



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Μεθοδολογία των Επιστημών του Ανθρώπου: Στατιστική

Ενότητα 2: Επαγωγική Στατιστική

Βασίλης Γιαλαμάς
Σχολή Επιστημών της Αγωγής
Τμήμα Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική
Ηλικία

Περιεχόμενα ενότητας

Παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες του ελέγχου υποθέσεων που αφορούν στη σύγκριση μέσων τιμών και τη συνάφεια μεταξύ δυο μεταβλητών. Γίνεται επίσης εισαγωγή στην εκτιμητική της μέσης τιμής με τη βοήθεια των διαστημάτων εμπιστοσύνης.



Έλεγχος για τη διαφορά μέσω των τιμών μ_1 και μ_2 δύο πληθυσμών

Παράδειγμα

Σε πολλές περιπτώσεις μια παρέμβαση ή πείραμα οδηγεί στη σύγκριση δύο ομάδων τιμών που έχουν προκύψει κάτω από διαφορετικές συνθήκες. Με τη βοήθεια της διαφοράς των μέσων τιμών των ομάδων αξιολογείται η διαφορά επίδρασης των συνθηκών.

Για παράδειγμα, ένας εκπαιδευτικός ερευνητής μελετά την διαφορά ως προς το επίπεδο μάθησης που προκύπτει από την διδασκαλία με την μέθοδο «Επίλυση Προβλήματος» σε σχέση με την «κλασική» διδασκαλία. Για το σκοπό αυτό, σχηματίζονται με τυχαία επιλογή δύο ομάδες μαθητών. Η κάθε ομάδα διδάσκεται την ίδια ύλη με διαφορετική μέθοδο και οι μαθητές των δύο ομάδων αξιολογούνται με κατάλληλο κοινό τεστ. Αν οι μέση επίδοση στο κοινό τεστ είναι περίπου ίδια για τις δυο ομάδες καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι δύο μέθοδοι διδασκαλίας δεν διαφέρουν ως προς το γνωστικό αποτέλεσμα. Αν, αντίθετα, η διαφορά ως προς την επίδοση είναι ισχυρή, τότε κάποια μέθοδος υπερτερεί της άλλης.



Αμφίπλευρος και Μονόπλευρος έλεγχος

Στην περίπτωση **αμφίπλευρου ελέγχου** οι στατιστικές υποθέσεις γράφονται:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = (\mu_1 - \mu_2)_0, \quad H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq (\mu_1 - \mu_2)_0$$

Στην **συνηθέστερη περίπτωση** οι διαφορά των μέσων τιμών στην μηδενική υπόθεση είναι **0** όπως στο παράδειγμα της σύγκρισης των μεθόδων διδασκαλίας:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, \quad H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Για το **μονόπλευρο έλεγχο**:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0, \quad H_A: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0, \quad H_A: \mu_1 - \mu_2 > 0$$



Σχετιζόμενα και Ανεξάρτητα δείγματα

Διακρίνονται δυο περιπτώσεις ελέγχου διαφοράς πληθυσμιακών μέσων τιμών ανάλογα με τον τρόπο επιλογής των δειγμάτων:

- Σχετιζόμενα δείγματα
- Ανεξάρτητα δείγματα

Στην πρώτη περίπτωση είναι γνωστό στον ερευνητή από το ίδιο το σχέδιο της έρευνας ή του πειράματος ότι μια τιμή από το ένα δείγμα συνδέεται με μια τιμή από το άλλο δείγμα.

Για παράδειγμα σε ένα σχέδιο πειράματος επαναληπτικών μετρήσεων όπου το ίδιο άτομο μετρείται δύο φορές πριν την παρέμβαση και μετά την παρέμβαση, οι δυο τιμές του σχετίζονται επειδή ακριβώς γίνονται πάνω στον ίδιο άτομο.



Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων (1 από 9)

Η ευφορία που παρατηρείται στου αθλούμενους μετά από αεροβική άσκηση, είναι πιθανόν να οφείλεται σε αυξημένη συγκέντρωση ενδορφινών στο αίμα τους. Για την διερεύνηση αυτής της υπόθεσης μετρήθηκε η συγκέντρωση β-ενδορφίνης στο αίμα 11 αθλητών πριν και μετά από τη συμμετοχή τους σε ένα δρόμο 20 km. Αν μ_1 και μ_2 είναι η μέσες τιμές β-ενδορφίνης πριν και μετά την άσκηση αντιστοίχως, οι στατιστικές υποθέσεις είναι:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0, \quad H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$



Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων (2 από 9)

