδειγμα

Συμπληρώνουν ένα σχέδιο ή συνθέτουν ένα σχήμα



Συμπληρώστε το σχήμα ώστε να γίνει ρόμβος.



# 5η φάση: Ολοκλήρωση

- Τα παιδιά συνοψίζουν ότι έχουν μάθει σε ένα ενιαίο όλο.
- Η νέα γνώση αντικαθιστά την παλιά και τα παιδιά είναι έτοιμα να προχωρήσουν στο επόμενο επίπεδο στο οποίο θα επαναλάβουν τα ίδια βήματα.



Οι βασικές έννοιες της γεωμετρίας

# σημείο

**Σημείο** ονομάζεται μια οντότητα που **έχει θέση** στο χώρο **αλλά δεν έχει διαστάσεις** (μήκος, πλάτος, ύψος).

Το σημείο αποδίδει την έννοια της θέσης χωρίς να παρέχει άλλες πληροφορίες.





# γραμμή

**Γραμμή** είναι το νοητό ή εμφανές σχήμα, το οποίο δημιουργεί ένα σημείο κινούμενο στο χώρο.

**Η γραμμή έχει μία μόνο διάσταση αυτή του μήκους.**

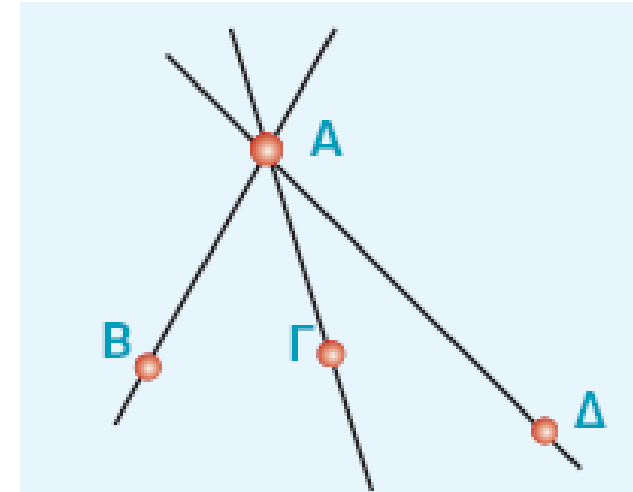
Ανάλογα με τη διαδρομή του σημείου στο χώρο η γραμμή μπορεί να είναι:

- **Ευθεία**, οπότε και αποτελεί τη συντομότερη οδό από ένα σημείο σε ένα άλλο.
- **Τεθλασμένη**, η οποία σχηματίζεται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
- **Καμπύλη**, της οποίας κανένα τμήμα, ακόμη και το μικρότερο, δεν είναι ευθεία.
- **Μεικτή**, της οποίας τμήματα είναι ευθύγραμμα και καμπύλα.



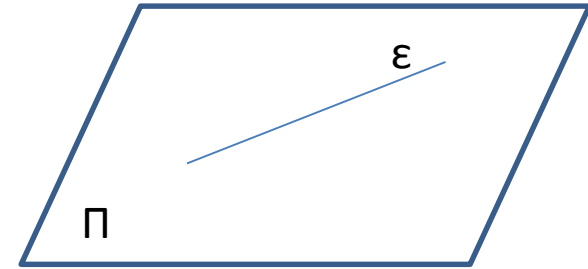
# σημείο $\leftrightarrow$ ευθεία

- Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες
- Από δύο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία

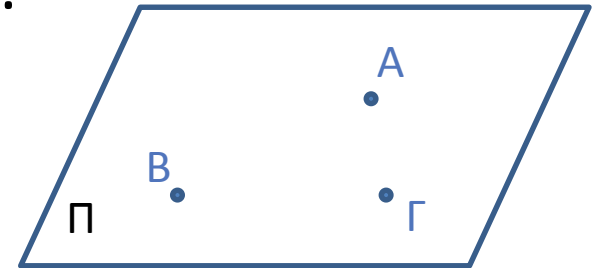


# επίπεδο

**Επίπεδο** είναι μία επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.

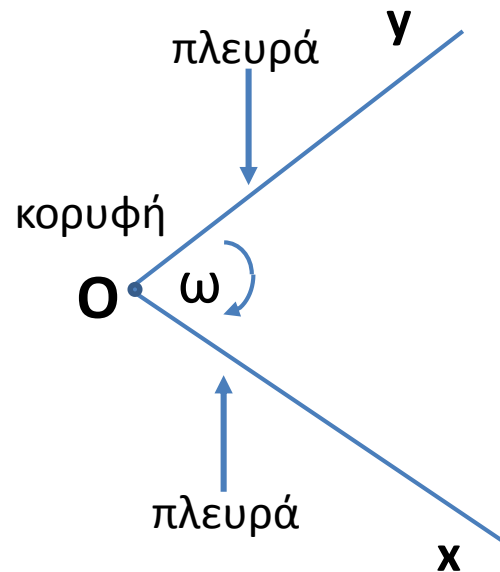


- Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.
- Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.



# γωνία

**Γωνία** είναι το επίπεδο σχήμα που σχηματίζουν δύο ημιευθείες  $Ox$ ,  $Oy$  με κοινή αρχή  $O$

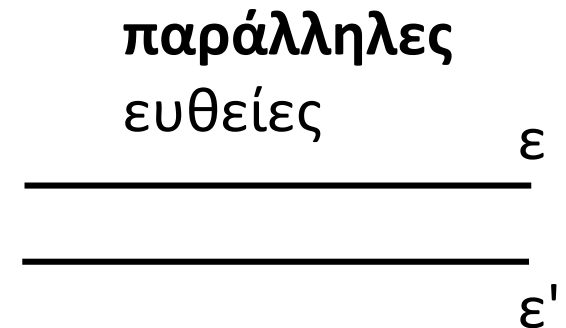
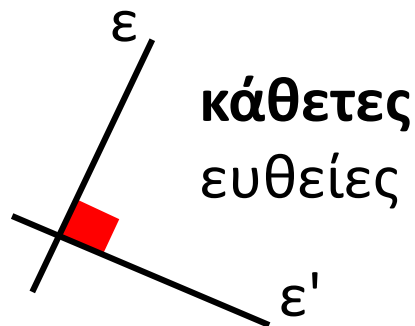
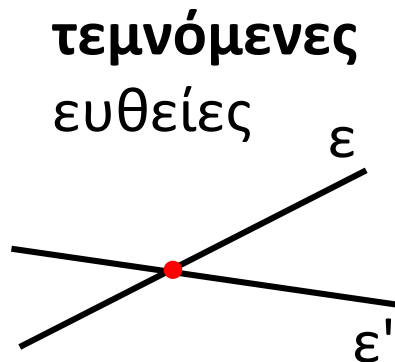


# Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

- **Δύο ευθείες** του ίδιου επιπέδου λέγονται **παράλληλες**, αν δεν έχουν κοινό σημείο όσο κι αν προεκταθούν.
- **Δύο ευθείες** του ίδιου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο ονομάζονται **τεμνόμενες** και το κοινό τους σημείο λέγεται **σημείο τομής** των ευθειών.

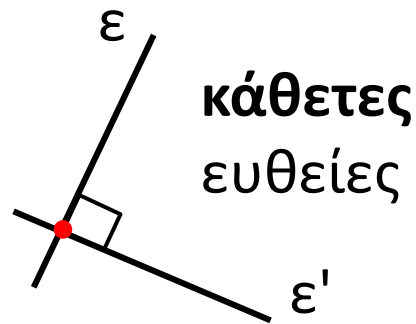
Επομένως

- **Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή θα τέμνονται.**

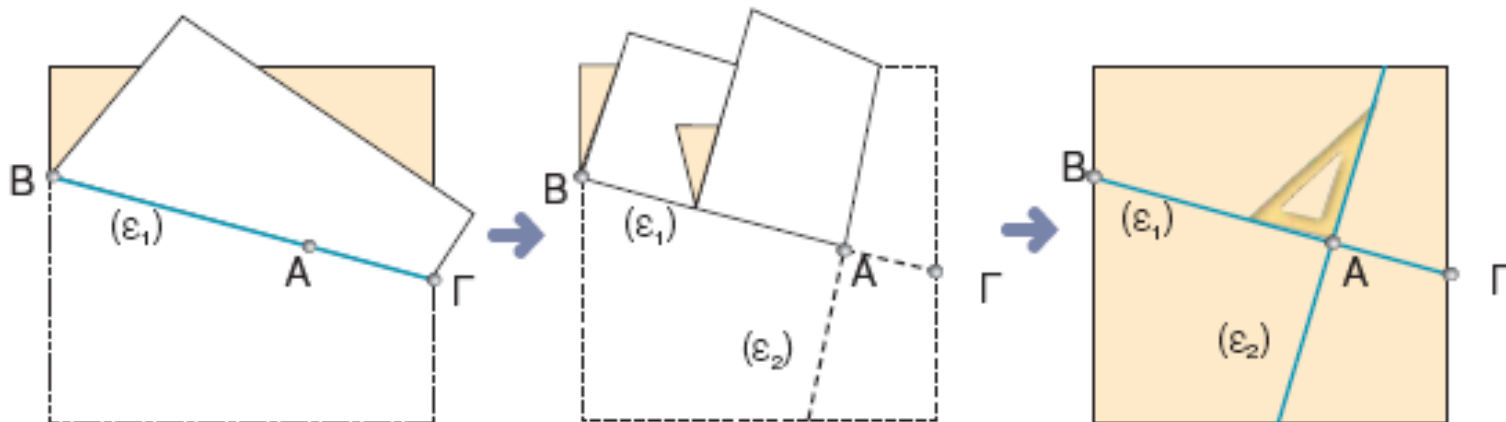


# Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

Δύο ευθείες είναι κάθετες όταν οι γωνίες, που σχηματίζουν τεμνόμενες, είναι ορθές.