Είναι πολύ εύκολο να δειχτεί ότι για τη μέση τιμή μ_D των διαφορών ($D = X_{\text{μετά}} - X_{\text{πριν}}$) που μπορεί να υπολογιστούν για κάθε άτομο (ζεύγος τιμών) ισχύει

$\mu_D = \mu_2 - \mu_1$ άρα οι υποθέσεις μπορεί ισοδύναμα να διατυπωθούν:

$$H_0 : \mu_D = 0, \quad H_A : \mu_D \neq 0$$

	$X_{\text{πριν}}$	$X_{\text{μετά}}$	$X_{\text{μετά}} - X_{\text{πριν}}$
	1	4	3
	5	2	-3
	3	6	3
	4-3=1		
Μέση τιμή	3	4	1



Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων (3 από 9)

Άρα έχουμε ένα **έλεγχο t ενός δείγματος** για την μέση τιμή των πληθυσμού των διαφορών D.

Το στατιστικό t ελέγχου είναι:

$$t = \frac{\bar{D} - 0}{\frac{S_D}{\sqrt{N}}} = \frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{N}}}$$

που ακολουθεί την κατανομή t-student με N-1 βαθμούς ελευθερίας.



Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων (4 από 9)

	before	after	diff
1	4,30	29,60	25,30
2	4,60	25,10	20,50
3	5,20	15,50	10,30
4	5,20	29,60	24,40
5	6,60	24,10	17,50
6	7,20	37,80	30,60
7	8,40	20,20	11,80
8	9,00	21,90	12,90
9	10,40	14,20	3,80
10	14,00	34,60	20,60
11	17,80	46,20	28,40

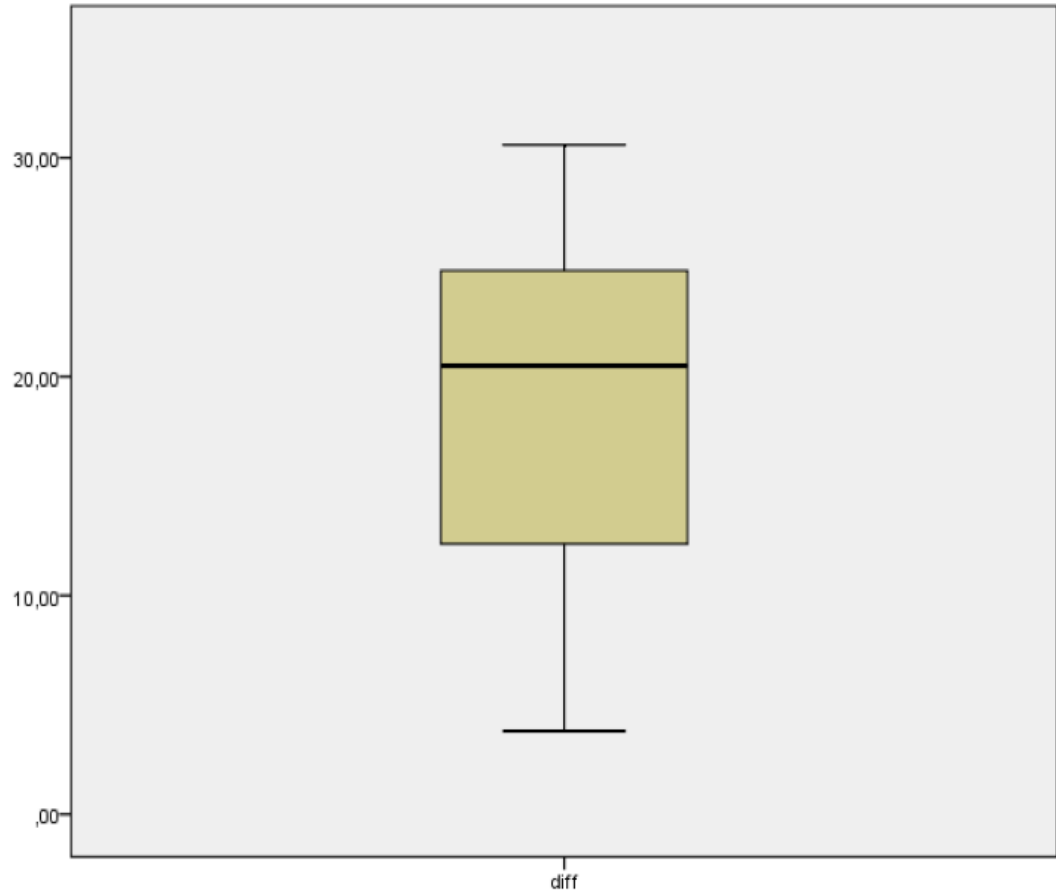
Τιμές ενδορφίνης πριν και μετά τον αγώνα και διαφορά των τιμών για 11 αθλητές



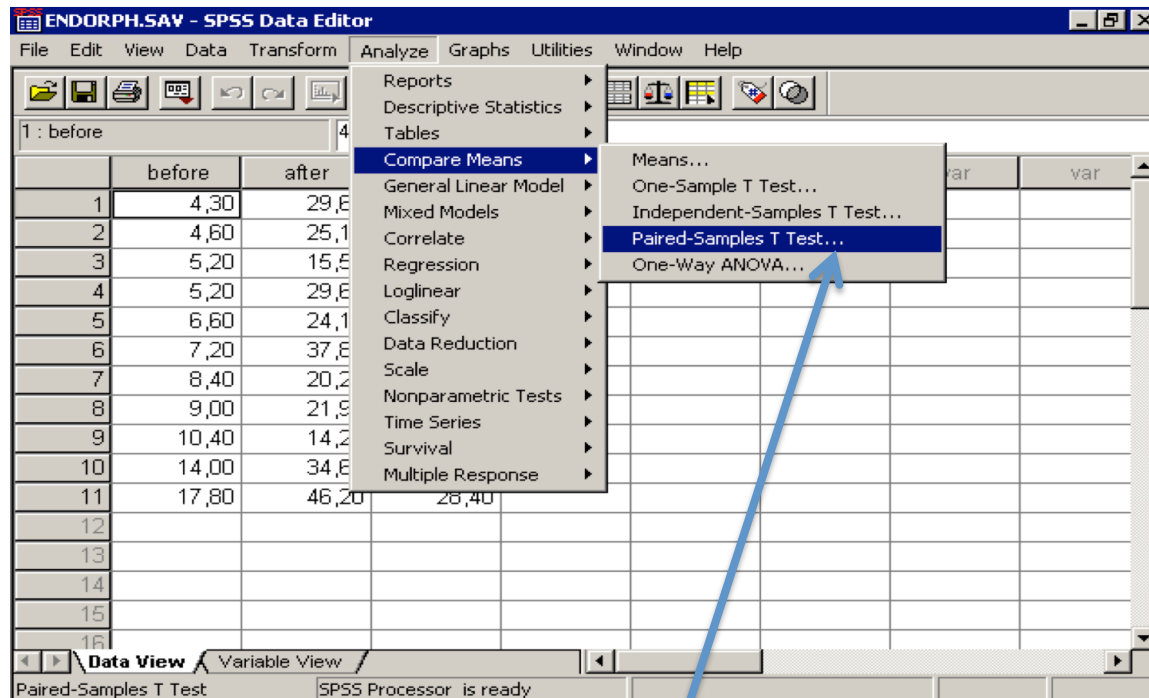
Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων (5 από 9)

**Έλεγχος
προϋποθέσεων
στην εκτέλεση του
ελέγχου t.**

Η επισκόπηση της
κατανομής των
διαφορών
ενδορφίνης δεν
αναδεικνύει σοβαρή
απόκλιση από την
κανονική κατανομή.



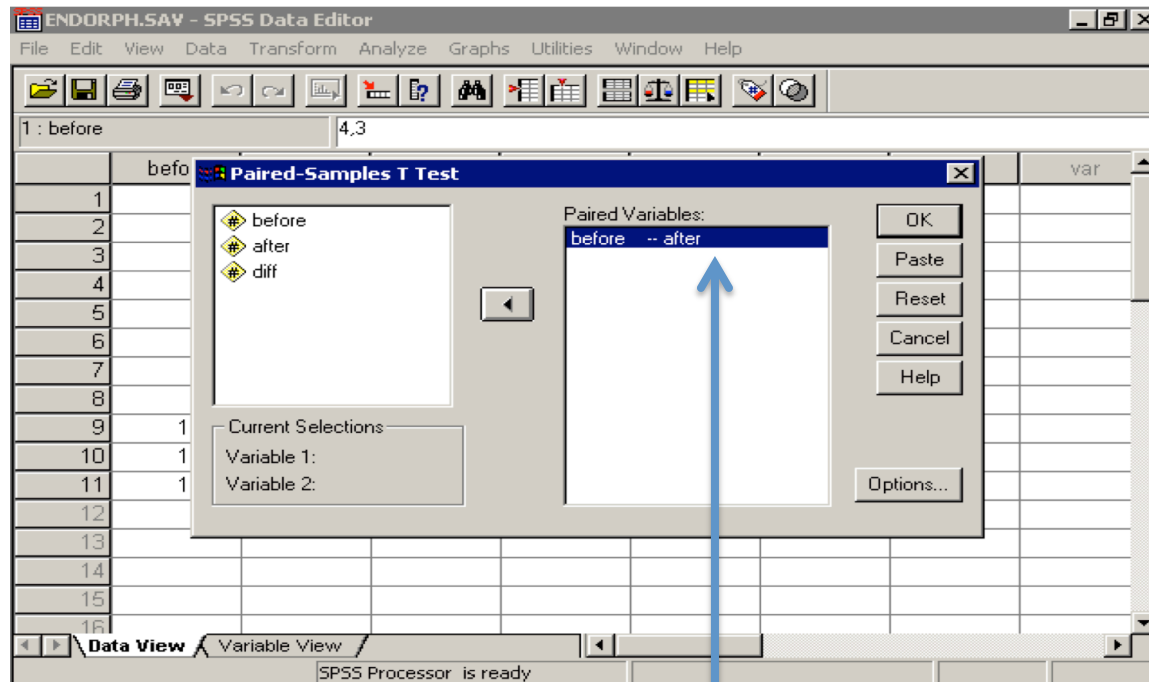
Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων (6 από 9)