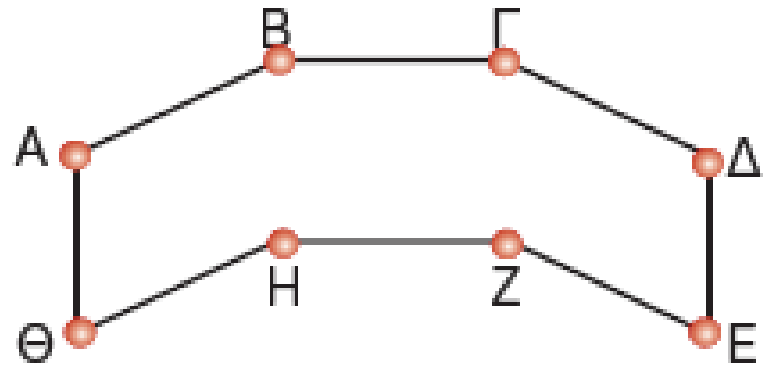
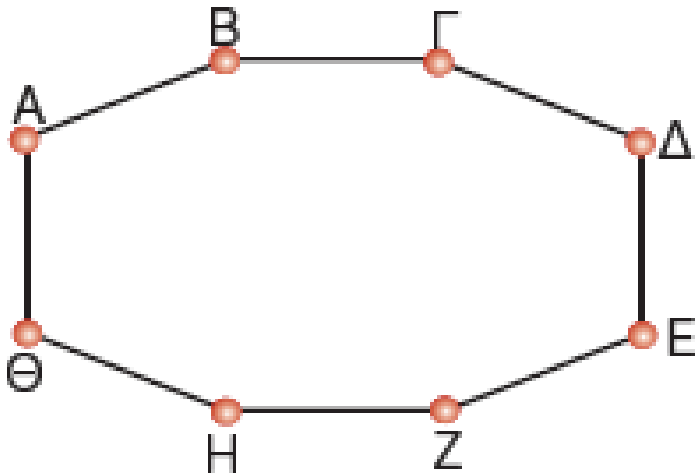


Αν διπλώσουμε το φύλλο χαρτί δύο φορές, με τον τρόπο που φαίνεται στα παρακάτω σχήματα και μετά το ανοίξουμε, παρατηρούμε ότι τα τσακίσματα, που έγιναν πάνω στο χαρτί, παριστάνουν δύο κάθετες ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .

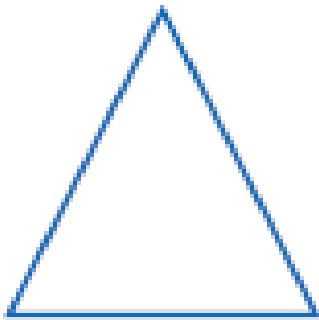
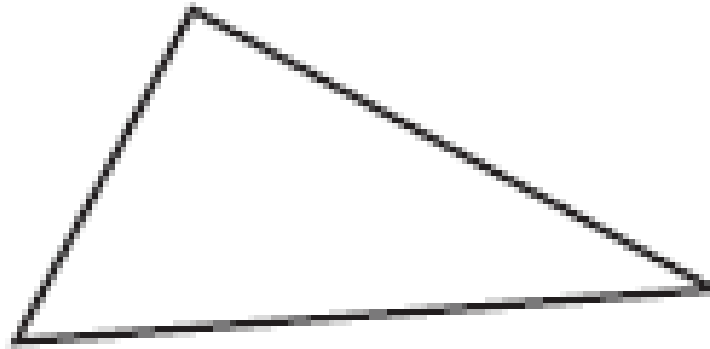


# Ευθύγραμμα σχήματα

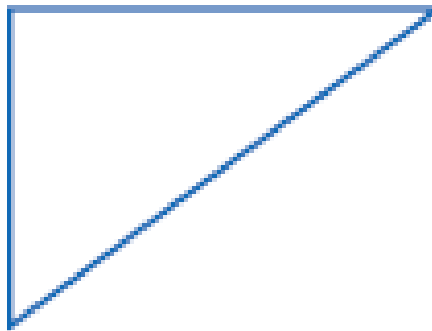
**Ευθύγραμμο σχήμα** ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.



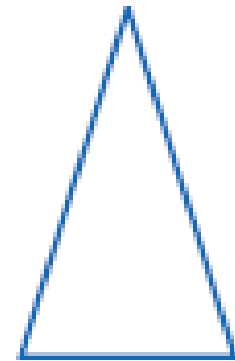
# τρίγωνα



ισόπλευρο  
τρίγωνο



ορθογώνιο  
τρίγωνο



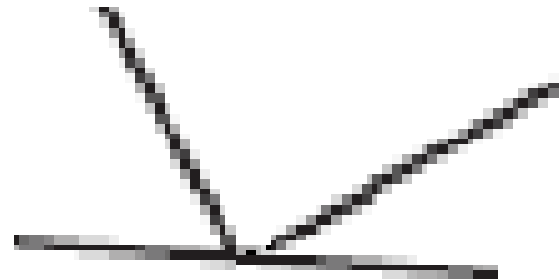
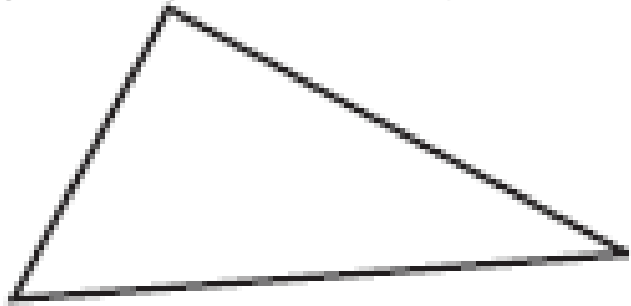
ισοσκελές  
τρίγωνο



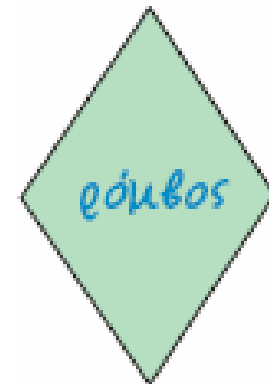
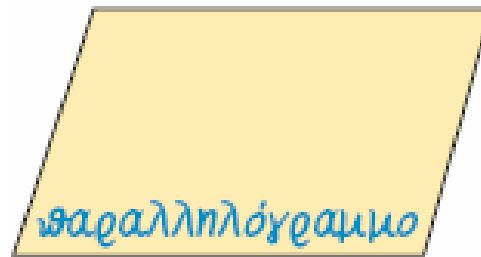


# Άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου;

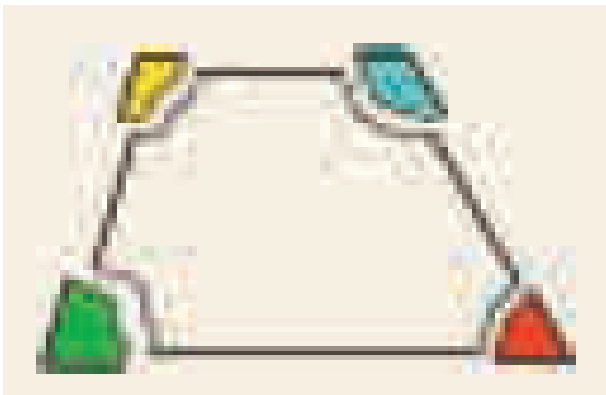
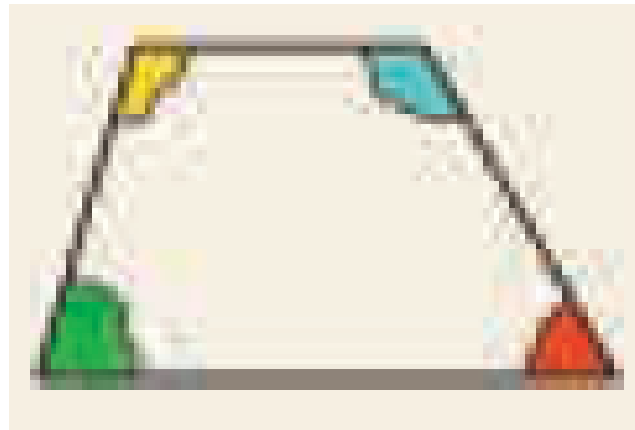
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^\circ$ .