Επιλογή του κατάλληλου ελέγχου



Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων (7 από 9)



Επιλογή των τιμών των δύο δειγμάτων-
μεταβλητών



Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων (8 από 9)

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	BEFORE	8,4273	11	4,24832	1,28092
	AFTER	27,1636	11	9,67794	2,91801

Περιγραφή των δυο δειγμάτων

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	BEFORE & AFTER	11	,515	,105



Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων (9 από 9)

Paired Samples Test

Pair 1 BEFORE - AFTER

Paired Differences	Mean		-18,7364
	Std. Deviation		8,32974
	Std. Error Mean		2,51151
	95% Confidence Interval of the Difference	Lower	-24,3324
		Upper	-13,1404
t			-7,460
df			10
Sig. (2-tailed)			,000

Έλεγχος t σχετιζόμενων δειγμάτων: Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση της μη μεταβολής της μέσης τιμής ενδορφίνης αφού $p < 0,001$



Έλεγχος t ανεξάρτητων δειγμάτων (1 από 8)

Αναφορικά με το τυπικό σφάλμα της διαφοράς των μέσων δηλαδή την τυπική απόκλιση της δειγματοληπτικής κατανομής του στατιστικού και κριτήριο ελέγχου $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ όπου \bar{X}_1 και \bar{X}_2 μέσες τιμές τυχαίων δειγμάτων από τον πρώτο και δεύτερο πληθυσμό αντίστοιχα.



Έλεγχος t ανεξάρτητων δειγμάτων (2 από 8)

1. Δείγματα από κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς με γνωστές τις διακυμάνσεις των πληθυσμών

Τυπικό Σφάλμα: $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}$

Το στατιστικό για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης είναι:

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$



Έλεγχος t ανεξάρτητων δειγμάτων (3 από 8)

2. Δείγματα από κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς με άγνωστες αλλά ίσες διασπορές

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

Μια εκτίμηση της κοινής διακύμανσης σ^2

$$S_p^2 = \frac{S_1^2(N_1 - 1) + S_2^2(N_2 - 1)}{N_1 + N_2 - 2}$$

Το κριτήριο ελέγχου:
$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{s_p^2}{N_1} + \frac{s_p^2}{N_2}}}$$

ακολουθεί την κατανομή t , με $N_1 + N_2 - 2$ βαθμούς ελευθερίας.



Έλεγχος t ανεξάρτητων δειγμάτων (4 από 8)

3. Δείγματα από κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς με άγνωστες αλλά άνισες διασπορές

Το στατιστικό για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης είναι:

$$t' = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

Η κρίσιμη τιμή του t' :
$$t'_{1-\alpha/2} = \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

Όπου $w_1 = S_1^2/N_1$, $w_2 = S_2^2/N_2$, $t_1 = t_{1-\alpha/2}$ για $N_1 - 1$ βαθμούς ελευθερίας
 $t_2 = t_{1-\alpha/2}$ για $N_2 - 1$ βαθμούς ελευθερίας



Έλεγχος t ανεξάρτητων δειγμάτων (5 από 8)

Ερευνητικό ερώτημα: Η μέθοδος της «επίλυσης προβλήματος» είναι αποτελεσματικότερη από την «κλασική διδασκαλία» αναφορικά με την εκμάθηση των Μαθητικών.