# τετράπλευρα

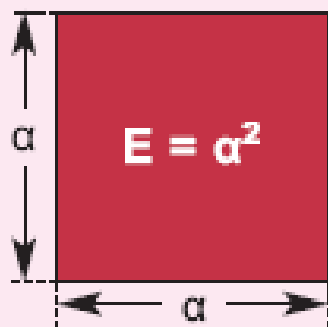


# Άθροισμα των γωνιών ενός τετράπλευρου;

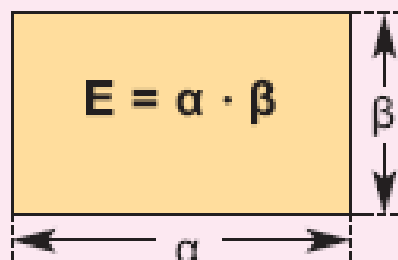


# Εμβαδά των βασικών επίπεδων σχημάτων

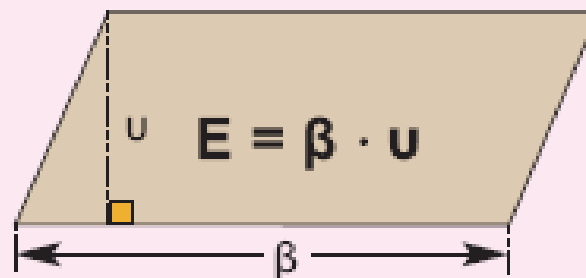
Τετράγωνο



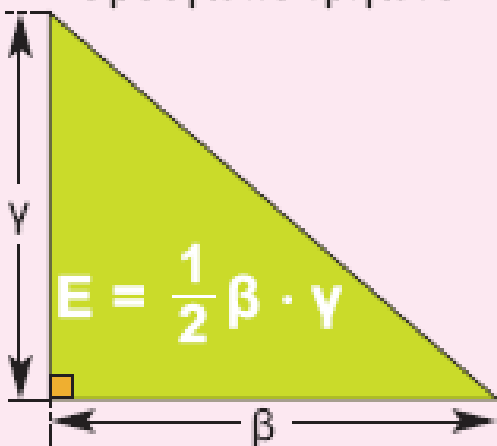
Ορθογώνιο



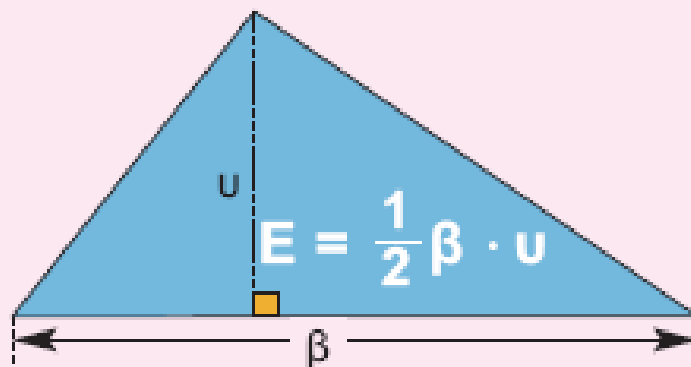
Παραλληλόγραμμο



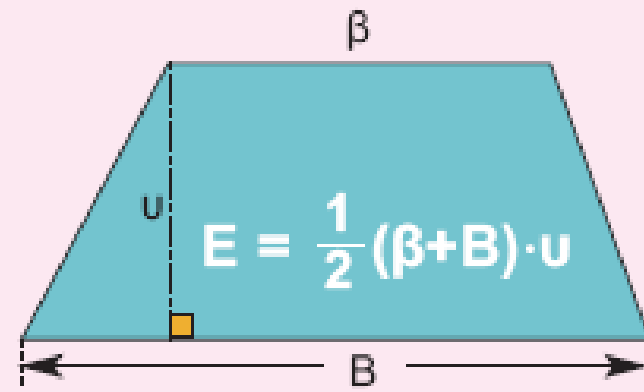
Ορθογώνιο τρίγωνο



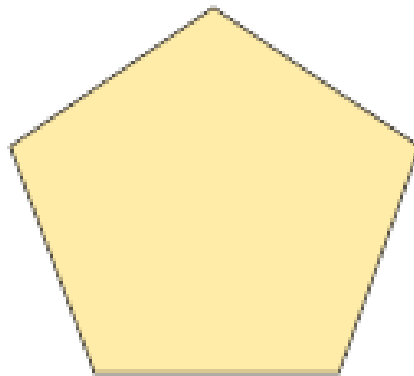
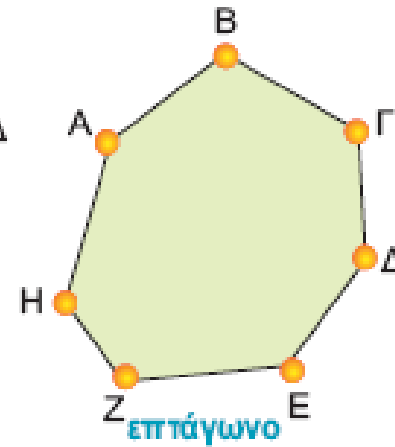
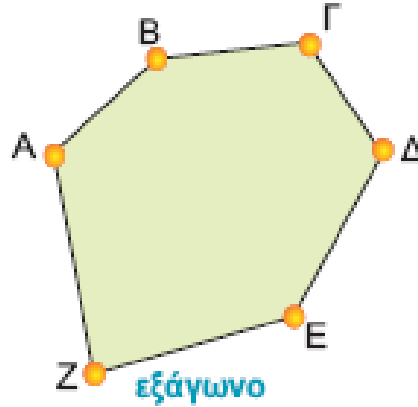
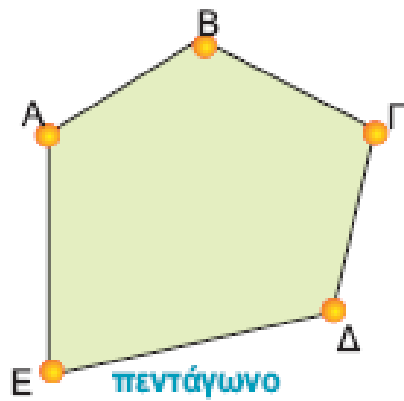
Τυχαίο τρίγωνο



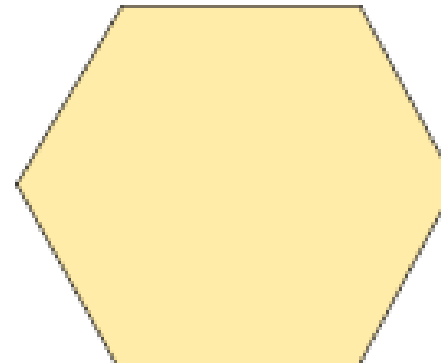
Τραπέζιο



# πολύγωνα



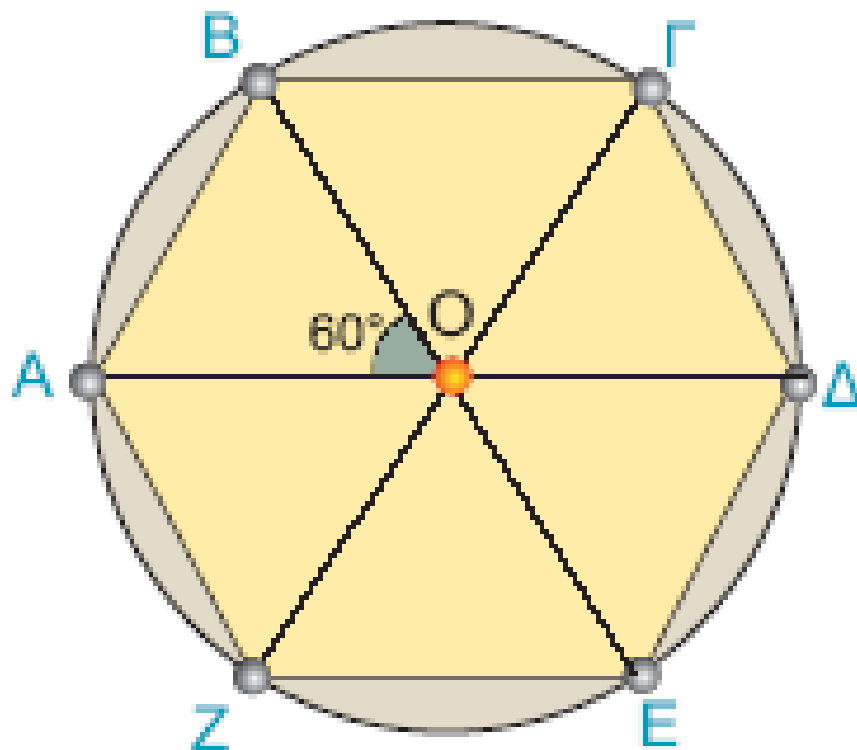
Κανονικό Πεντάγωνο



Κανονικό Εξάγωνο



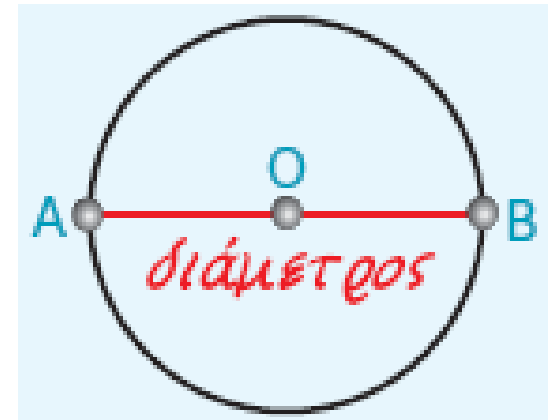
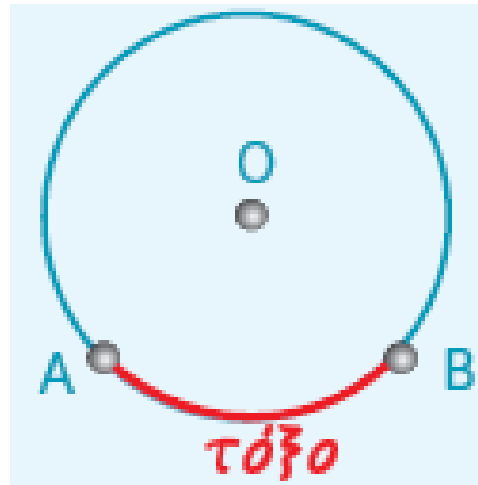
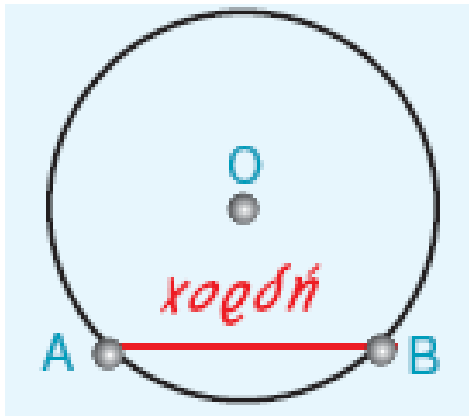
# Κατασκευή κανονικών πολυγώνων



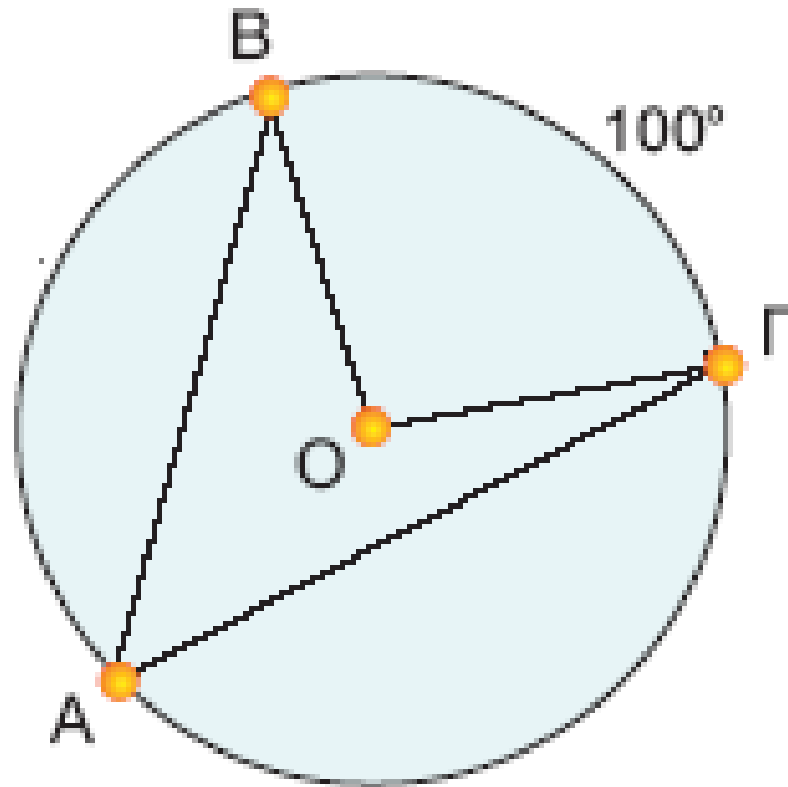
# Κύκλος

**Κύκλος** λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο **O**.

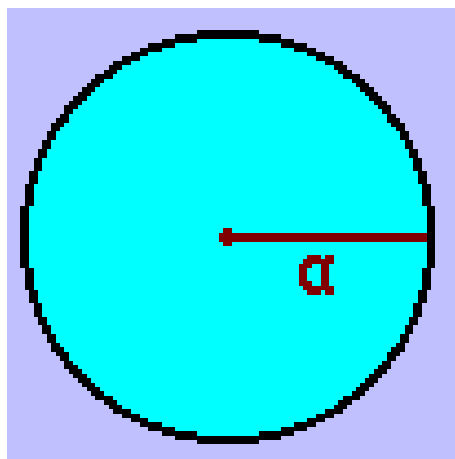
Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με  **$\rho$**  και λέγεται ακτίνα του κύκλου. Το σημείο **O** λέγεται κέντρο του κύκλου.



# Εγγεγραμμένη – Επίκεντρη γωνία





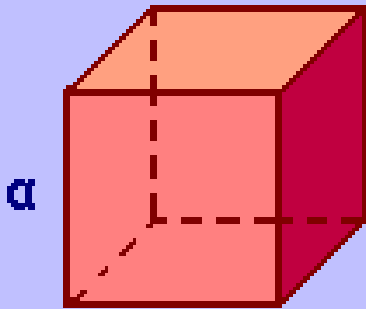


- Μήκος κύκλου  $L = 2 \pi \alpha$
- Εμβαδόν κύκλου  $E = \pi \alpha^2$

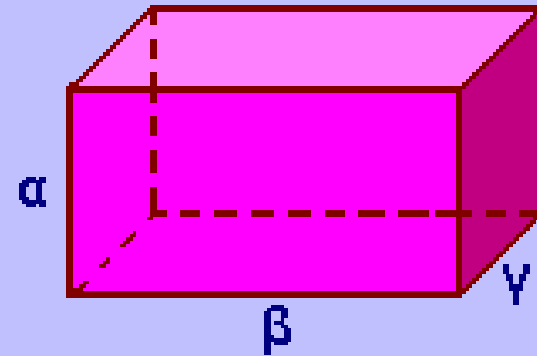
$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 2643383279\ 50288\ 41971\ \dots$



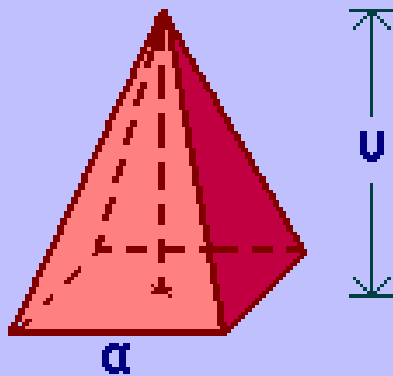
# Στερεά ή τρισδιάστατα σώματα



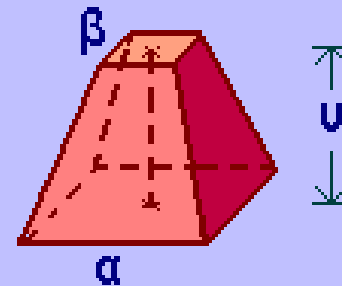
Κύβος  
 $\alpha^* \alpha^* \alpha$



Παραλληlepίπεδο  
 $\alpha^* \beta^* \gamma$



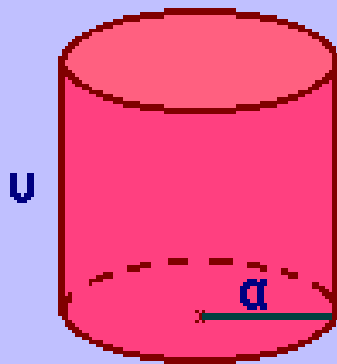
Πυραμίδα  
 $\alpha^* \alpha^* \upsilon / 3$