Μεταβλητές:

- Επίδοση σε τεστ θεωρίας
- Επίδοση σε τεστ προβλημάτων
- Μέθοδος διδασκαλίας Μαθηματικών («επίλυσης προβλήματος» / «κλασική διδασκαλία»)



Έλεγχος t ανεξάρτητων δειγμάτων (6 από 8)

1. Έλεγχος στατιστικών υποθέσεων ($\alpha=0,05$):

$$H_0: \mu_{\text{Ε.Π.}} - \mu_{\text{Κ}} \leq 0, \quad H_A: \mu_{\text{Ε.Π.}} - \mu_{\text{Κ}} > 0$$

Όπου $\mu_{\text{Ε.Π.}}$ και $\mu_{\text{Κ}}$ οι μέσες τιμές επίδοσης για τις δυο μεθόδους «επίλυση προβλήματος» «κλασσική διδασκαλία» αντίστοιχα.



Έλεγχος t ανεξάρτητων δειγμάτων (7 από 8)

2. Στατιστικό ελέγχου και κανόνας απόφασης:

Από την επισκόπηση των δειγματικών τυπικών αποκλίσεων και ιστογραμμάτων των τιμών στα δυο δείγματα βαθμών προκύπτει ότι οι διακυμάνσεις δεν διαφέρουν δραματικά και δεν αμφισβητείται η προέλευσή τους από πληθυσμούς που κατανέμονται κανονικά. Θα χρησιμοποιηθεί το στατιστικό:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{s_p^2}{N_1} + \frac{s_p^2}{N_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sqrt{\frac{s_p^2}{N_1} + \frac{s_p^2}{N_2}}}$$

που ακολουθεί κατανομή student με $N_1 + N_2 - 2 = 51 + 50 - 2 = 99$ βαθμούς ελευθερίας. Επειδή πρακτικά με 100 βαθμούς ελευθερίας η student δεν διαφέρει από την τυπική κανονική κατανομή και επειδή ο έλεγχος είναι μονόπλευρος,

αν $t \geq 1,64$ απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.



Έλεγχος t ανεξάρτητων δειγμάτων (8 από 8)

3. Υπολογισμός του t και στατιστική απόφαση

Group Statistics

	Μέθοδος	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Θεωρητικά	Κλασσική	51	10,00	4,88	,68399
	Επίλυση Προβλήματος	50	14,34	4,82	,68226
Προβλήματα	Κλασσική	51	8,20	5,67	,79361
	Επίλυση Προβλήματος	50	12,90	5,51	,77893

$$S_p^2 = \frac{S_1^2(N_1 - 1) + S_2^2(N_2 - 1)}{N_1 + N_2 - 2}$$

$$= \frac{4,88^2 \cdot 50 + 4,82^2 \cdot 49}{99} = 21,41$$

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_p^2}{N_1} + \frac{S_p^2}{N_2}}} = \frac{14,34 - 10}{\sqrt{\frac{21,41}{51} + \frac{21,41}{50}}} =$$

$$= \frac{4,34}{0,921} = 4,71$$

Επειδή $t = 4,71 > 1,64$ απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και υιοθετείται η εναλλακτική.



Τέλος Ενότητας

Επαγωγική Στατιστική

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών 2015, Βασίλης Γιαλαμάς 2015. Βασίλης Γιαλαμάς. «Μεθοδολογία των Επιστημών του Ανθρώπου: Στατιστική. Επαγωγική Στατιστική». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/ECD102/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Σχήμα 1, Σελίδα 11: Σχήμα με την επισκόπηση της κατανομής των διαφορών ενδορφίνης / Copyrighted

Εικόνα 1, Σελίδα 12: Εικόνα οθόνης ηλεκτρονικού υπολογιστή που γίνεται η επιλογή του κατάλληλου ελέγχου (paired-samples T test) / Copyrighted

Εικόνα 2, Σελίδα 13: Εικόνα οθόνης ηλεκτρονικού υπολογιστή που γίνεται η επιλογή των τιμών των δύο δειγμάτων-μεταβλητών (before - after) / Copyrighted



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Πίνακες

Πίνακας 1, Σελίδα 8: Πίνακας μέσων τιμών / Copyrighted

Πίνακας 2, Σελίδα 10: Πίνακας τιμών ενδορφίνης πριν και μετά τον αγώνα / Copyrighted

Πίνακας 3, Σελίδα 14: Πίνακας ενός ζεύγους «πριν και μετά» / Copyrighted

Πίνακας 4, Σελίδα 14: Πίνακας συσχετισμού του ζεύγους «πριν και μετά» / Copyrighted



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Πίνακες

Πίνακας 5, Σελίδα 15: Πίνακας με έλεγχο t σχετιζόμενων δειγμάτων / Copyrighted

Πίνακας 6, Σελίδα 23: Πίνακας δεδομένων / Copyrighted