Κόλουρη πυραμίδα

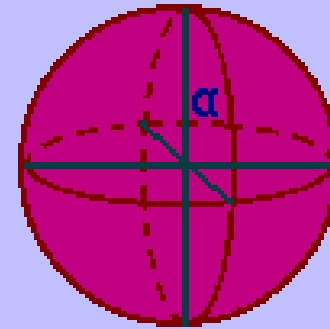


# Στερεά ή τρισδιάστατα σώματα

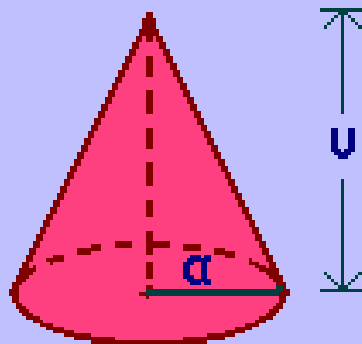


Κύλινδρος  
 $\pi \cdot \alpha^2 \cdot u$

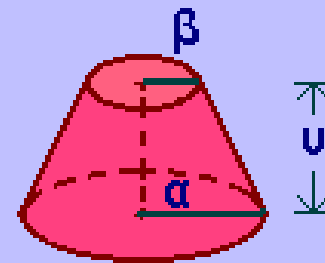
$\pi = 3,14$



Σφαίρα  
 $(4/3) \cdot \pi \cdot \alpha^3$



Κώνος  
 $\pi \cdot \alpha^2 \cdot u / 3$



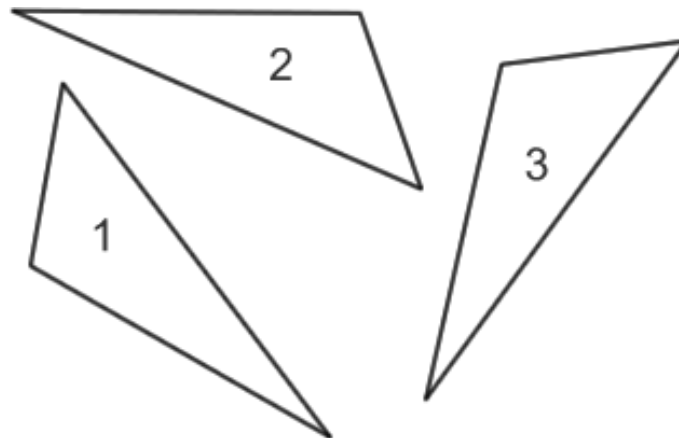
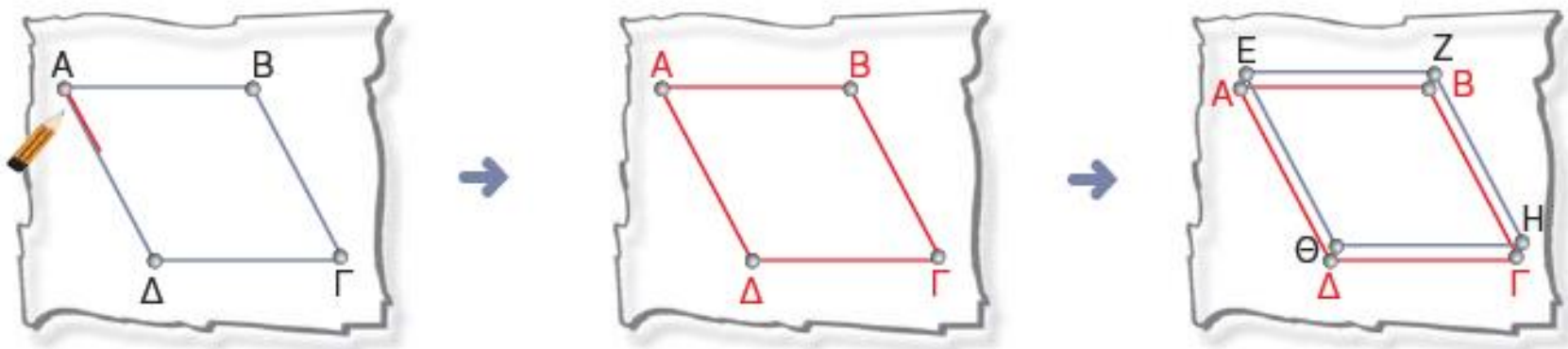
Κόλπουρος κώνος



Σχέσεις επιπέδων σχημάτων

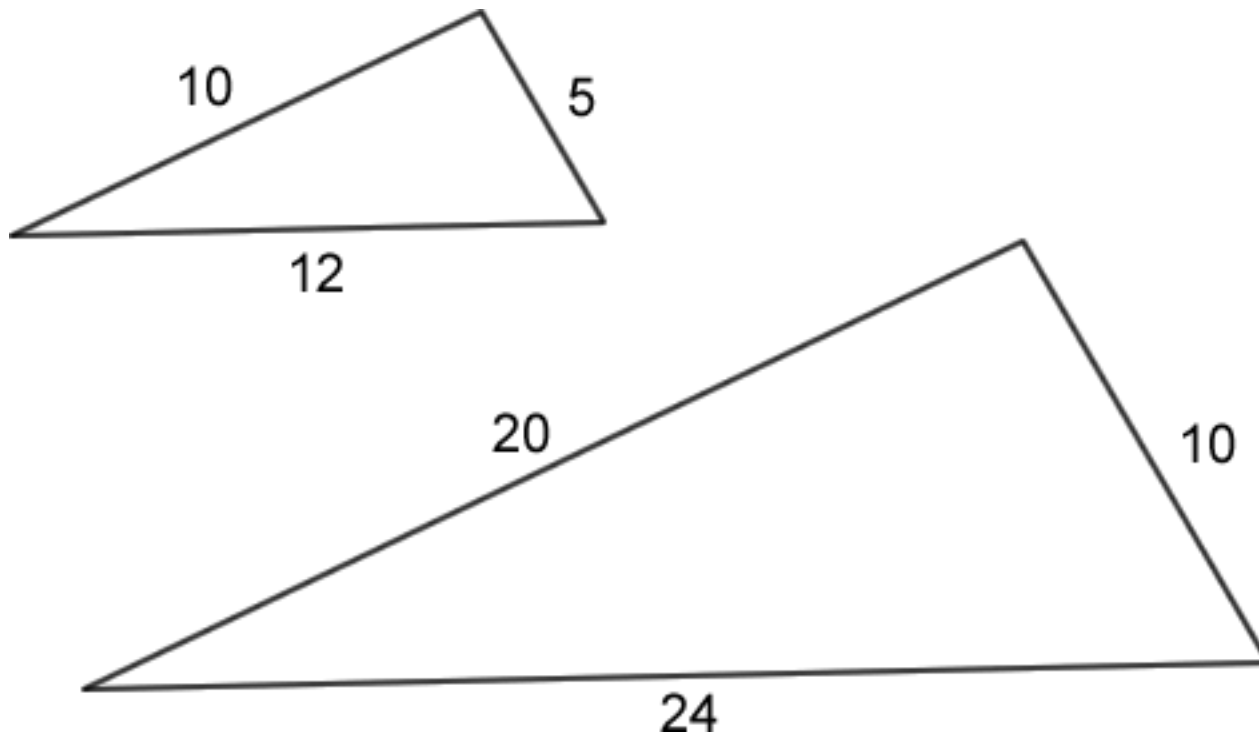
# Ίσα σχήματα

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται **ίσα**, αν **συμπίπτουν**, όταν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.



# Όμοια σχήματα

Ίσες γωνίες & ανάλογες πλευρές



# Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

# Μετατόπιση

Μετατόπιση όλων των σημείων ενός σχήματος στην ίδια κατεύθυνση και στην ίδια απόσταση.

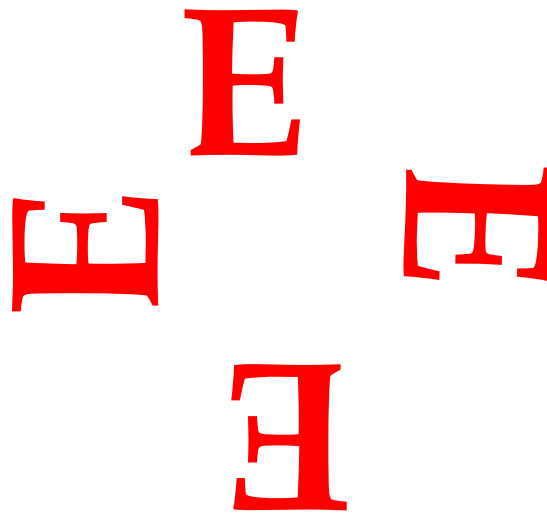
Ε Ε





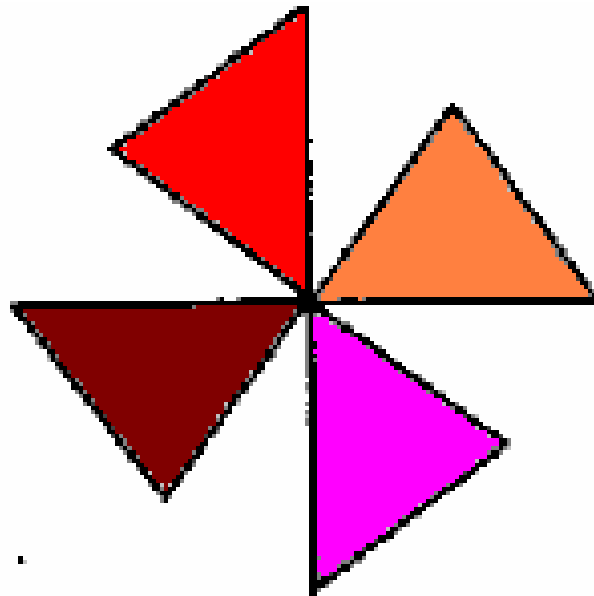
# Περιστροφή

Μια πλήρης περιστροφή γύρω από ένα σημείο εντός ή εκτός του σχήματος.

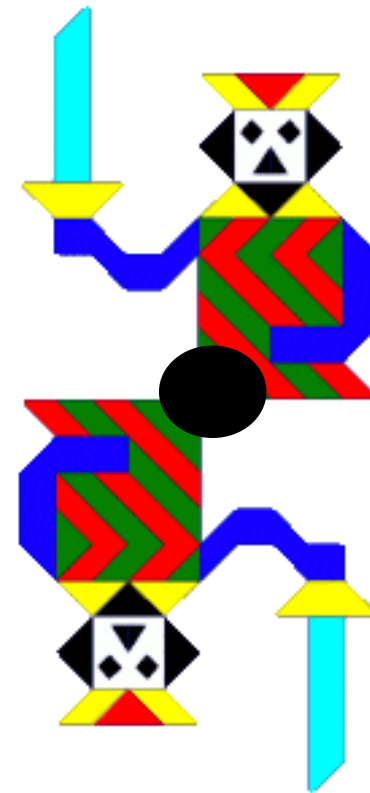


# Συμμετρικά σχήματα ως προς σημείο

όταν το σχήμα περιστραφεί γύρω από ένα σημείο του επιπέδου μέχρι να συμπέσει με το αρχικό σχήμα.



# Κεντρική Συμμετρία



# Ανάκλαση

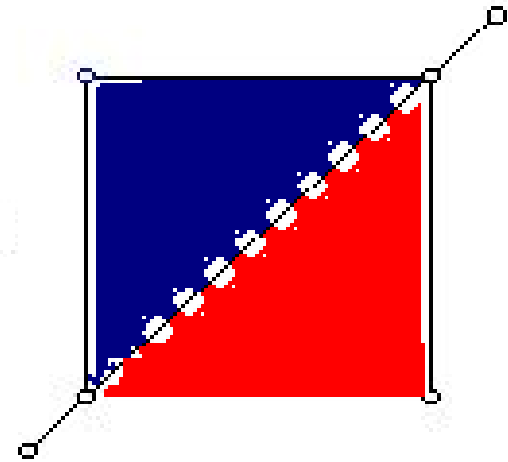
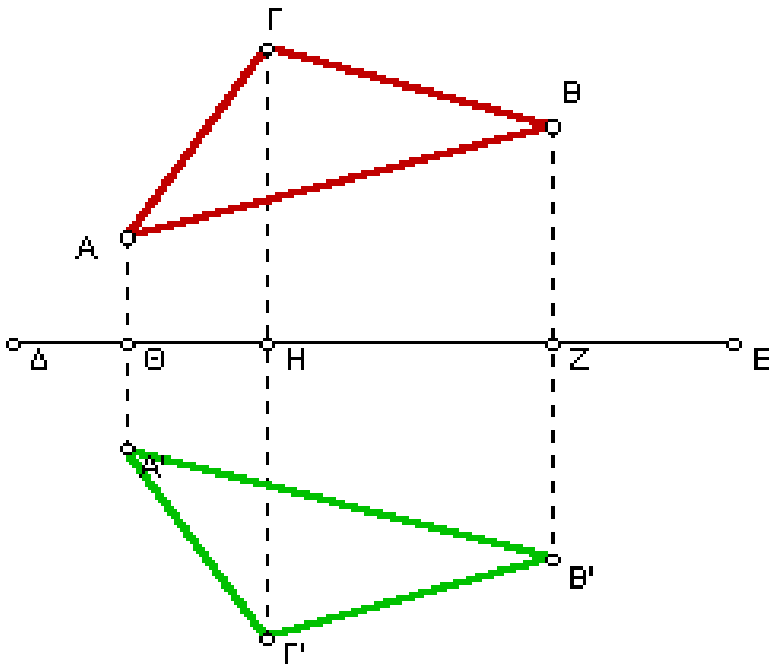
Μετατόπιση + Περιστροφή

Ξ Ε



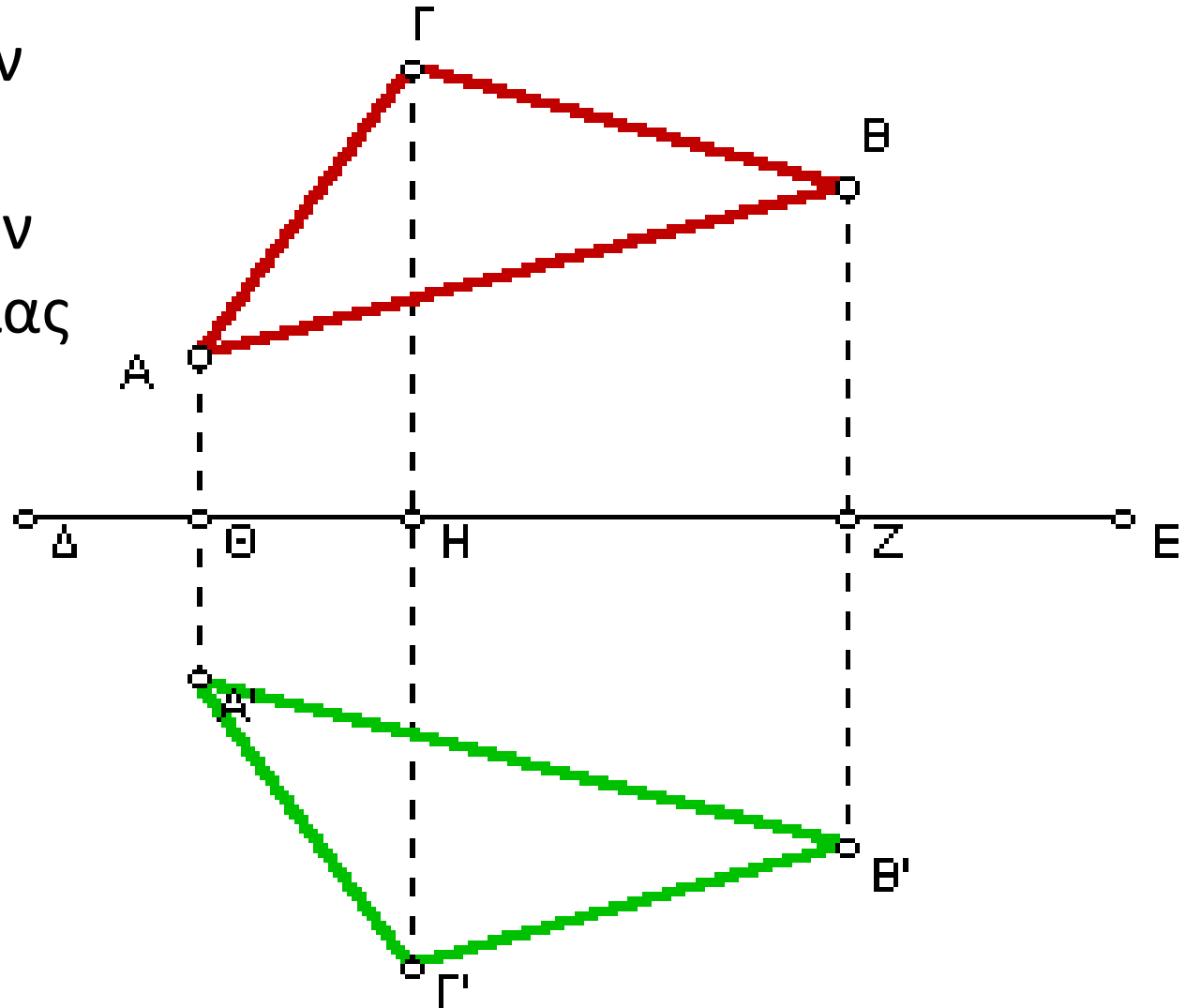
# Ανάκλαση

όταν το επίπεδο διπλωθεί σε μια ευθεία (άξονας) τα δύο επίπεδα σχήματα ή τα δύο μέρη του ίδιου σχήματος συμπίπτουν.

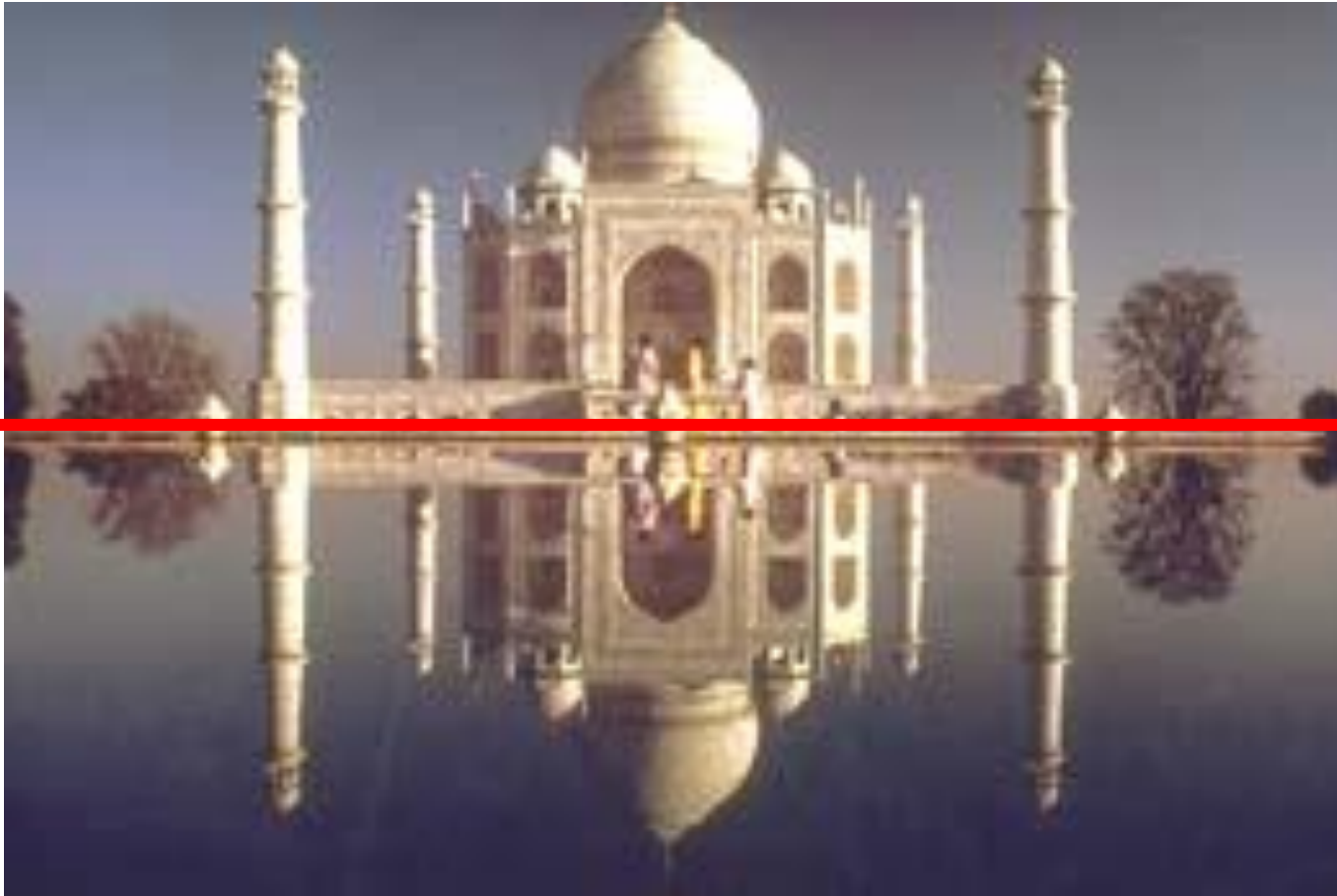


# Συμμετρικά σχήματα ως προς άξονα

Η απόσταση των  
συμμετρικών  
σημείων από τον  
άξονα συμμετρίας  
είναι ίση.



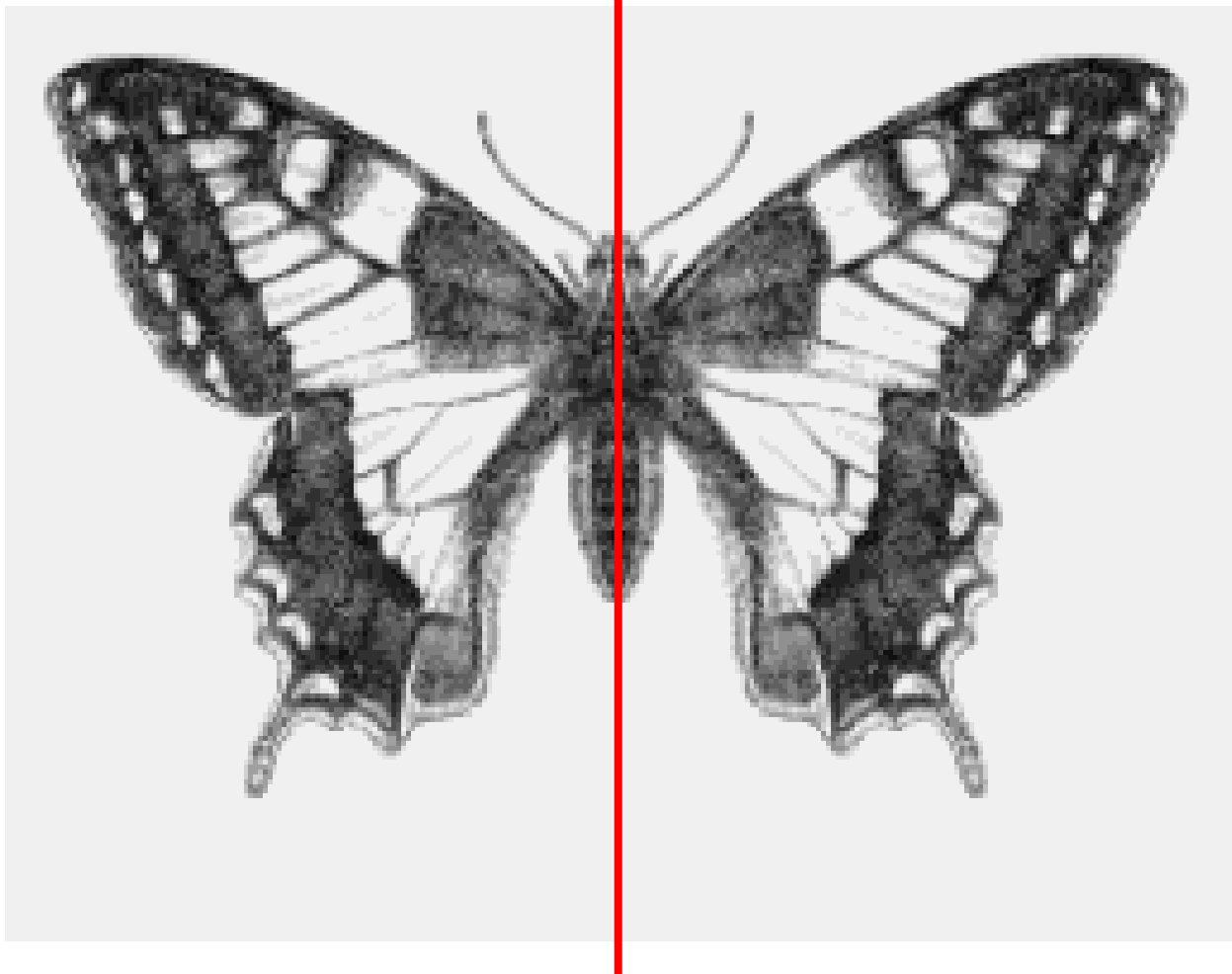
# Αξονική συμμετρία



Οι κατοπτρισμοί δημιουργούν συμμετρικές εικόνες



# Αξονική συμμετρία





# Συμμετρία ως προς άξονα (αξονική συμμετρία)

**διατηρούνται τα μήκη και τα μέτρα των  
γωνιών, αλλάζει όμως ο προσανατολισμός:**

η κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά  
γίνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά.



# Μεγέθυνση

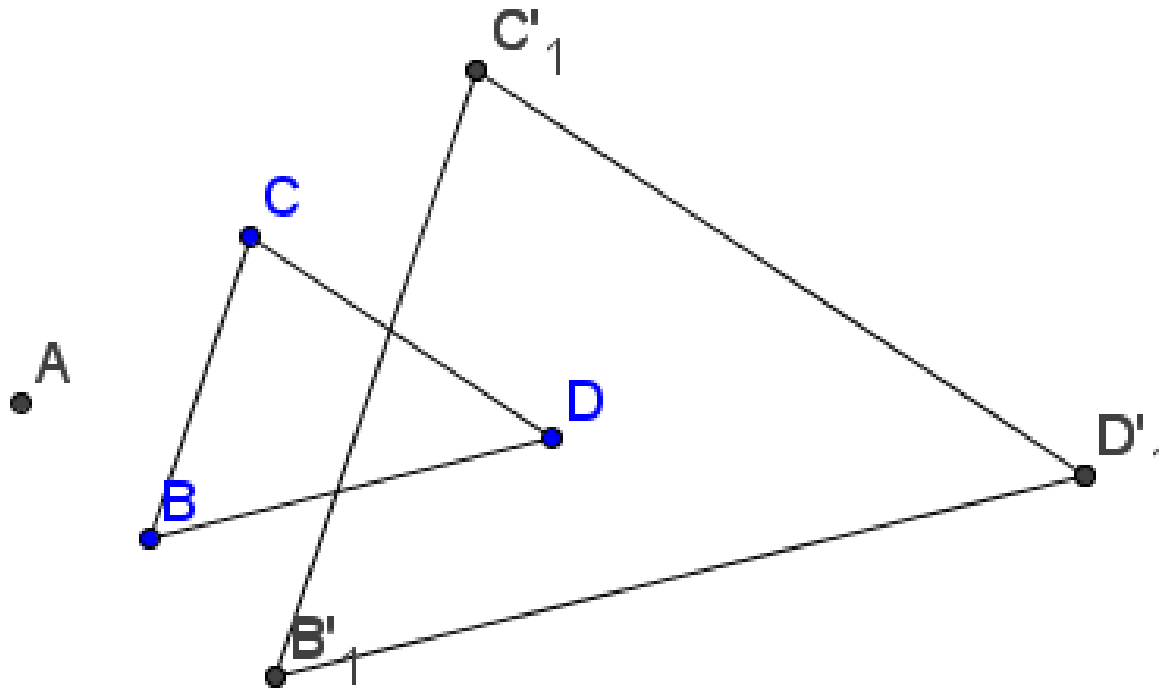
Αλλαγή μεγέθους ενός σχήματος

**E**      **E**      **E**



# Μεγέθυνση

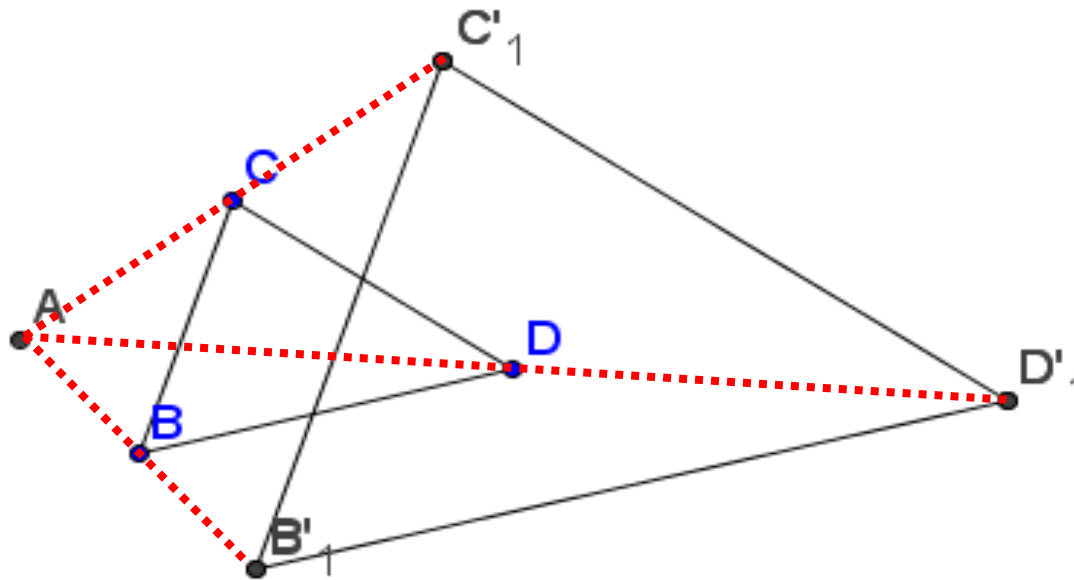
Αλλαγή μεγέθους ενός σχήματος



# Μεγέθυνση

Αλλαγή μεγέθους ενός σχήματος

**Μετασχηματισμός ενός σχήματος ως προς ένα κέντρο σε μια κλίμακα**



# Μετατόπιση



# Ανάκλαση

## Αξονική συμμετρία



# Περιστροφή

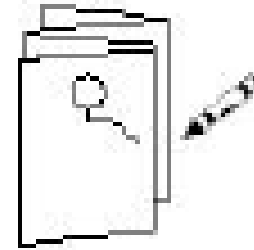
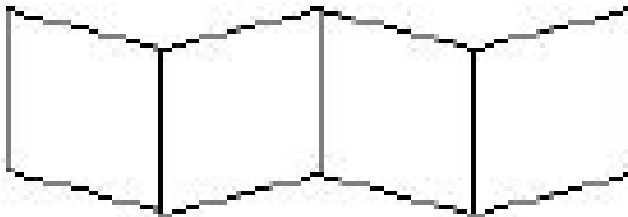
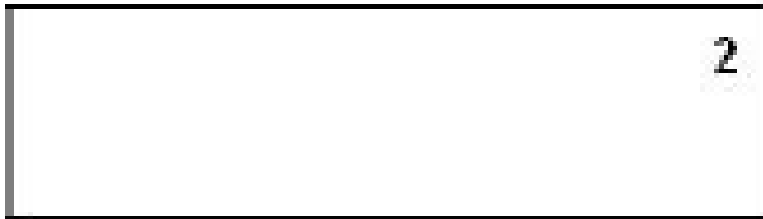
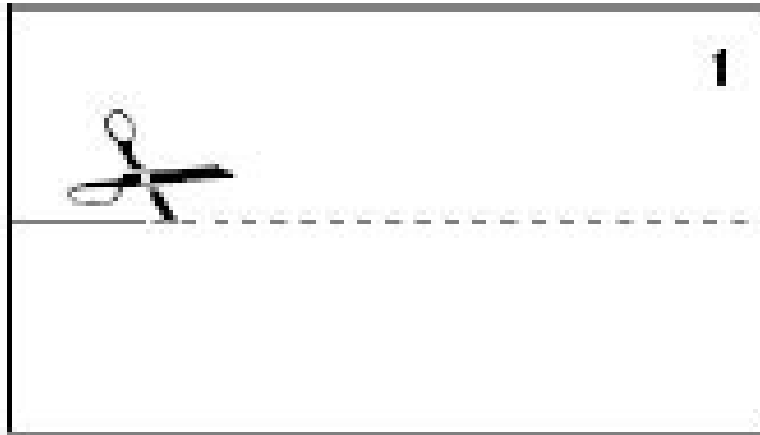
## Κεντρική συμμετρία



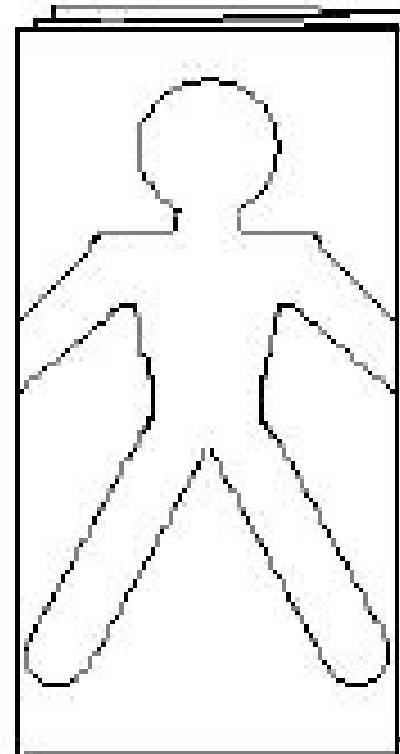
# Αντανάκλαση – αξονική συμμετρία



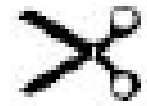




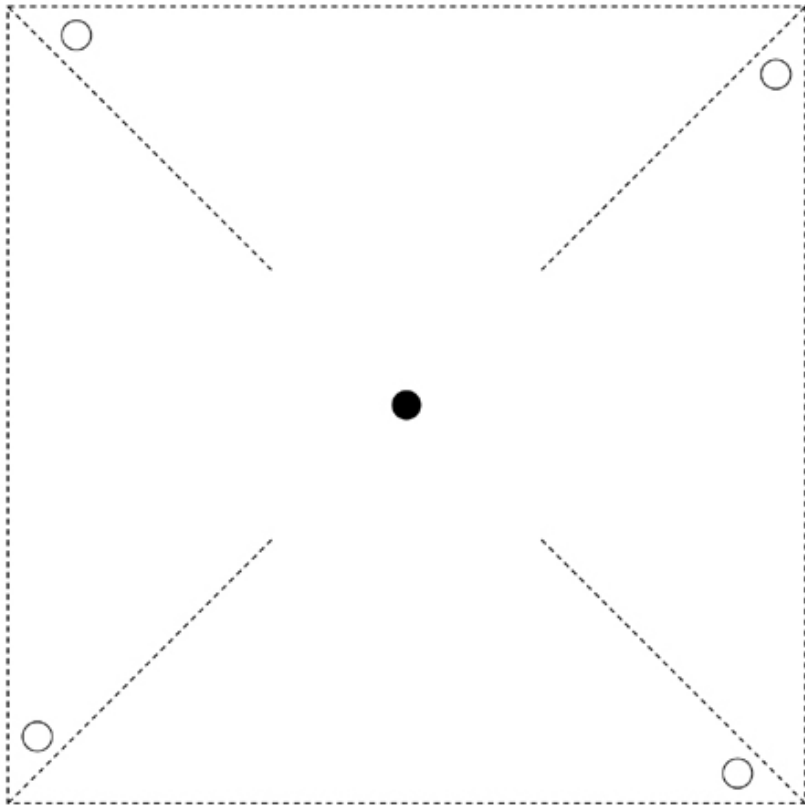
3



4



# Περιστροφή – κεντρική συμμετρία



# Άσκηση

Περιγράψτε συνοπτικά μια δραστηριότητα για παιδιά του νηπιαγωγείου

**με επίκεντρο**

**τον ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ**

(Μετατόπιση – Συμμετρία – Μεγέθυνση)

**ενός ΚΥΚΛΟΥ**



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Δημήτρης Χασάπης, 2015. Δημήτρης Χασάπης. «Χωρικές σχέσεις και Γεωμετρικές Έννοιες στην Προσχολική Εκπαίδευση». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/ECD109/>.





# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

**Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες**

Όλες οι εικόνες: Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος (Copyrighted).

